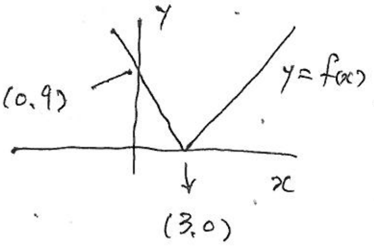
* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 나형 30번.

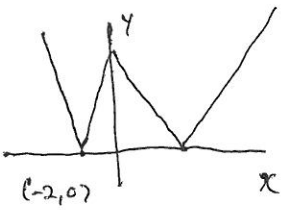
$f(x) = |3x-9|$, $g(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} f(x+k) & (x<0) \\ f(x) & (x \ge 0) \end{cases}$, $k>0$, $h(x) = x^3 + \cdots\cdots$

(가) $g(x)\cdot h(x)$는 미분가능. (나) $h'(3)=15$.

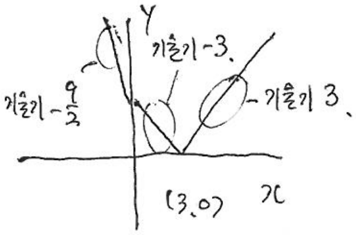


가능한 $g(x)$의 개형들.

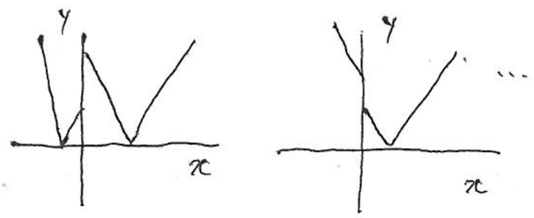
(i) $k=5$.



(ii) $k=1$



(iii) $x=0$에서 $g(x)$가 불연속인 경우들



삼차방정식 $h(x)=0$의 세 실근의 집합을 $\{0, 3, t\}$라 하면 ($\rightarrow h(x)=x(x-3)(x-t)$)

$h(0)=h(0-)=h(0+)=0$ ($\because g(0-)\neq\infty$, $g(0+)\neq\infty$) 이고, $x=3$과 $x=t$ (0과 3 외의 t가 존재할 때)

에서는 미분가능하다. $\therefore$ $g(x)$가 $x=0$일 때 불연속이라면 ($\rightarrow g(0-)\neq 9$ 이라면)

$$\lim_{x\to 0-} \frac{g(x)h(x)-g(0-)h(0-)}{x-0(-)} = \lim_{x\to 0-} \frac{g(x)h(x)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{g(x)\cdot x\cdot(x-3)\cdot(x-t)}{x} = g(0-)\cdot(-3)\cdot(-t)$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{g(x)h(x)-g(0+)h(0+)}{x-0(+)} = \lim_{x\to 0+} \frac{g(x)h(x)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{g(x)\cdot x\cdot(x-3)(x-t)}{x} = g(0+)\cdot(-3)\cdot(-t)$$

따라서 $g(x)\cdot h(x)$가 미분가능하려면 $t=0$ ($h(x)=x^2(x-3)$) 이거나, $g(0-)=g(0+)$ 이어야 한다. 위의 개형 분류에서 (iii)의 경우들은 $h(x)=x^2(x-3)$이 된다.

($x=0$ 이외의 $x=3-k$, t 등에서도 미분계수 정의를 활용해서 확인해 볼 것)

(iii) $h(x)=x^2(x-3)$.

$h'(x)=2x(x-3)+x^2 = x(2x-6+x)=3x(x-2)$.

$\}$ $h'(3)=9$. (조건에 위배).

$\rightarrow$ $g(x)$는 $x=0$에서 연속이어야 $g(x)h(x)$가 미분가능.

(i) $k=5$. ($\rightarrow t=-2$).

$h(x)=x(x-3)(x+2)=x^3-x^2-6x$

$h'(x)=3x^2-2x-6$

$\}$ $h'(3)=27-6-6=15$.

→ $h(x) = x(x-3)(x-t)$를 통해 $t=-2$ 임을 찾는 방법(조건을 충족시키도록)도 있다.

$\therefore h(k) = h(5) = 125 - 25 - 30 = 70.$

↓ (ii)의 예.

(ii) $k=1$ (개형상 $t\neq 0$, $t\neq 3$ 일 필요가 없다) → $t=0$ 이면 (iii)과 동일.

$h(x) = x(x-3)(x-t) \quad (t\neq 0)$

$h'(x) = (x-3)(x-t) + x(x-t) + x(x-3).$

$h'(3) = 3\times(3-t) = 15.$

$\therefore t=-2.$

($h(x)$는 (i)과 동일한 식이 나온다).

$\therefore h(1) = 1-1-6 = -6.$

따라서 모든 $h(k)$는 $h(1)$과 $h(5)$이고, 그 합은 $70-6 = 64$ //

* 추가.

$h(x) = x(x-3)(x-t)$일 때 $x=0$ 이외에서

$$\lim_{x\to t-} \frac{g(x)h(x) - g(t-)h(t-)}{x - t(-)} = \lim_{x\to t-} \frac{g(x)\cdot h(x)}{x-t} = \lim_{x\to t-} \frac{g(x)\cdot x\cdot(x-3)\cdot(x-t)}{x-t}$$

$\because h(t)=0.$

$$= \lim_{x\to t-} g(x)\cdot x\cdot(x-3) = g(t-)\cdot t\cdot(t-3).$$

$$\lim_{x\to t+} \frac{g(x)h(x) - g(t+)h(t+)}{x - t(+)} = \lim_{x\to t+} \frac{g(x)\cdot h(x)}{x-t} = \lim_{x\to t+} \frac{g(x)\cdot x\cdot(x-3)(x-t)}{x-t}$$

$$= \lim_{x\to t+} \frac{g(x)\cdot x\cdot(x-3)\cancel{(x-t)}}{\cancel{x-t}} = g(t+)\cdot t\cdot(t-3).$$

$\therefore g(t-) = g(t+)$ 이면 미분가능이고,

문제 내용상 연속이면 (위의 결과는 극한값 존재, $g(x)$는 $x\neq 0$ 일 때 연속이므로)

미분가능하다.