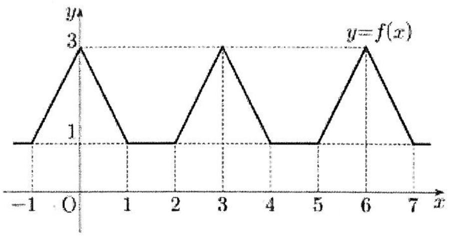
* 2021 학년도 평가원 6월 수학 가형 30번.



$[0,3) \to f(x) = |x-1| + |x-2|$

$(-\infty, \infty) \to f(x+3) = f(x)$.

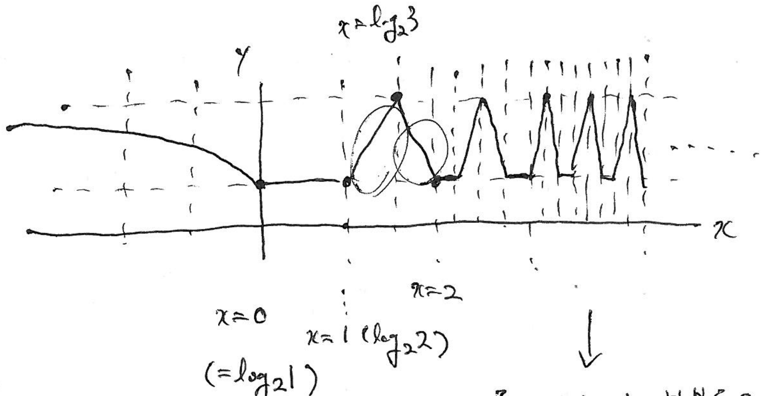
$g(x) = \lim_{h \to 0+} \left| \dfrac{f(2^{x+h}) - f(2^x)}{h} \right| \to (h \to 0+)$에 주의.

$\therefore$ $g(x)$는 $f(2^x)$의 접선 기울기의 우극한값의 크기로 생각할 수 있다.

$\to g(x) = f'(2^{x+}) \cdot 2^{x+} \cdot \ln 2 = f'(2^{x+}) \cdot 2^{x} \cdot \ln 2$

$f(2^x)$의 그래프는 오른쪽과 같다.

$f(2^{f(x)})$와 혼동하지 말 것.



(증가, 감소하는 부분들은 곡선임에 주의)

$\to g(x)$가 $x=a$에서 불연속일 때,

$(-5,5)$에 속하는 a값을 수열로 나타내면 a_n.

$x \to (-5,5)$이면 $2^x \to (\frac{1}{32}, 32)$이고, 이 구간 $(\frac{1}{32}, 32)$을 문제에서 주어진 그래프에서 확인하면 된다.

$\therefore$ $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 5$, $a_5 = 7$. ......

$x = \log_2 3$, $2^x = 3$, 문제의 그래프에서 첨점인 곳인 $g(x)$의 내용에 따라 접선 기울기의 우극한값은 연속이다. (주의).

따라서 $(\frac{1}{32}, 32)$ 구간에서의 a값은 총 21개가 나온다. — { $[0,3] \to 2$개, 총 10번 반복, 31포함, 32는 구간외.

$g(a_1) = g(1) = f'(1+) \times 1 \times \ln 2 = 0$.

$g(a_2) = g(2) = f'(2+) \times 2 \times \ln 2 = 2 \cdot 2 \cdot \ln 2$

$g(a_3) = g(4) = f'(4+) \times 4 \times \ln 2 = 0$.

$g(a_4) = g(5) = f'(5+) \times 5 \times \ln 2 = 2 \times 5 \times \ln 2$.

......

$g(a_{2k-1}) = 0$ (k는 1부터 11까지), $g(a_{2k}) = 2 \times a_{2k} \times \ln 2$ (k는 1부터 10까지).

$$\therefore n + \sum_{k=1}^{n} \frac{g(a_k)}{\ln 2} = 21 + (2\cdot 2\cdot \ln 2 + 2\cdot 5\cdot \ln 2 + 2\cdot 8\cdot \ln 2 + \cdots + 2\cdot 29\cdot \ln 2) \times \frac{1}{\ln 2}$$

$$= 21 + 2\times(\underbrace{2+5+8+\cdots+29}_{10\text{개}}) = 21 + 2 \times \frac{10 \times (2+29)}{2} = 21 + 310 = 331$$

→ $f(2^x)$ 의 그래프는 합성의 의미보다는 치환의 의미 (변수 밀도의 변경) 가 더 강하다.

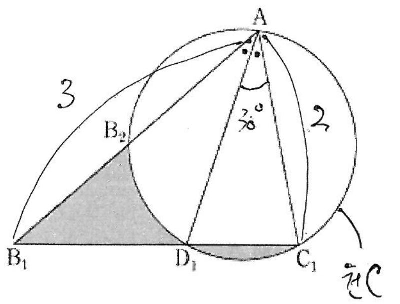
$f(x)$ 와 $f(2^x)$ 를 다른 함수로 판단하지 말고 (식 계산은 어쩔 수 없지만)

2^x 전체가 (2^x의 값이) $f(x)$ 에서 변수값으로 작용한다는 점을

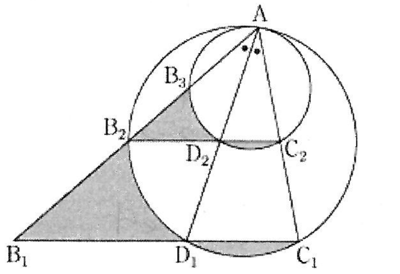
이해해야 한다. (문제에서 그래프를 직접 보여준 의미로 생각함).

* 2021 학년도 평가원 6월 수학 가형 20번.

R_1



R_2



⋮ ⋮

1) $n: 2 \to 2$. $\therefore n=1$.

2) lr: $\overline{AB_1} \to \overline{AB_2}$.

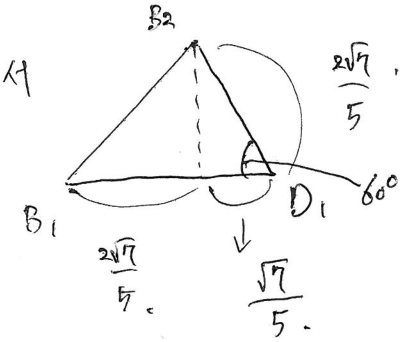
$\angle A = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$. $\therefore \overline{B_1C_1}^2 = 9+4-2\cdot3\cdot2\cdot\frac{1}{2} = 7$. $\therefore \overline{B_1C_1} = \sqrt{7}$.

∴ 각의 이등분선의 성질에 의해 $\overline{B_1D_1} = \frac{3\sqrt{7}}{5}$, $\overline{D_1C_1} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$.

R_1에 있는 $\triangle AD_1C_1$의 외접원을 원C라 하고 반지름을 r_1이라 하면 $\dfrac{\overline{D_1C_1}}{\sin A = \sin(\angle D_1AC_1)} = 2r = \dfrac{2\sqrt{7}/5}{1/2}$. $\therefore r = \frac{2\sqrt{7}}{5}$.

$\angle B_2AD_1 = \angle D_1AC_1$ 이므로 $\overline{B_2D_1} = \overline{D_1C_1} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$. $\angle B_2AC_1 = 60^\circ$, $\therefore \angle B_2D_1C_1 = 120^\circ$

$\triangle B_1D_1B_2$ 에서



$\therefore \overline{B_1B_2}^2 = \frac{28}{25} + \frac{63}{25} - 2\cdot\frac{2\sqrt{7}}{5}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{5}\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{28+63-42}{25} = \frac{49}{25}$. $\therefore \overline{B_1B_2} = \frac{7}{5}$.

따라서 $\overline{AB_2} = \overline{AB_1} - \overline{B_1B_2} = 3 - \frac{7}{5} = \frac{8}{5}$ $\therefore lr: \dfrac{\frac{8}{5}}{3} = \frac{8}{15}$. $S_r = \frac{64}{225}$.

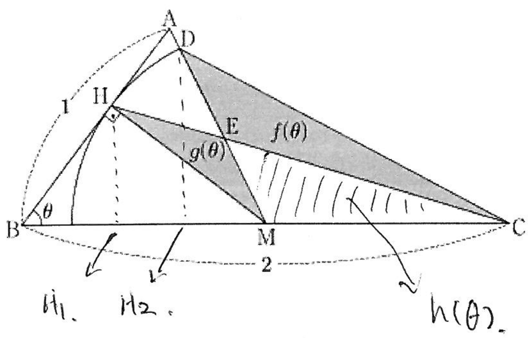
3) 호 $\overset{\frown}{D_1C_1}$ 과 호 $\overset{\frown}{B_2D_1}$ 의 모두 중심각 60°, 원주각 30° 이므로 그 활꼴의 넓이 또한

같으므로 R_1에 색칠된 두 부분의 넓이를 합하면 $\triangle B_1D_1B_2$가 된다.

$\therefore a = \frac{1}{2} \times \overline{B_1D_1} \times \overline{D_1B_2} \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{7}}{5} \times \frac{2\sqrt{7}}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{50}$.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-rn} = \dfrac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1-\frac{64}{225}} = \dfrac{\frac{\cancel{21}^{3}\sqrt{3}}{\cancel{50}\,\cancel{10}\,2}}{\frac{\cancel{161}_{23}}{\cancel{225}\,\cancel{45}\,9}} = \frac{27\sqrt{3}}{46}$ //

* 2021학년도 평가원 6월 수학 가형 28번.



$\overline{BM}=1$. ∴ $\triangle ABM$은 이등변삼각형.

$\therefore \angle BMA = \angle MAB = \dfrac{\pi-\theta}{2} = \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$

$\angle BMH = \dfrac{\pi}{2}-\theta$. $\therefore \angle HMA = \dfrac{\theta}{2}$.

점H의 직선BC 위로의 수선의 발을 H_1, 점D의 수선의 발을 H_2.

$\overline{BH} = \cos\theta$, $\overline{HH_1} = \cos\theta\sin\theta$, $\overline{DH_2} = \overline{DM}\times\sin(\angle MDH_2) = \sin\theta\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\right) = \sin\theta\cdot\cos\dfrac{\theta}{2}$.

$\triangle MCE = h(\theta)$라 하면 $f(\theta)-g(\theta) = \{f(\theta)+h(\theta)\}-\{g(\theta)+h(\theta)\}$ 와 같다.

(추가적으로 선분ME, $\angle MEH = \angle DEC$ 등을 구해서 $f(\theta)$, $g(\theta)$를 따로 구하는 것은 시험장 내에서는 비현실적이므로 $\triangle MCE$를 활용하는 방안을 생각해야 한다)

$\therefore \triangle HMC = g(\theta)+h(\theta) = \dfrac{1}{2}\times1\times\cos\theta\times\sin\theta$

$\triangle DMC = f(\theta)+h(\theta) = \dfrac{1}{2}\times1\times\cos\dfrac{\theta}{2}\times\sin\theta$

$\therefore f(\theta)-g(\theta) = \dfrac{1}{2}\times\left\{\sin\theta\cdot\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\theta\cdot\cos\theta\right\}$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3} = a = \lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\sin\theta\times\left\{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right\}}{\theta^3} = \lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{\theta^2}\times\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)$$

$$= \lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{\theta^2}\times\left(1-\cos\theta-1+\cos\frac{\theta}{2}\right) = \lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}-\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2}\right)$$

$$= \lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\left(\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{1}{1+\cos\theta}-\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta^2}{4}}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{1+\cos\frac{\theta}{2}}\right) = \frac{1}{2}\times1\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{16} = a.$$

→ 반각공식 활용. $\cos\dfrac{\theta}{2}-\cos\theta = \cos\dfrac{\theta}{2}-\left(2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1\right) = -2\cos^2\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}+1$

$= \left(2\cos\dfrac{\theta}{2}+1\right)\left(1-\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$ $\quad\therefore \displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\left(2\cos\frac{\theta}{2}+1\right)\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta^2}{4}}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{1+\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{3}{16} = a.$

$\therefore 80a = 80\times\dfrac{3}{16} = 15$ //

* 2021학년도 평가원 6월 수학 나형 30번.

이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대. $\rightarrow$ $f(x)=a(x+1)^2-a+f(0)$. $(a<0)$.

삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0 $\rightarrow$ 방정식 $g(x)=g(0)$의 세 근의 합이 0이다.

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le 0) \\ g(x) & (x>0) \end{cases}, \quad h(x)\text{는 미분가능.} \quad h'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<0) \\ g'(x) & (x>0) \end{cases}.$$

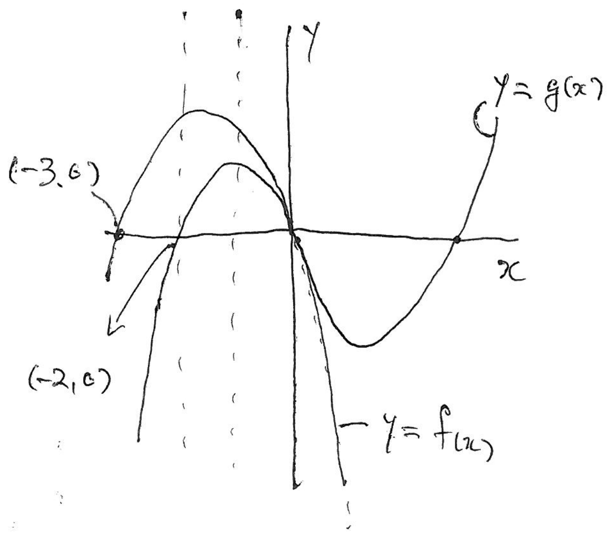
미분가능하므로 $f(0)=g(0+)$, $f'(0-)=g'(0+)$ ($\because$ 각각 다항함수)

(가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다.

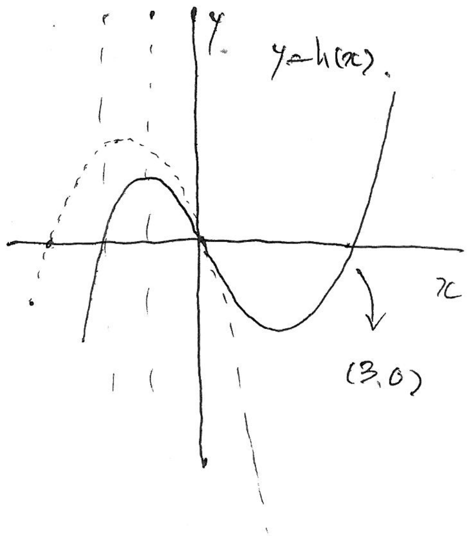
$\rightarrow$ $(x\le 0)$, $h(x)=f(x)$이므로 $f(x)=h(0)=f(0)$은 $x=-2$, $x=0$을 근으로 가지므로

$(x>0)$, $h(x)=g(x)$에서 $g(x)=h(0)$은 $x=3$을 근으로 가진다. 따라서 실수 전체의 집합에서 정의되는 $g(x)$로 보면 방정식 $g(x)=h(0)=f(0)=g(0)$은 $x=0$과 $x=\pm 3$을 근으로 가지므로, $g(x)=bx(x^2-9)+f(0)$으로 설정가능하다.

또한 $x=0$에서 $h(x)$가 미분가능하려면 $b>0$이어야 한다.



$\rightarrow$



$\rightarrow$ $x=0$에서 $g(x)$와 $f(x)$의 형태는 $y=0$과 $y=x^3$ 같은 3중근의 형태를 띨 수 없고, 예를 들어 $y=0$과 $y=(x+1)\cdot x^2$ 같이 또는 $y=-x^2$과 $y=(x+1)\cdot x^2$ 같이 3차함수가 곁에 붙어있는 형태의 개형이다.

$\therefore f(x) = a(x+1)^2 - a + f(0) \quad (a<0) \qquad f'(x) = 2a(x+1)$

$g(x) = bx(x^2-9) + f(0) \quad (b>0). \qquad g'(x) = 3bx^2 - 9b = 3b(x^2-3).$

(사) 닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$ 이다.

닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 최댓값은 $f(-1)$, 최솟값은 $g(\sqrt{3})$.

따라서 (i) $x=0$ 에서 미분가능하므로 $f'(0-) = g'(0+)$ 에서

$2a = -9b$ ---------------- ①

(ii) $f(-1) = -a + f(0)$. $g(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}b + f(0) = -6b\sqrt{3} + f(0)$

$\therefore -a + 6b\sqrt{3} = 3 + 4\sqrt{3}.$

$-2a + 12b\sqrt{3} = 6 + 8\sqrt{3}$ 에서 ① 과 연립하면

$9b + 12b\sqrt{3} = 3(3+4\sqrt{3})\cdot b = 2(3+4\sqrt{3})$ 에서

$b = \frac{2}{3}, \quad a = -3.$

$\therefore h'(-3) = f'(-3) = -4a = 12$

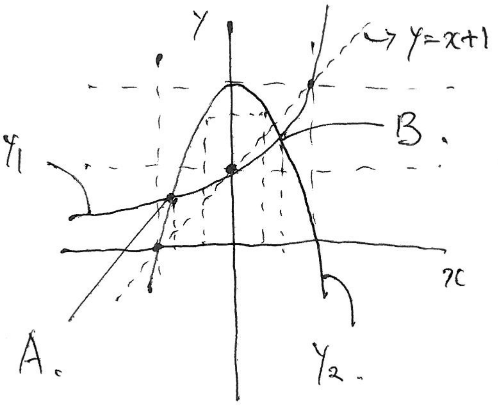
$h'(4) = g'(4) = 3\cdot 13b = 39b = 26$

$\therefore h'(-3) + h'(4) = 38$

* 2021학년도 평가원 6월 수학 가형 18번, 나형 21번.

두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2) $(x_1<x_2)$이라 할 때

$y_1=2^x$, $y_2=-2x^2+2$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $(x_1<x_2)$라 하면



ㄱ. $y_1(\frac{1}{2})=\sqrt{2}$, $y_2(\frac{1}{2})=-\frac{2}{4}+2=\frac{3}{2}$.

$\therefore$ $x=\frac{1}{2}$은 $y_2>y_1$인 구간에서 존재한다.

B의 왼쪽에서 가능. $\therefore x_2>\frac{1}{2}$. $\rightarrow$ ㄱ: True.

ㄴ. $y_2-y_1<x_2-x_1$ $\Rightarrow$ $y_2-x_2\,(=k_2)<y_1-x_1\,(=k_1)$ 확인.

$y_2-x_2=k_2$라 하면 점 B를 지나는 기울기 1인 직선의 y절편이 k_2가 된다.

위의 그림에서 점 B를 지나는 기울기 1인 직선은 $y=x+1$보다 밑에 있으므로

$k_2<1$. 같은 맥락으로 $k_1>1$. $\therefore k_2<1<k_1$. $\rightarrow$ ㄴ: True.

ㄷ. $|x_1|>|x_2|$이므로 $x_1+x_2<0$. ⋯ ①

$-1<x_1<-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}<x_2<1$

$-\frac{1}{2}<x_1+x_2<\frac{1}{2}$ ⋯ ②

따라서 $-\frac{1}{2}<x_1+x_2<0$.

$y_1y_2=2^{x_1}\times 2^{x_2}=2^{x_1+x_2}$이므로

$2^{-\frac{1}{2}}<2^{x_1+x_2}<2^0$ ($\because$ 밑수가 1보다 큰 2이다).

$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$. ㄷ: True.

① 이차함수의 대칭성 + 지수함수(증가인 경우)와의 관계 $\rightarrow$ $y_2>y_1$

* 이와 같은 문제에서 풀어보는 구간과 다른 구간으로 찾았을 때, 어떻게 해야 할지 생각할 것.

ex) 문제에서 $10<\triangle<20$ $\rightarrow$ T or F? $\left\{\begin{array}{l} 11<\triangle<19 \\ 9<\triangle<21 \end{array}\right\}$ 이럴 때 행동강령 생각.

* 2021학년도 평가원 6월 수학 가형 21번.

수열 $\{a_n\}$의 일반항, $a_n = \log_2\sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}} = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2(n+1)}{n+2}\right)$

$\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 100 이하의 자연수, 그 때의 모든 자연수 m 값들의 합은?

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m = \frac{1}{2}\times\left\{\log_2\left(\frac{4}{\cancel{3}}\times\frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{4}}\times\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{5}}\times\cdots\times\frac{2(\cancel{m+1})}{m+2}\right)\right\} = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2^{m+1}}{m+2}\right)$$

∴ $\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2^{m+1}}{m+2}\right)$이 100 이하의 자연수가 되려면

→ $\frac{2^{m+1}}{m+2}$이 2의 짝수 거듭제곱 (양의 짝수제곱) 이어야 하고 ($2^3 \to X$, $2^4 \to O$)

그에 따라 $m+2$ 역시 2의 거듭제곱이어야 한다. 또한 200 이하 제곱이어야 한다.

따라서 $m=2$. $\frac{2^{m+1}}{m+2} = \Delta = \frac{2^3}{4} = 2^1 \to X$. (∵ $2^{1} \to$ 홀수면 X)

$m=6$. $\Delta = \frac{2^7}{8} = 2^4$ (O)

$m=14$. $\Delta = \frac{2^{15}}{16} = 2^{11}$. (X)

$m=30$. $\Delta = \frac{2^{31}}{32} = 2^{26}$ (O)

$m=62$. $\Delta = \frac{2^{63}}{64} = 2^{57}$ (X).

$m=126$. $\Delta = \frac{2^{127}}{126} = 2^{120}$ (O).

$m=254$. $\Delta = \frac{2^{255}}{256} = 2^{247}$ (X). → 200 초과.

∴ 조건을 만족시키는 모든 자연수 m은 6, 30, 126 이므로 그 합은 162 //

* 2021학년도 평가원 6월 수학 가형 15번.

수열 $\{a_n\}$. → $a_n = (2^{2n}-1)\times 2^{n(n-1)} + (n-1)\times 2^{-n}$

⇒ $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1)\times 2^{-n}$ ·····(*) 증명 (with 귀납법).

(i) 초항 성립 (증명) $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 = (4-1)\cdot 2^0 + (1-1)\cdot 2^{-1} = 3$. $2^2 - (1+1)\cdot 2^{-1} = 3$. } 성립.

(ii) 일반항 성립 (가정) $(n=m)$ $\sum_{k=1}^{m} a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1)\times 2^{-m}$

(iii) 연속항 성립 (증명) $\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1}$

a_{m+1} (수열의 일반항)

$= 2^{m(m+1)} - (m+1)\times 2^{-m} + (2^{2m+2}-1)\times 2^{m(m+1)} + m\times 2^{-m-1}$

$= 2^{m(m+1)}\times\{1+2^{2m+2}-1\} + 2^{-m}\times\{-m-1+\frac{m}{2}\}$

$= 2^{m(m+1)}\cdot 2^{2m+2} - \frac{m+2}{2}\times 2^{-m}$

$= 2^{(m+1)(m+2)} - (m+2)\times 2^{-(m+1)}$ ⇒ (*) 성립.

∴ (가) $= 2^{m(m+1)} = f(m)$, (나) $= 2^{2m+2} = g(m)$.

(i), (ii), (iii)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 (*) 성립.

∴ $\frac{g(7)}{f(3)} = \frac{2^{16}}{2^{12}} = 2^4 = 16$ //

* 2021학년도 평가원 6월 수학 나형 29번.

집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 함수 $f : A \to A$. ∴ 전체 $=$ All $=$ 분모 $= 256$

(가) $f(1) \times f(2) \geq 9$ $\to$ ∴ 가능한 $(f(1), f(2))$는 $(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)$

(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3.

(i) 치역이 $\{1, 2, 3\}$인 경우.

$f(1) = f(2) = 3$ 확정. ∴ $\{3, 4\}$를 $\{1, 2\}$에 전사함수로 대응시키면 된다.

∴ $f(3) = f(4)$인 경우를 제외시켜야 하므로 $2^2 - 2 = 2$.

(ii) 치역이 $\{1, 2, 4\}$인 경우. $\to$ (i)과 동일 맥락. ∴ 2.

(iii) 치역이 $\{1, 3, 4\}$인 경우.

(iii)-1. $f(1) = f(2) = 3$. $\to 2$.

(iii)-2. $f(1) = f(2) = 4$ $\to 2$.

(iii)-3 $f(1) = 3$, $f(2) = 4$ $\to$ $f(3) = 1$일 때 3가지, $f(4) = 1$일 때 3가지

교집합인 $f(3) = 1$, $f(4) = 1$인 경우 1가지. ∴ 5가지.

(iii)-4. $f(1) = 4$, $f(2) = 3$ $\to$ 5가지.

따라서 (iii)의 경우 총 14가지.

(iv) 치역이 $\{2, 3, 4\}$인 경우 $\to$ (iii)과 동일 맥락. ∴ 14.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{2+2+14+14}{256} = \dfrac{32}{256} = \dfrac{1}{8} = p$. ∴ $120p = 15$//

* 2021학년도 평가원 6월 수학 가형 19번.

집합 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,2,3\}$, $f: A \to B$. ∴ 전체 $=$ All $=$ 분모 $= {}_3\Pi_4 = 81$.

조건: $f(1) \geq 2$ or 함수 f의 치역은 B 이다.

여사건으로 접근하면 조건을 P라 하면 $1-P(P^c)$ 이므로

P^c: $f(1) < 2$ and 함수 f의 치역은 B가 아니다.

$\to$ $f(1)=1$ 고정, 함수 f의 치역은 $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1\}$ 가능.

(i) 치역이 $\{1\}$인 경우 $\to$ f의 개수는 1.

(ii) 치역이 $\{1,2\}$인 경우 $\to$ $f(1)=1$, $A'=\{2,3,4\}$, $B'=\{1,2\}$라 할 때

A'의 모든 원소가 1로 대응되는 경우만 불가. ∴ $2^3-1=7$.

(iii) 치역이 $\{1,3\}$인 경우 $\to$ (ii)와 동일 채택. ∴ 7.

따라서 구하는 확률은 $1-\dfrac{1+7+7}{81}=\dfrac{66}{81}=\dfrac{22}{27}$ //

* 2021학년도 평가원 6월 수학 가형 29번.

검은색 볼펜 △ 1자루. 파란색 볼펜 □ 4자루. 빨간색 볼펜 ○ 4자루. } 택5 (경우는 9가지. 직접 셈해도 OK. △+□+○=5 통해서 최소, 최대 살펴가면서 계산해도 OK).

↳ 2명에게

(남김없이, 못 받는 학생 존재 가능).

(1) △□□□□ : 1명을 기준으로 삼고, 1명이 받는 볼펜의 개수를 통해서 경우의 수를 구한다.

0개(1), 1개(2), 2개(2), 3개(2), 4개(2), 5개(1) → 10.

(2) △○○○○ : (1)과 동일.

(3) △□○○○ : 0개(1), 1개(3), 2개(4), 3개(4), 4개(3), 5개(1) → 16.

(4) △□□○○ : 0개(1), 1개(3), 2개(5), 3개(5), 4개(3), 5개(1) → 18.

(5) △□□□○ : (3)과 동일.

(6) □□□□○ : (1)과 동일.

(7) □□□○○ : 0개(1), 1개(2), 2개(3), 3개(3), 4개(2), 5개(1) → 12.

(8) □□○○○ : (7)과 동일

(9) □○○○○ : (1), (6)과 동일.

$\therefore\ 10\times4+16\times2+18+12\times2=40+32+18+24=114$ //

→ 각각의 경우들 안에서도 역시 대칭성 존재.

→ 경우들에 따른 분류 (케이스 분류)가 가능할 경우, 일반적으로 케이스 분류가 가장 안전.

→ 분류 기준은 독자적인 해석 가능.

* 2021학년도 평가원 6월 수학 가형 17번.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 → 일렬로 배열할 때 → 전체 = All = 분모 = $7!$

(가) 4의 양 옆에는 4보다 큰 수.

(나) 5의 양 옆에는 5보다 작은 수.

(i) □546

(ii) □547.

(iii) 645□

(iv) 745□.

□에는 1, 2, 3 중 하나. ∴ ${}_3C_1 \times 4! \times 4$

→ $4!$은 예를 들어 □에 1이 들어갈 경우, (i)에서 1546, 2, 3, 7 → 배열.

(v). 647, □5□.

(vi) 746, □5□.

□에는 1, 2, 3 중에서 2개 고르고 배열.

∴ ${}_3C_2 \times 2! \times 3! \times 2$.

→ $2!$은 예를 들어 152와 251의 자리 바꿈.

$3!$은 (v)에서 647, 152, 3 → 배열.

∴ 구하는 확률은 $\dfrac{{}_3C_1 \times 4! \times 4 + 3 \times 3! \times 4}{7!} = \dfrac{12 \cdot 4! + 3 \cdot 4!}{7!} = \dfrac{15}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \dfrac{1}{14}$ //

* 2021학년도 평가원 6월 수학 나형 27번.

(가) $a+b+c+d=6$

(나) a, b, c, d 중 적어도 하나는 0.

} 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

(i) 0이 하나일 때, 자연수 △, □, ○에 대하여 △+□+○ = 6 :

$\therefore \ {}_4C_1 \times {}_3H_3 = 4 \times 10 = 40$

(ii) 0이 두개일 때, 자연수 △, □에 대하여 △+□ = 6

$\therefore \ {}_4C_2 \times {}_2H_4 = 6 \times 5 = 30$

(iii) 0이 세개일 때, 자연수 △에 대하여 △ = 6

$\therefore \ {}_4C_3 \times {}_1H_5 = 4 \times 1 = 4$.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 (i)+(ii)+(iii) = 40+30+4 = 74 //

* 2021학년도 평가원 6월 수학 나형 16번. 가형 13번.

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때 → 전체 (a, b)의 개수는 36.

$|a-3|+|b-3|=2$ or $a=b$. → 6가지.

$0+2 \rightarrow a=3.\ b=5$ or 1 (2)

$1+1 \rightarrow \begin{cases} a=4 & b=4 \text{ or } 2 \ (2) \\ a=2 & b=4 \text{ or } 2 \ (2) \end{cases}$

$2+0 \rightarrow \begin{cases} a=5 & b=3 \ (1) \\ a=1 & b=3 \ (1) \end{cases}$

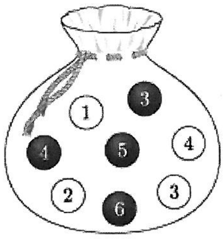
} 8가지.

} 교집합은 (4, 4), (2, 2) 2가지.

$\therefore$ 구하는 확률은 $\dfrac{6+8-2}{36}$

$= \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$ //

* 2021학년도 평가원 6월 수학 가형27번, 나형 20번.



①②③④ $\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}$ → 택4. $(= {}_8C_4 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 70)$

같은 수의 공이 존재할 때

(i) ③$\boxed{3}$ → ${}_6C_2 - 1$ ((iii)의 경우와 중복 1가지)

(ii) ④$\boxed{4}$ → ${}_6C_2 - 1$.

(iii) ③$\boxed{3}$④$\boxed{4}$. → 1.

$\Big\}$ 29가지.

→ 검은 공이 2개.

(iii)의 경우 OK. → 1가지.

(i)과 (ii)의 경우, 고정된 공 외의 2개를 더 확정지을 때, ○1개, □1개인

형태만 가능하다. 따라서 ${}_8C_1 \times {}_3C_1 - 1 = 8$. ∴ $8\times2=16$. ((i)+(ii)).

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{17}{70}}{\frac{29}{70}} = \dfrac{17}{29}$ //

* 2021학년도 평가원 6월 수학 가형 26번, 나형18번.

공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$. $S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$.

$S_{k+2}-S_k=4=a_k+d+a_k+2d=2a_k+3d=2a_k+6$. $\therefore a_k=-1$.

$\therefore a_n=\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, \cdots$

$\downarrow$

a_k. $-7-5-3-1=-16$ 이므로 $k=4$.

따라서 $a_n=dn-d+a_1=2n-9$. $\therefore a_{2k}=a_8=16-9=7$ //

* 2021학년도 평가원 6월 수학 나형 28번.

수열 $\{a_n\}$, 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}=2n^2+7n$.

$n=1$. $\frac{1}{a_1}=9$. $\therefore a_1=\frac{1}{9}$.

$n=2$ $\frac{1}{a_1}+\frac{5}{a_2}=22$. $\therefore a_2=\frac{5}{13}$

$n=3$. $\frac{1}{a_1}+\frac{5}{a_2}+\frac{9}{a_3}=39$. $\therefore a_3=\frac{9}{17}$

- - - - - - - - - - - -

$a_n=\frac{4n-3}{4n+5}$.

$\therefore a_5=\frac{17}{25}$, $a_7=\frac{25}{33}$, $a_9=\frac{33}{41}$. $\therefore a_5\times a_7\times a_9=\frac{17}{41}$ //

* 2021학년도 평가원 6월 수학 나형 14번.

수열 $\{a_n\}$, $a_1=1$, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{3n-1} = 2a_n+1 \\ a_{3n} = -a_n+2 \\ a_{3n+1} = a_n+1. \end{cases}$$

$a_{11}+a_{12}+a_{13} = ?$

$n=4$일 때 $a_{11}+a_{12}+a_{13} = 2a_4+4.$ $\Rightarrow a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1} = 2a_n+4.$

$n=1$일 때 $a_{3n+1} = a_4 = a_1+1 = 2.$

$\therefore a_{11}+a_{12}+a_{13} = 2\times2+4 = 8$ //

* 2021 학년도 평가원 6월 수학 나형 26번.

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$, x의 값이 0에서 $a\ (a>0)$까지 변할 때의 평균변화율

$(f'(x) = 3x^2 - 6x + 5)$ $\Rightarrow$ $(0, f(0))$ 과 $(a, f(a))$ 의 기울기

$$= \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{a^3 - 3a^2 + 5a}{a} = a^2 - 3a + 5 = f'(2) = 5.$$

$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$

* 2021 학년도 평가원 6월 수학 나형 17번.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = 4x^3 + x \cdot \int_0^1 f(t)\,dt$.

$\int_0^1 f(t)\,dt = a$ (단, a는 상수)라 하면 $f(x) = 4x^3 + ax$.

$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx = \left[x^4 + \frac{ax^2}{2}\right]_0^1 = 1 + \frac{a}{2} = a$. $\quad \therefore a = 2$.

$\therefore f(x) = 4x^3 + 2x$. $\quad f(1) = 4 + 2 = 6$ //

* 2021 학년도 평가원 6월 수학 나형 15번.

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$는 $v(t) = -4t + 5$.

P_p (position of P) $= \int v(t)\,dt = -2t^2 + 5t + C$ (단, C는 적분상수) 이므로

$t = 3$일 때 위치가 11이면 $-2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + C = -3 + C = 11$. $\quad \therefore C = 14$

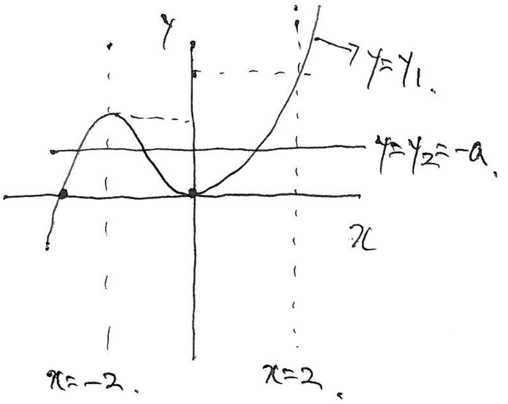
$\therefore P_p(0) = -2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 + 14 = 14$ //

* 2021학년도 평가원 6월 수학 나형 19번.

방정식 $2x^3+6x^2+a=0$ 이 $-2 \le x \le 2$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

→ $y_1=2x^3+6x^2$, $y_2=-a$, y_1과 y_2가 $-2 \le x \le 2$ 에서 서로 다른 두 교점을 갖는다.

∴ $y_1=2x^2(x+3)$, $y_1'=6x^2+12x=6x(x+2)$.



$y_1(-2)=8$. $y_1(0)=0$, $y_1(2)=40$.

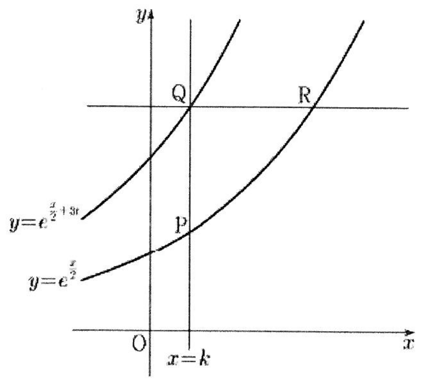
(좌측 그래프의 비례관계는 마음의 눈으로 확인해야 할 듯!!!)

[-2, 2] 에서 서로 다른 두 교점이 나타날려면

$0<-a \le 8$.

∴ $a=-1, -2, -3, \cdots, -8$ 까지 8개 //

* 2021학년도 평가원 6월 수학 가형 16번.



$t>0$, $P(k, e^{\frac{k}{2}})$, $Q(k, e^{\frac{k}{2}+3t}) = Q(k, e^{\frac{k}{2}} \cdot e^{3t})$.

$R(\Delta, e^{\frac{k}{2}+3t}) = R(\Delta, e^{\frac{k+6t}{2}})$.

$\therefore \Delta = k+6t$. 따라서 $\overline{QR} = \overline{PQ} = 6t$.

$e^{\frac{k}{2}} \cdot e^{3t} - e^{\frac{k}{2}} = e^{\frac{k}{2}} \times (e^{3t}-1) = 6t$.

이 때 $k=f(t)$ 이므로 $e^{\frac{k}{2}} = e^{\frac{f(t)}{2}} = \dfrac{6t}{e^{3t}-1}$. $\therefore f(t) = 2\ln\left(\dfrac{6t}{e^{3t}-1}\right)$

$$\therefore \lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{t \to 0+} 2\ln\left(\frac{\frac{6t}{3t}}{\frac{e^{3t}-1}{3t}}\right) = 2\ln 2 = \ln 4 \,//$$

* 2021학년도 평가원 6월 수학 가형 14번.

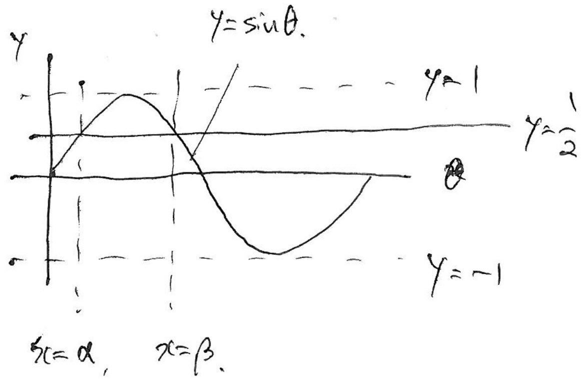
$0 \le \theta < 2\pi$, x에 대한 이차방정식 $x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$ 이 실근을 갖는다.

$\therefore D = 4\sin^2\theta - 4(-3\cos^2\theta - 5\sin\theta + 5) \ge 0$.

$\therefore \sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta + 5\sin\theta - 5 = -2\sin^2\theta + 5\sin\theta - 2$

$= (-2\sin\theta+1)(\sin\theta-2) \ge 0$.

$\therefore \frac{1}{2} \le \sin\theta \le 1$. ($\because -1 \le \sin\theta \le 1$).



따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5\pi}{6}$

$\therefore 4\beta - 2\alpha = \frac{20\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = \frac{18}{6}\pi = 3\pi \,//$

* 2021학년도 평가원 6월 수학 가형 25번.

곡선 $x^3-y^3=e^{xy}$ 위의 점 $(a,0)$ 에서의 접선의 기울기 b.

① 곡선의 방정식은 $(a,0)$ 만족. $\therefore\ a^3-0^3=e^{a\cdot 0} \rightarrow a^3=1.\quad \therefore a=1.$

(좌표평면에 나타나므로 a는 실수)

② 양변 미분.

좌변: $(x^3-y^3)'=3x^2dx-3y^2dy.$

우변: $(e^{xy})'=y\cdot e^{xy}dx+x\cdot e^{xy}\cdot dy.\quad$ (ex: e^{3x} 미분하면 $3e^{3x}$).

$$\therefore\ (3x^2-ye^{xy})\,dx=(xe^{xy}+3y^2)\,dy.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-ye^{xy}}{xe^{xy}+3y^2}.\qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=a=1\\ y=0}}=\frac{3-0}{1+0}=3.\qquad \therefore b=3.\quad a+b=4$$

⟶ ② 에서

양변에 로그를 씌우면 $\ln(x^3-y^3)=xy$ 이고 여기서 양변을 미분하면

$$\frac{3x^2}{x^3-y^3}dx-\frac{3y^2}{x^3-y^3}dy=ydx+xdy.$$

$$\left(\frac{3y^2}{x^3-y^3}+x\right)dy=\left(\frac{3x^2}{x^3-y^3}-y\right)dx.\qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{3x^2}{x^3-y^3}-y}{\frac{3y^2}{x^3-y^3}+x}$$

$$\therefore\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=a=1\\ y=0}}=\frac{\frac{3}{1-0}-0}{\frac{0}{1-0}+1}=\frac{3-0}{0+1}=3.$$