2013학년도 수능 준비

수리영역의 Lady
(수학Ⅱ, 적분과 통계, 기하와 벡터)

2012 EBS 최종점검
박숙녀의 수리 가형

박숙녀쌤의 천기누설

<이 책의 차례>

1강. 방정식과 부등식 ······ 3
2강. 삼각함수 ······ 6
3강. 함수의 극한 ······ 9
4강. 함수의 연속 ······ 12
5강. 미분계수와 도함수 ······ 15
6강. 여러 가지 함수의 미분법과 도함수 ······ 18
7강. 도함수의 활용(1) ······ 21
8강. 도함수의 활용(2) ······ 24
9강. 도함수의 활용(3) ······ 27
10강. 부정적분과 정적분 ······ 30
11강. 정적분으로 표현된 함수 ······ 33
12강. 정적분의 활용 ······ 36
13강. 순열과 조합 ······ 39
14강. 확률의 뜻과 활용 ······ 42
15강. 조건부확률과 독립시행 ······ 45
16강. 이산확률변수와 이항분포 ······ 48
17강. 연속확률분포와 정규분포 ······ 51
18강. 통계적 추정 ······ 54
19강. 일차변환의 뜻과 여러 가지 일차변환 ······ 57
20강. 일차변환의 합성과 역변환 ······ 60
21강. 포물선 ······ 63
22강. 타원 ······ 66
23강. 쌍곡선 ······ 69
24강. 공간도형 ······ 72
25강. 공간좌표 ······ 75
26강. 벡터의 뜻과 성분과 내적 ······ 78
27강. 공간도형에서 직선과 평면의 방정식 ······ 81

Tip

간단한 분수방정식의 풀이

1 수능완성 수Ⅱ 5P 3번

분수방정식 $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}=k$의 모든 실근의 합이 2일 때, 상수 k의 값은? (단, $k \neq 0$)

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

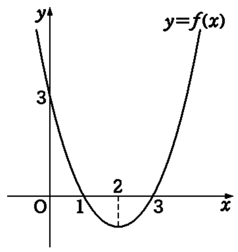
Sol

Tip

분수방정식, 무리방정식과 함수의 그래프

2 수능완성 수Ⅱ 10P 17번

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 무리방정식 $\sqrt{f(x)-2}+f(x)=4$의 모든 근의 합은?



① -4
② -2
③ 0
④ 2
⑤ 4

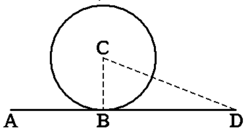
Sol

Tip

분수방정식, 무리방정식의 활용

3 특강 수Ⅱ 14P 5번

어느 공원에는 그림과 같이 직선 AD의 조깅코스와 원 모양의 조깅코스가 있는데, 각각의 길이는 7km, 2πkm이고 두 코스는 B지점에서 한 번 만난다. 원의 중심을 지나는 새로운 조깅코스 A－B－C－D를 만들었더니 그 길이 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$가 총 6km라고 할 때, 두 지점 A, B 사이의 거리를 구하면? (단, 조깅코스의 폭은 무시한다.)



① $\frac{17}{4}$ ② $\frac{19}{4}$
③ $\frac{21}{4}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ $\frac{25}{4}$

Sol

Tip

분수부등식의 풀이

4 수능완성 수Ⅱ 15P 9번

자연수 n에 대하여 $a_n = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}$일 때, $a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_k > 2013$을 만족시키는 양의 정수 k의 최솟값은?

① 8050 ② 8052 ③ 8054
④ 8056 ⑤ 8058

Sol

Tip

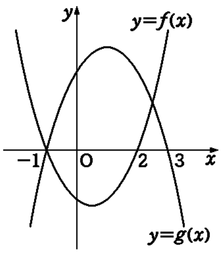
분수부등식과 함수의 그래프

5

수능완성 수Ⅱ 18P 16번

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 분수부등식 $\dfrac{g(x+1)}{f(x-1)} \geq 0$을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5



Sol

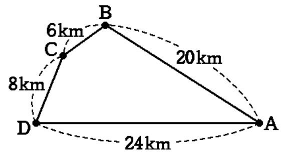
Tip

분수방정식, 무리방정식과 함수의 그래프

6

수능완성 수Ⅱ 23P 8번

갈은 그림과 같이 어느 관광지의 A지점에서 출발하여 B지점을 거쳐 C지점까지 시속 $x$km의 일정한 속력으로 자전거를 타고 간 후 자전거의 속도를 시속 4km만큼 줄인 후 D지점에 도착하였다. 이때, 걸린 시간을 측정해보니 A지점에서 D지점까지 직선거리를 A지점에서 C지점으로 갈 때의 자전거의 속력의 3배의 속력으로 일정하게 자동차로 이동하였을 때보다 2시간 30분이 더 걸렸다. 자동차의 속력을 구하시오. (단, 속력의 단위는 km/시이다.)



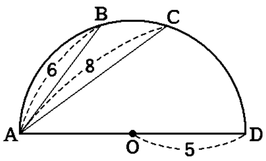
Sol

Tip	사인과 코사인의 덧셈정리

Tip	탄젠트의 덧셈정리

1 수능완성 수Ⅱ 28P 9번

그림과 같이 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 반원 위의 네 점 A, B, C, D에 대하여 $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$일 때, $\overline{BC}=\frac{q}{p}$이다. pq의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



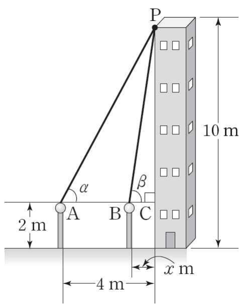
① 50 ② 60 ③ 70 ④ 80 ⑤ 90

2 수능완성 수Ⅱ 29P 14번

그림과 같이 지면에서 높이가 2m인 가로등을 지면에서 높이가 10m인 건물로부터 각각 4m, xm 떨어진 지점에서 설치하였다. 가로등의 등 윗부분을 각각 점 A, B라 하고, 2개의 가로등의 등 윗부분을 연결한 직선과 건물이 만나는 점을 C라 하자. $\angle PAC=\alpha$, $\angle PBC=\beta$라 할 때, $\tan(\alpha+\beta)=-1$이다.

이때, x의 값은?

(단, $0<x<4$)



① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$

④ 2 ⑤ $\frac{8}{3}$

Sol

Sol

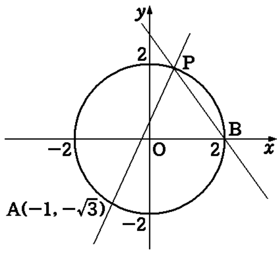
Tip

두 직선이 이루는 각의 크기

3

특강 | 수Ⅱ 39P 2번

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=4$ 위에 두 점 $A(-1,-\sqrt{3})$, $B(2,\ 0)$이 있다. 제1사분면에서 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 직선 AP의 기울기를 $1+\sqrt{3}$이라 할 때, 두 점 P, B를 지나는 직선의 기울기를 바르게 나타낸 것은?



① $4-\sqrt{3}$
② $4-2\sqrt{3}$
③ $4-3\sqrt{3}$
④ $4-4\sqrt{3}$
⑤ $4-5\sqrt{3}$

Sol

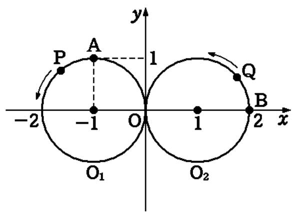
Tip

삼각함수의 합성

4

수능완성 | 수Ⅱ 31P 21번

그림과 같이 두 점 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 1인 두 원 O_1, O_2가 원점에서 접하고 있다. 원 O_1 위의 점 P는 점 $A(-1,\ 1)$에서 출발하여 원 O_1 위를 시계 반대 방향으로 매초 1의 일정한 속력으로 움직이고 있고, 원 O_2 위의 점 Q는 점 $B(2,\ 0)$에서 출발하여 원 O_2 위를 시계 반대 방향으로 매초 1의 일정한 속력으로 움직이고 있다. 두 점 P, Q가 두 점 A, B를 각각 출발하여 각각 두 원 O_1, O_2 위를 움직일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값이 $m+n\sqrt{2}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오.



Sol

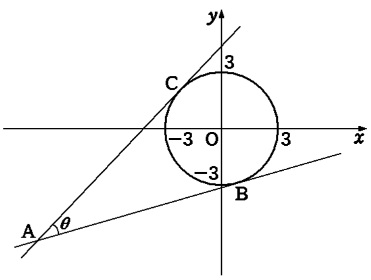
Tip

삼각함수의 여러 가지 공식
반각, 배각, 곱을 합 차로

5

수능완성 | 수Ⅱ 34P 8번

그림과 같이 점 A에서 원 $x^2+y^2=9$에 접선을 그을 때 생기는 두 접점을 각각 B, C라 하고, $\angle BAC=\theta$라 하자. $\sin^2\frac{\theta}{4}=\frac{1}{10}$일 때, 삼각형 OBC의 넓이는? (단, $0<\theta<\pi$)



① $\frac{108}{25}$ ② $\frac{52}{5}$ ③ $\frac{112}{25}$ ④ $\frac{114}{25}$ ⑤ $\frac{116}{25}$

Sol

Tip

삼각방정식의 일반해

6

특강 | 수Ⅱ 50P 5번

$0\le x\le 10\pi$ 에서 방정식

$$\cos 2x+3\sin x-2=0$$

의 실근의 개수는?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

Sol

EBSi

Tip

함수의 극한값 계산

1

수능완성 수Ⅱ 45P 1번

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}{2x} = \frac{1}{4}$이 성립할 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Sol

Tip

함수의 극한에 대한 성질

2

수능완성 수Ⅱ 47P 8번

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(2x+1)f(x)}{x^3+3x} = 8$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-1)\{f(x)+1\}}{x^2-4} = 8$$

을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은?

① 71 ② 73 ③ 75 ④ 77 ⑤ 79

Sol

Tip

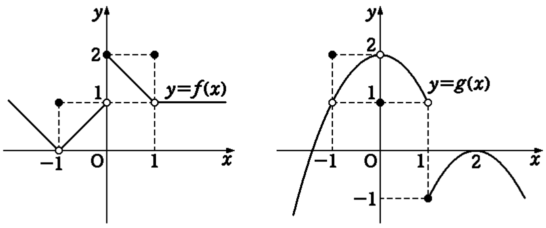
함수의 그래프와 극한

Tip

삼각함수의 극한

3 특강 수Ⅱ 48P 13번

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $\lim_{x \to 0} g(f(x)) = 0$ ㄴ. $\lim_{x \to 1} f(g(x)) = 1$

ㄷ. $\lim_{x \to 2} g(g(x)) = 2$

①ㄱ ②ㄷ ③ㄱ, ㄴ ④ㄴ, ㄷ ⑤ㄱ, ㄴ, ㄷ

4 특강 수Ⅱ 59P 예제 4번

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 4x \sin(\sin 2x)}{1 - \cos x}$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

Sol

Sol

Tip

지수, 로그함수의 극한

5 수능완성 수Ⅱ 51P 21번

자연수 n에 대하여

$$f(n)=\ln\left\{\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n}\right)\right\}$$

이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} n^2 f(n^2)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

Sol

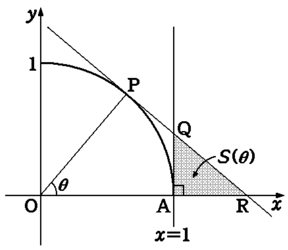
Tip

도형에서 극한값 구하기

6 특강 수Ⅱ 65P 4번

그림과 같이 제1사분면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 A$(1,\ 0)$에 대하여 $\angle\mathrm{POA}=\theta$라 하고, 점 P에서의 접선이 직선 $x=1$ 및 x축과 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. 삼각형 QAR의 넓이를 $S(\theta)$라고 할 때,

$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은?



① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{1}{12}$

③ $\frac{1}{10}$ ④ $\frac{1}{8}$

⑤ $\frac{1}{6}$

Sol

Tip

함수의 연속성

1

수능완성 수Ⅱ 53P 3번

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3 & (x<3) \\ 4-x & (x \ge 3) \end{cases},\quad g(x)=x^2+kx$$

에 대하여 합성함수 $g(f(x))$가 모든 실수 x에서 연속일 때, 상수 k의 값은?

① -7 ② -5 ③ -3 ④ -1 ⑤ 0

Sol

Tip

함수의 극한과 연속성

2

수능완성 수Ⅱ 55P 7번

다항함수 $f(x)$와 모든 실수 x에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-x^2}{x-3} & (x \ne 3) \\ a & (x=3) \end{cases}$$

이고 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=3$일 때, $a+f(3)$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

Sol

Tip

극한으로 나타내어진 함수의 연속성

3

수능완성 수Ⅱ 모의고사 37P 5회 12번

자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$$

와 같이 정의된다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

(가) $-1\le x<1$일 때, $g(x)=x$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(x+2)$

보기

ㄱ. $\lim_{x\to1}g(f(x))=-1$

ㄴ. 함수 $\{f(x)+g(x)\}$는 $x=-1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)\{g(x)+a\}$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 실수 a가 존재하지 않는다.

①ㄱ ②ㄴ ③ㄱ, ㄷ ④ㄴ, ㄷ ⑤ㄱ, ㄴ, ㄷ

Sol

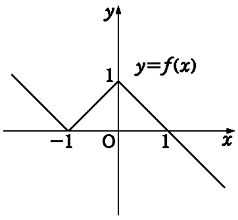
Tip

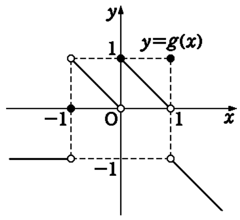
그래프로 나타내어진 함수의 연속성

4

수능완성 수Ⅱ 63P 8번

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.





이때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{x\to0}(g\circ f)(x)=1$

ㄴ. 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

①ㄱ ②ㄴ ③ㄱ, ㄷ ④ㄴ, ㄷ ⑤ㄱ, ㄴ, ㄷ

Sol

Tip

중간값의 정리와 최대·최소 정리

5 특강 수Ⅱ 73P 예제 4번

보기의 방정식 중 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $x^3-3x+1=0$

ㄴ. $x+\ln(4+x)-1=0$

ㄷ. $2x+\sin\pi x-1=0$

①ㄴ ②ㄷ ③ㄱ, ㄴ ④ㄱ, ㄷ ⑤ㄱ, ㄴ, ㄷ

Sol

Tip

불연속점의 개수 구하기

6 특강 수Ⅱ 77P 2번

실수 a에 대하여 x의 방정식 $x^2-2ax+a=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $f(a)$라고 할 때, 함수 $y=f(a)$가 불연속인 점의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Sol

Tip

평균변화율

Tip

미분계수를 이용한 극한값의 계산

1 수능완성 수Ⅱ 65P 3번

함수 $f(x)=\frac{x}{1-x}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(f\circ f\circ f)(x)$$

로 정의한다. 함수 $g(x)$에 대하여 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

① 50 ② 52 ③ 54 ④ 56 ⑤ 58

2 수능완성 수Ⅱ 67P 9번

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\,-1)$에서의 접선과 직선 $y=\frac{1}{2}x-5$가 서로 수직일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{6}\left\{f\left(2-\frac{1}{3n}\right)+1\right\}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{2}{11}$

Sol

Sol

Tip

미분가능성과 연속성

3

특강 | 수Ⅱ 83P 예제 2번

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이고 미분가능하지 않을 때, 다음 보기의 함수 중 $x=0$에서 미분가능한 것을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $y=xf(x)$

ㄴ. $y=x^3f(x)$

ㄷ. $y=\dfrac{1}{1-xf(x)}$

①ㄱ ②ㄷ ③ㄱ, ㄴ ④ㄴ, ㄷ ⑤ㄱ, ㄴ, ㄷ

Sol

Tip

도함수 및 미분법의 공식

4

수능완성 | 수Ⅱ 69P 15번

함수 $f(x)=x^2+ax+3$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{10} f'(n)=\alpha,\ f'(5)=\beta$$

라 할 때, $\alpha=2\beta$가 성립한다. 이때, 상수 a의 값은?

① $-\dfrac{46}{5}$ ② $-\dfrac{45}{4}$ ③ $-\dfrac{44}{3}$ $-\dfrac{43}{2}$ ⑤ -21

Sol

Tip

미분계수를 이용한 미정계수의 결정

5 수능완성 수Ⅱ 70P 17번

함수 $f(x)=ax^3+bx^2+x-2$가

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{h}=3$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\frac{9}{4}$$

를 만족시킬 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

Sol

Tip

함수의 미분가능성

6 수능완성 수Ⅱ 71P 21번

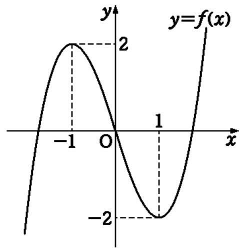
미분가능한 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $g(x)=x^2f(x-1)$이라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(1)g'(1)<0$

ㄴ. $f'(0)g(1)<0$

ㄷ. $\dfrac{g(2)}{2}>g'(2)$



① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Sol

Tip

몫의 미분법

Tip

음함수의 미분법

1 수능완성 수Ⅱ 73P 2번

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{g(x)-1}{g(x)+1}$이고, $f'(1)=3$, $g'(1)=24$일 때, $g(1)$의 값은? (단, $g(x)>-1$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2 수능완성 수Ⅱ 모의고사 42P 6회 4번

좌표평면에서 곡선 $\sin y=x^2$위의 점 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 기울기는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Sol

Sol

Tip

역함수의 미분법

3

특강 | 수Ⅱ 97P 10번

$x \geq 0$에서 정의된 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=1$$

을 만족시킨다. 함수 $f(2x)$의 역함수를 $g(x)$라 고 할 때, $120g'(3)$의 값을 구하시오.

Sol

Tip

삼각함수의 도함수

4

수능완성 | 수Ⅱ 81P 1번

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5+x)^2-\sin 25}{x}$$ 의 값은?

① $\cos 25$　② $\sin 25$　③ 5　④ $10\cos 25$　⑤ $10\sin 25$

Sol

Tip

지수, 로그함수의 도함수

5

수능완성 | 수Ⅱ 84P 15번

함수 $f(x)=(e^x+1)(e^{2x}+1)\cdots(e^{nx}+1)$에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f(x)}$의 값을 $g(n)$이라 하자. $g(40)$의 값을 구하시오.

Sol

Tip

이계도함수

6

수능완성 | 수Ⅱ 85P 17번

이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$는 모든 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=e^y f(x)+e^x f(y)$$

를 만족시키고 $f'(0)=25$일 때, $f''(0)$의 값을 구하시오.

Sol

Tip

곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

1 특강 | 수Ⅱ 114P 2번

곡선 $y=e^x$에 접하고 기울기가 e인 접선이 점 $(a,\ 10e)$를 지날 때, 상수 a의 값은?
(단, e는 자연로그의 밑이다.)

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

Sol

Tip

기울기가 주어진 접선의 방정식

2 수능완성 | 수Ⅱ 89P 7번

두 곡선 $y=e^x$과 $y=x^2$에 대하여 기울기가 1인 접선의 방정식을 각각 $y=x+a$, $y=x+b$라 할 때, $a-4b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Sol

Tip

매개변수로 나타내어진 함수에서의 접선의 방정식

3

수능완성 수Ⅱ 90P 11번

매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t$$

에 대하여 $t = \frac{\pi}{2}$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

Sol

Tip

곡선 밖의 점에서의 접선의 방정식

4

수능완성 수Ⅱ 91P 14번

점 $(2,\ 2)$를 지나고 곡선 $y = \frac{x}{x+1}$에 접하는 직선은 2개 있다. 이 두 접선의 이루는 예각을 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{9}{5}$ ⑤ $\frac{11}{5}$

Sol

Tip

두 곡선이 공통접선을 가질 조건

5

특강 | 수Ⅱ 121P 8번

두 곡선 $y=e^{x-b}$, $y=\ln x+1$이 $x=a$에서 공통접선을 가질 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Sol

Tip

평균값의 정리

6

수능완성 | 수Ⅱ 93P 20번

함수 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$에 대하여 집합 A를

$$A=\left\{a \,\middle|\, a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},\ 2\le x_1<x_2\le 3\right\}$$

으로 정의할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $-3\in A$ ② $-1\in A$ ③ $0\in A$
④ $1\in A$ ⑤ $3\in A$

Sol

Tip

함수의 증가와 감소

Tip

함수의 극댓값과 극솟값

1

수능완성 수Ⅱ 95P 2번

함수 $f(x) = -x - 2\cos x$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f'(0) = -1$

ㄴ. 구간 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$에서 $f'(x) > 0$이다.

ㄷ. 구간 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right)$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2

수능완성 수Ⅱ 97P 7번

삼차함수 $y = f(x)$에 대하여 $f(1) = f(2) = f(3)$이고 $x = \alpha$와 $x = \beta$에서 극값을 가질 때, $3(\alpha^2 + \beta^2)$의 값을 구하시오.

Sol

Sol

Tip

함수의 오목, 볼록, 변곡점

3

특강 수Ⅱ 135P 8번

함수 $f(x)=\ln(1+x^2)$의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$는 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 위로 볼록하다.

ㄷ. 두 변곡점에서의 접선은 서로 수직이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Sol

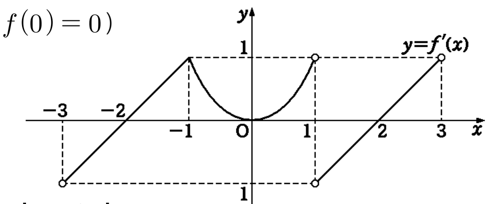
Tip

함수의 그래프

4

수능완성 수Ⅱ 99P 15번

$-3<x<3$에서 연속인 함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $f(0)=0$)



보기

ㄱ. $\lim_{x\to 1-0} f'(x)=1$

ㄴ. $f(-2)<0$

ㄷ. 구간 $(-3,\ 3)$에서 함수 $f(x)$는 오직 2개의 극값을 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Sol

Tip

함수의 최댓값과 최솟값

5 수능완성 수Ⅱ 100P 18번

함수 $f(x)=\dfrac{x^3}{x-2}$ $(x>2)$은 $x=a$에서 최솟값 m을 가진다. 이 때, 두 실수 a, m에 대하여 am의 값을 구하시오.

Sol

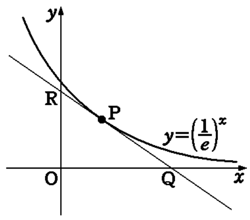
Tip

도형에서의 미분의 활용

6 수능완성 수Ⅱ 101P 19번

곡선 $y=\left(\dfrac{1}{e}\right)^x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 Q, R라 한다. 삼각형 OQR의 넓이가 최대일 때, 실수 a의 값은? (단, 점 O는 원점이고, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)

① $\dfrac{1}{e}$ ② $\dfrac{2}{e}$
③ e ④ 1
⑤ 2



Sol

Tip

방정식에의 활용

1

수능완성 수Ⅱ 103P 2번

x에 대한 방정식 $e^x - x - 70 + n = 0$이 서로 다른 두 실근을 가지도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오.

Sol

Tip

부등식에의 활용

2

특강 수Ⅱ 141P 3번

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4 - 2x^2 + a \geq 0$이 항상 성립하도록 하는 실수 a의 범위는?

① $a > 1$ ② $a \geq 1$ ③ $1 < a < 2$
④ $a \geq 2$ ⑤ $a > 2$

Sol

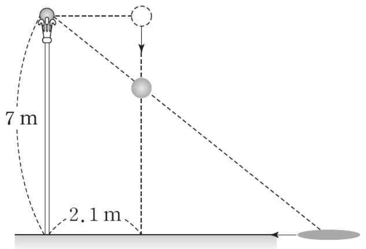
Tip

속도와 가속도(1)-수직선 위의 운동

3

수능완성 수Ⅱ 105P 8번

그림과 같이 높이가 $7\,\mathrm{m}$인 가로등이 빛을 비추고 있고 이 가로등으로부터 $2.1\,\mathrm{m}$ 떨어진 곳에서 가로등과 같은 높이에 있는 공을 떨어뜨렸다. t초 후에 공이 낙하한 거리가 $4.9t^2\,\mathrm{m}$일 때, 공을 떨어뜨린 후 0.5초가 되는 순간에 공의 그림자가 움직이는 속도는 $v\,\mathrm{m}$/초이다. 이때, $|v|$의 값을 구하시오. (단, 공의 크기는 무시한다.)



Sol

Tip

속도와 가속도(2)-평면 위의 운동

4

수능완성 수Ⅱ 106P 11번

좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=\cos t,\ y=\sin t-4\cos t$일 때, 점 P의 속력의 최댓값은?

① $1+\sqrt{5}$ ② $2+\sqrt{5}$ ③ $2+\sqrt{3}$
④ $3+\sqrt{3}$ ⑤ $1+2\sqrt{3}$

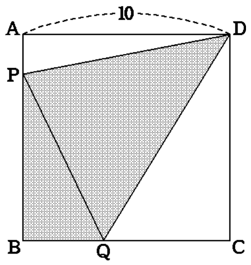
Sol

Tip

넓이의 변화율

5 수능완성 수Ⅱ 107P 필수유형

그림과 같이 한 변의 길이가 10인 정사각형 ABCD에서 점 P는 점 A에서 출발하여 변 AB 위를 매초 1씩 움직여 점 B까지, 점 Q는 점 B에서 점 P와 동시에 출발하여 변 BC 위를 매초 2씩 움직여 점 C까지 간다. 사각형 DPBQ의 넓이가 60가 되는 순간의 삼각형 PBQ의 넓이의 시간(초)에 대한 변화율은?



① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

Sol

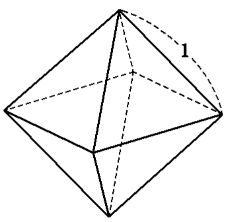
Tip

부피의 변화율

6 수능완성 수Ⅱ 107P 13번

그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정팔면체가 있다. 각 모서리의 길이가 매초 2씩 증가할 때, 모서리의 길이가 9이 되는 순간 부피의 변화율은?

① $112\sqrt{2}$
② $134\sqrt{2}$
③ $147\sqrt{2}$
④ $155\sqrt{2}$
⑤ $162\sqrt{2}$



Sol

Tip

부정적분과 미분의 관계

Tip

지수함수와 로그함수의 부정적분

1 수능완성 적통 5P 2번

함수 $f(x)=\int(2x^3+3x+5)\,dx$일 때,

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2+3x-4}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

2 수능완성 적통 9P 13번

함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=\ln 2\int 4^x\,dx$이고

$f(1)=2$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{f(n)}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

Sol

Sol

Tip

정적분의 성질을 이용한 정적분

3

수능완성 | 적통 14P 필수유형

함수 $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x} & (x>0)\\ e^{x}+a & (x\le 0)\end{cases}$가 실수 전체에서 연속일 때, $\int_{-a}^{2} f(x)\,dx-\int_{a}^{2} f(x)\,dx$의 값은? (단, a는 상수이고, e는 자연로그의 밑이다.)

① $\frac{1}{e}-\frac{3}{4}$ ② $\frac{1}{e}-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{e}-\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{4}-\frac{1}{e}$ ⑤ $\frac{1}{4}-\frac{1}{e}$

Sol

Tip

치환을 이용한 정적분

4

특강 | 적통 55P 1번

함수 $f(x)=x^{3}+x$에 대하여 정적분 $\int_{0}^{2}\frac{2f^{-1}(x)}{f'(f^{-1}(x))}dx$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Sol

Tip

부분적분법을 이용한 정적분

5 수능완성 적통 17P 13번

자연수 n에 대하여 $a_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos(2nx)\,dx$라 할 때, $\frac{1}{20}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_{2k-1}}$의 값을 구하시오.

Sol

Tip

그래프의 특성을 이용한 정적분

6 수능완성 적통 18P 17번

다음 조건을 만족하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 정적분 $\int_{1}^{3} f\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)dx$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(1-x)=f(1+x)$가 성립한다.
(나) $\int_{0}^{1}\{f(x)+f(2-x)\}\,dx=-4$
(다) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=0$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Sol

Tip

$\int_{a}^{x} f(t)dt$를 포함하는 함수

1

수능완성 적통 21P 2번

$x > -2$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = (x+2)f(x) - (x+1)^3 \quad (x > -2)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① $\ln 3$ ② $2\ln 3$ ③ $3\ln 3$
④ $4\ln 3$ ⑤ $5\ln 3$

Sol

Tip

$\int_{a}^{x} xf(t)dt$를 포함하는 함수

2

수능완성 적통 23P 6번

미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(0) = \dfrac{1}{2}$이고,

$$2xf(x) = xe^x + \int_{0}^{x} (x+t)f'(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

① $2e - \dfrac{1}{2}$ ② $2e + \dfrac{1}{2}$ ③ $3e - \dfrac{1}{2}$
④ $3e + \dfrac{1}{2}$ ⑤ $4e - \dfrac{1}{2}$

Sol

Tip

$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$를 포함하는 함수

3

수능완성 적통 24P 9번

함수 $f(x)=\int_{\cos x}^{\sin x} t^2 dt$에 대하여 구간 $[0,\ \pi]$에서 $f(x)$가 극댓값을 갖는 x의 값을 a, 극솟값을 갖는 x의 값을 b라 할 때, $b-a$의 값은?

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{5}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

Sol

Tip

$\int_{a}^{b} f(t)dt$를 포함하는 함수

4

수능완성 적통 25P 13번

실수 전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고,

$$f'(x)=(x^2+2x)e^x+2\int_1^2 \frac{f(t)}{t}dt$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

① 0 ② $e-1$ ③ $e-2$
④ $2-e^2$ ⑤ $e-2e^2$

Sol

Tip	정적분으로 표현된 함수의 극한
5	수능완성 적통 25P 필수유형 $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_{2-x}^{2+x} \left(e^{t-2} \sin \frac{t}{4}\pi + t^2 - 2 \right) dt$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.) ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10
Sol	

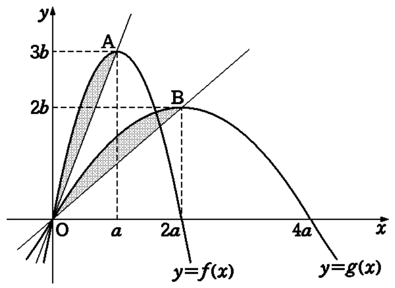
Tip	정적분을 이용한 무한급수의 합
6	특강 적통 54P 4번 무한급수 $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{k}{n} \right)^2 + 1 \right\}^5 \frac{12k}{n^2}$의 합을 구하시오.
Sol	

Tip

두 곡선 사이의 넓이

1 수능완성 적통 30P 6번

그림에서 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $y=c\sin dx$꼴의 삼각함수이고, 점 $\mathrm{A}(a,\ 3b)$, $\mathrm{B}(2a,\ 2b)$는 각각 함수 $f(x)$, $g(x)$의 극대점이다. 곡선 $y=f(x)$와 두 점 O, A를 지나는 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=g(x)$와 두 점 O, B를 지나는 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{q}{p}$이다. 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여 $p-q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, a, b, c, d는 양수이다.)



Sol

Tip

역함수의 그래프와 넓이

2 수능완성 적통 31P 8번

$1 \le x \le 2$에서 정의된 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 $f(1)=1$, $f(2)=2$를 만족한다. 함수 $f(x)$의 역함수가 (x)일 때, 곡선 $y=g(x)$와 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $30S$의 값을 구하시오.

Sol

Tip

단면을 이용한 입체도형의 넓이

3

수능완성 적통 34P 14번

좌표평면 위에 놓여 있는 어떤 입체도형을 x축 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)\left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}\right)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 두 변의 길이가 π, $\cos\sqrt{\pi x}$인 직사각형이다. 이 입체도형의 부피는?

① $\pi-2$ ② $2\pi-3$ ③ $3\pi-2$
④ $4\pi-4$ ⑤ $5\pi-3$

Sol

Tip

회전체의 부피

4

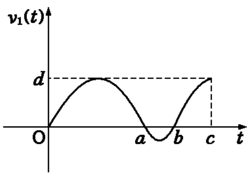
특강 적통 62P 6번

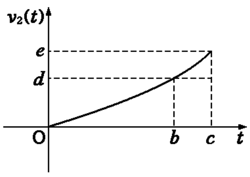
$y=|\ln x|$의 그래프와 직선 $y=\ln 2$로 둘러싸인 부분을 y축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피가 $\dfrac{a}{b}\pi$일 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.)

Sol

Tip	속도의 그래프와 점의 위치
5	수능완성 적통 38P 5번

원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 하면 $0 \le t \le c$에서 $v_1(t)$, $v_2(t)$를 나타내는 그래프는 그림과 같다.





$t = b$에서 두 점 P, Q의 위치가 같을 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $0 < a < b < c$, $0 < d < e$)

보기
ㄱ. 점 P는 출발 후 $t = c$일 때까지 방향을 세 번 바꾸었다.
ㄴ. $t = a$일 때, 점 P는 점 Q의 오른쪽에 있다.
ㄷ. $t = c$일 때, 점 P는 점 Q의 오른쪽에 있다.

①ㄱ ②ㄴ ③ㄱ, ㄷ ④ㄴ, ㄷ ⑤ㄱ, ㄴ, ㄷ

Sol

Tip	속도와 거리의 활용
6	수능완성 적통 41P 12번

곡선 $y^2 = 8x\ (0 \le y \le 10)$를 y축의 둘레로 회전시켜 만든 회전체 모양의 그릇에 물을 넣기 시작하고 t초가 지난 후 수면의 상승 속도가 $\dfrac{1}{\sqrt{t+1}}$(cm/초)이다. 그릇에 물을 넣기 시작하고 8초가 지난 후 그릇에 담긴 물의 양이 $\dfrac{q}{p}\pi\,\text{cm}^3$일 때, 서로소인 두 자연수 p, q의 곱 pq의 값은? (단, 좌표축의 눈금 단위는 cm이다.)

① 50 ② 60 ③ 70 ④ 80 ⑤ 90

Sol

Tip

중복순열

1

수능완성 적통 47P 2번

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(4)$는 3의 배수이다.
(나) $x \neq 4$이면 $f(x) \neq f(4)$이다.

함수 f의 개수는?

① ${}_5\Pi_5$ ② $2\times{}_5\Pi_5$ ③ ${}_6\Pi_6$
④ $2\times{}_6\Pi_6$ ⑤ ${}_7\Pi_6$

Sol

Tip

같은 것이 있는 경우의 순열

2

수능완성 적통 50P 10번

A, B, B, C, C, C, C의 7개의 문자에서 5개를 택하여 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건을 만족하도록 나열하는 경우의 수를 구하시오.

(가) A는 반드시 사용한다.
(나) 문자열의 처음과 끝은 같은 문자를 사용한다.

Sol

Tip

최단거리로 가는 경우의 순열

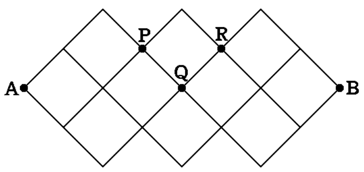
Tip

중복조합

3

수능완성 적통 51P 13번

그림과 같이 마름모 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 갈 때, 구간 PQ 또는 구간 QR를 거쳐서 최단거리로 가는 경우의 수를 구하시오.



4

특강 적통 91P 4번

모양과 크기가 같은 흰 바둑돌 4개, 검은 바둑돌 4개가 있다. 이 중에서 4개의 바둑돌을 택하여 그릇 A, B, C에 넣는 방법의 수를 구하시오.
(단, 같은 종류의 바둑돌은 서로 구별이 되지 않고 빈 그릇이 있을 수도 있다.)

Sol

Sol

Tip

이항정리

5

수능완성 적통 56P 12번

$f(x)=\left(2x^2+\frac{1}{2x}\right)^7$에 대하여 $\frac{df(x)}{dx}$의 x^4의 계수를 a라 하고, $\int f(x)\,dx$의 x^3의 계수를 b라 할 때, $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오.

Sol

Tip

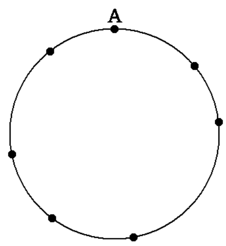
이항계수와 파스칼의 삼각형

6

수능완성 적통 59P 20번

원 위에 점 A를 포함하여 서로 다른 7개의 점이 있다. 이 점 중에서 n개를 이어서 n각형을 만들려고 한다. 점 A를 포함하는 n각형의 개수를 a_n, 점 A를 포함하지 않는 n각형의 개수를 b_n이라 할 때, $\sum_{n=3}^{6} a_n + \sum_{n=3}^{6} b_n$의 값을 구하시오.

(단, $3 \le n \le 6$)



Sol

Tip

수학적 확률

Tip

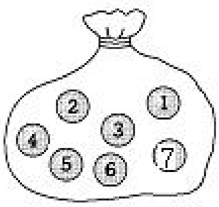
순열을 이용한 확률의 계산

1 수능완성 적통 65P 3번

그림과 같이 주머니에 1부터 7까지의 자연수가 적혀 있는 7개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 공에 적혀 있는 세 수를 세 변의 길이로 갖는 삼각형이 만들어질 확률은? (단, 모든 공은 크기와 모양이 같다.)

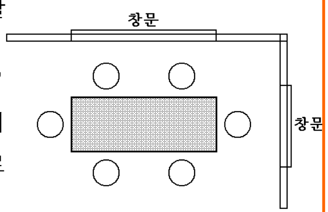
① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{7}{20}$ ⑤ $\frac{13}{35}$



2 수능완성 적통 66P 6번

어느 날 한웅이와 준호를 포함한 6명의 학생이 식당에서 그림과 같이 창가에 배치되어 있는 6인용 식탁에서 점심식사를 하였다. 다음 날 이 6명의 학생이 다시 이 식탁에서 임의로 한 자리씩을 택하여 점심식사를 할 때, 한웅이는 어제 점심식사 때 준호가 앉았던 자리에 앉고, 준호는 한웅이가 앉았던 자리에 앉지 못할 확률을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



Sol

Sol

Tip

배반사건의 확률

Tip

조합을 이용한 확률의 계산

3

특강 적통 94P 6번

서로 배반인 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}$일 때, $\mathrm{P}(\mathrm{B})$의 값은?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

Sol

4

수능완성 적통 67P 8번

남학생 3명과 여학생 3명이 참가한 토론대회에서 팀별 토론을 위해 임의로 2명씩 3개의 조를 만들 때, 각 조가 모두 남학생 1명과 여학생 1명으로 구성될 확률을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

Sol

Tip

확률의 덧셈 정리

5

특강 | 적통 97P 4번

1부터 9까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 세 수를 동시에 선택할 때, 나온 수의 최솟값이 4이거나 최댓값이 7일 확률은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{23}{84}$ ③ $\frac{31}{84}$ ④ $\frac{10}{21}$ ⑤ $\frac{25}{42}$

Sol

Tip

여사건을 이용한 확률의 계산

6

수능완성 | 적통 69P 15번

6명의 학생이 가위바위보를 한다. 한 번의 시행에서 승부가 나지 않을 확률은 $\frac{q}{p}$일 때, 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여 $p-q$의 값을 구하시오. (단, 승부가 나지 않는 것은 이기는 사람이 한 명도 없을 때이다.)

Sol

Tip

조건부확률

Tip

확률의 곱셈정리 (독립)

1 수능완성 적통 72P 4번

남자 회원이 30명, 여자 회원이 20명인 어떤 산악회는 등반 행사를 계획하였다. 이 등반 행사에 참여한 산악회 회원은 남자가 18명, 여자가 a명이었다. 이 산악회에서 임의로 한 명의 회원을 뽑았더니 이 등반 행사에 참여한 회원이었을 때, 그 회원이 남자 회원일 확률은 $\frac{9}{16}$이다. 이때, a의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④18 ⑤ 20

2 수능완성 적통 73P 9번

유진이와 혜진이를 포함한 7명의 학생이 영화를 관람하기 위해 그림과 같이 7자리를 예약했다.

A열	10	11	12	
B열	10	11	12	13

7명의 임의로 7장의 티켓을 나눠 가질 때, 유진이와 혜진이가 같은 열에 이웃하여 앉을 확률을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

Sol

Sol

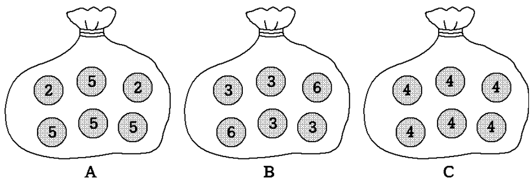
Tip

확률의 곱셈정리 (종속)

3

수능완성 적통 74P 12번

세 주머니 A, B, C에는 그림과 같이 숫자가 적혀 있는 공이 6개씩 들어 있다.



성재, 성윤, 재준이는 각각 주머니 A, B, C에서 임의로 한 개의 공을 꺼내 공에 적혀 있는 수를 비교하여 가장 큰 수를 뽑은 사람이 승자가 되는 게임을 한다. 이들 세 사람이 한 번의 게임을 할 때, 승자가 될 확률이 높은 사람과 가장 낮은 사람을 순서대로 나열하면? (단, 모든 공의 크기와 모양이 같다.)

① 성재, 재준 ② 성재, 성윤 ③ 성윤, 성재
④ 성윤, 재준 ⑤ 재준, 성윤

Sol

Tip

두 사건이 독립인 경우의 계산

4

수능완성 적통 75P 15번

두 사건 A 와 B 는 서로 독립이고

$$P(A\cup B)=\frac{3}{4},\ P(A)=\frac{1}{3}$$

일 때, $P(A\cap B^{C})$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

Sol

Tip

독립사건과 종속사건의 판별

5

수능완성 적통 76P 16번

1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 8장의 카드에서 임의로 한 장을 뽑을 때, 카드에 적힌 수가 2의 배수일 사건을 A, 3의 배수일 사건을 B, 4 이하일 사건을 C라 하자. 두 사건이 서로 독립인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. A와 B　　ㄴ. A와 C　　ㄷ. B와 C

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Sol

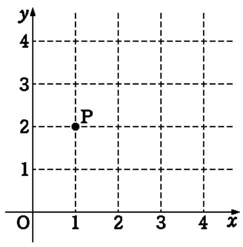
Tip

독립시행의 확률

6

수능완성 적통 77P 20번

좌표평면의 원점 위에 있는 점 P를 동전을 한 번 던져서 앞면이 나오면 x축 방향으로 1만큼, 뒷면이 나오면 y축 방향으로 1만큼 이동시킨다. 예를 들어, 동전을 세 번 던져서 앞면이 한 번, 뒷면이 두 번 나오면 점 P는 그림과 같이 $(1,\ 2)$에 놓이게 된다. 원점에 있던 점 P가 동전을 8번 던지는 시행 후에 x좌표와 y좌표가 서로 다른 점 위에 놓일 확률을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



Sol

Tip

이산확률변수와 확률분포

Tip

확률질량함수

1

수능완성 적통 83P 2번

남자 2명과 여자 4명으로 이루어진 어느 시사토론 모임에서 대표 2명을 정하기 위하여 제비뽑기를 하였다. 뽑힌 대표 중에서 여학생의 수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{P}(X \le 1)$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

Sol

2

수능완성 적통 85P 6번

이산확률변수 X 가 취하는 모든 값이 1, 2, 3, ⋯, 10이고 X 의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=\frac{k}{20x(x+1)} \quad (k\text{는 상수})$$

일 때, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)<\frac{1}{10}$을 만족시키는 x의 최솟값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

Sol

Tip

이산확률변수의 평균과 분산

3 수능완성 적통 87P 13번

확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	a	$2a$	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	b	1

확률변수 X의 평균이 $\frac{9}{4}$일 때, $E(4X^2)$의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

Sol

Tip

확률변수의 치환

4 수능완성 적통 89P 20번

세 명의 학생이 두 개의 선택과목 A, B 중에서 임의로 한 개의 과목을 선택할 때, A과목을 선택하는 학생의 수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 $4X+5$의 분산 $V(4X+5)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

Sol

Tip

이항분포를 따르는 확률변수

5

수능완성 | 적통 90P 23번

두 확률변수 X_1, X_2가 각각 이항분포 $B(50,\ p)$, $B\left(160,\ \frac{p}{2}\right)$를 따른다. X_1의 표준편차 $\sigma(X_1)$이 최대일 때, X_2의 분산 $V(X_2)$의 값은?

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

Sol

Tip

이항분포의 평균과 분산

6

특강 | 적통 126P 4번

이산확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x)={}_{30}C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{30-x}$$

(단, $x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 30$)

일 때, $\sum_{x=0}^{30} 9(x-10)^2 P(X=x)$의 값을 구하시오.

Sol

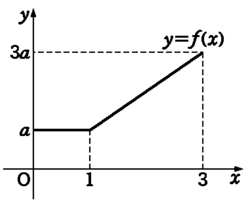
Tip

연속확률변수와 확률밀도함수

1 수능완성 적통 92P 2번

두 양수 a, b에 대하여 연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 3$이고 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.
$P(1 \le X \le b) = P(b \le X \le 3)$일 때,
$25a + 4b^2$의 값은?

① 24 ② 25
③ 26 ④ 27
⑤ 28



Sol

Tip

확률밀도함수의 평균과 분산

2 수능완성 적통 93P 4번

연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위는 $-1 \le X \le 1$이고 X 의 확률밀도함수는 $f(x) = a|x|$이다. 이때, $V(X)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

Sol

Tip

정규분포곡선의 성질

3

수능완성 적통 94P 7번

확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $P(X+1 \le m) = 0.5$

ㄴ. $P(a \le X \le a+2)$의 값이 최대일 때, $m-a=1$이다.

ㄷ. m의 값이 일정할 때, σ의 값이 커지면 $P(a \le X \le a+1)$의 값도 작아진다. (단, $m < a$)

①ㄱ ②ㄷ ③ㄱ, ㄴ ④ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Sol

Tip

정규분포의 표준정규분포화

4

수능완성 적통 96P 13번

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대한 확률밀도함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(50-x) = f(50+x)$를 만족한다.

$P(m \le X \le m+8) = 0.4772$일 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 $P(46 \le X)$의 값은?

① 0.8351
② 0.8413
③ 0.9104
④ 0.9270
⑤ 0.9710

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

Sol

Tip

정규분포의 활용

5

특강 | 적통 134P 4번

어느 회사에서 생산한 백열전구 100개의 수명은 평균이 1200시간, 표준편차가 50시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 100개의 백열전구 중에서 임의로 선택한 한 백열전구의 수명이 1300시간 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하면?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0228
② 0.1587
③ 0.4332
④ 0.9431
⑤ 0.9887

Sol

Tip

이항분포의 정규분포화

6

수능완성 | 적통 98P 18번

원점을 출발한 점 P가 수직선 위를 다음과 같은 방법으로 움직인다.

> 한 개의 주사위를 던져서 6의 약수인 눈의 수가 나오면 양의 방향으로 2만큼 움직이고, 그 외의 눈의 수가 나오면 음의 방향으로 1만큼 움직인다.

주사위를 162번 던지는 독립시행에서 점 P의 좌표가 189 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하면 $\dfrac{q}{p}$이다. 이때, $p-q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48

Sol

Tip

표본평균의 확률분포

1

수능완성 적통 100P 1번

모집단 $\{-2, -1, 1, 2\}$에서 임의로 크기가 2인 표본을 복원추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $P(|\overline{X}| \le 1)$의 값은?

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

Sol

Tip

표본평균의 평균과 분산

2

수능완성 적통 101P 6번

1, 1, 2, 4의 숫자가 각각 하나씩 적힌 네 개의 공이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 크기가 3인 표본을 복원추출할 때의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $V(\overline{X})$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

Sol

Tip

표본평균의 분포의 활용

3 수능완성 적통 104P 11번

어느 회사에 근무하는 직장인의 한 달 동안의 근무시간은 평균이 m시간, 표준편차가 3시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 근무하는 직장인 중 임의추출한 n명에 대한 한 달 동안의 근무시간의 평균을 $\overline{X}$ 라 하자.

$P(|\overline{X}-m| \le 1)=0.6826$을 만족시키는 표본의 크기 n의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

Sol

Tip

모평균의 추정

4 수능완성 적통 105P 16번

정규분포를 따르는 어느 모집단에서 평균을 추정하려고 한다. 이 모집단에서 크기 9인 표본을 임의추출하여 모평균 m을 신뢰도 99%로 추정한 신뢰구간이 [50.42, 55.58]이다. 또, 같은 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하여 모평균 m을 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간이 [52.76, 53.25]이다. 이때, n의 값을 구하시오.
(단, Z가 표준정규분포를 따를 때,
$P(0 \le Z \le 1.96)=0.475$,
$P(0 \le Z \le 2.58)=0.495$로 계산한다.)

Sol

Tip

표본비율의 분포

5

수능완성 | 적통 106P 19번

어느 도시 성인 중 20%가 A회사의 스마트폰을 사용한다고 한다. 이 도시에 사는 성인들 중에서 100명을 임의로 추출하였을 때, A회사의 스마트폰을 사용하는 사람이 30명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

① 0.8413
② 0.9332
③ 0.9710
④ 0.9772
⑤ 0.9938

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

Sol

Tip

모비율의 추정

6

특강 | 적통 147P 예제4

어느 홈쇼핑 업체에서 판매한 상품 중에서 20%가 음식에 대한 상품이라고 한다. 이 홈쇼핑 업체에서 판매한 상품 중 64개를 임의로 추출하였을 때, 음식에 대한 상품이 25% 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하면?

① 0.0028
② 0.0228
③ 0.0668
④ 0.1587
⑤ 0.3085

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

Sol

Tip

일차변환에 의한 점의 이동

Tip

일차변환을 나타내는 행렬

1 수능완성 기백 5P 4번

일차변환 f를 나타내는 행렬 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ -3 & b \end{pmatrix}$에 의하여 점 $(-1,\ 0)$이 제1사분면 위의 점으로 옮겨지고, 점 $(0,\ -1)$은 제3사분면 위의 점으로 옮겨진다. 일차변환 f에 의하여 점 $(-4,\ 2)$는 다음 중 어디로 옮겨지는가?

① x축 ② 제1사분면 ③ 제2사분면
④ 제3사분면 ⑤ 제4사분면

2 수능완성 기백 6P 필수유형

두 점 $(2,\ 1)$, $(1,\ 1)$을 각각 점 $(3,\ -1)$, $(-4,\ 2)$로 옮기는 일차변환 f에 의하여 점 $(-2,\ 3)$가 옮겨지는 점의 좌표를 $(m,\ n)$이라 할 때, $m+n$의 값은?

① -30 ② -26 ③ -22
④ -18 ⑤ -14

Sol

Sol

Tip

일차변환의 성질

3

수능완성 기벡 8P 13번

두 행렬 $P=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$에 대하여 일차변환 f가 $f(2P-Q)=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $f(P+3Q)=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$를 만족시킬 때, $f(2P-3Q)$는?

① $\begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

Sol

Tip

대칭변환

4

수능완성 기벡 11P 5번

점 P$(2,\ 3)$이 행렬 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$으로 나타내어지는 일차변환에 의하여 옮겨진 점을 Q, 점 Q가 행렬 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환에 의하여 옮겨진 점을 R라 하자. $\angle$QRP의 크기를 θ라 할 때, $\cot\theta$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Sol

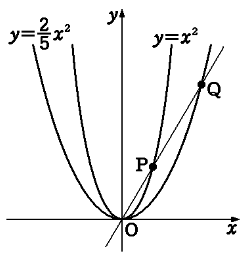
Tip

닮음변환

5

특강 | 기벡 10P 6번

그림은 좌표평면에서 두 이차함수 $y=x^2$, $y=\frac{2}{5}x^2$의 그래프를 나타낸 것이다. 원점을 지나고 기울기가 0이 아닌 직선이 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{2}{5}x^2$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 OP의 길이가 6일 때, 선분 PQ의 길이는? (단, O는 원점이다.)



① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

Sol

Tip

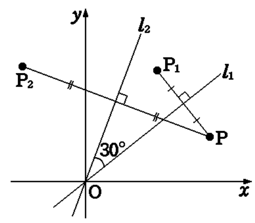
회전변환

6

특강 | 기벡 15P 3번

그림과 같이 좌표평면에서 원점을 지나는 두 직선 l_1, l_2가 이루는 예각의 크기가 $30°$이다. 두 점 P, $P_1(1, \sqrt{3})$은 직선 l_1에 대하여 대칭이고, 두 점 P, $P_2(a, b)$는 직선 l_2에 대하여 대칭이다. a^2+b^2의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5



Sol

Tip

일차변환의 합성

1

수능완성 기벡 16P 1번

두 일차변환

$$f:(x,\ y)\to(2x+y,\ ax+by)$$
$$g:(x,\ y)\to(cx+dy,\ x+y)$$

가 있다. 합성변환 $g\circ f$가 직선 $y=-x$에 대한 대칭변환일 때, 상수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $a^2+b^2+c^2+d^2$의 값을 구하시오.

Sol

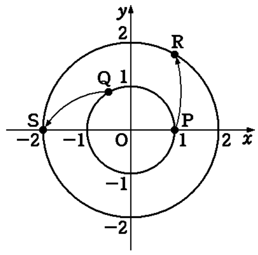
Tip

회전변환의 합성변환

2

수능완성 기벡 19P 12번

그림과 같이 일차변환 f에 의하여 원 $x^2+y^2=1$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(1,\ 0)$, $\mathrm{Q}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이 각각 원 $x^2+y^2=4$ 위의 두 점 $\mathrm{R}(1,\ \sqrt{3})$, $\mathrm{S}(-2,\ 0)$으로 옮겨진다. 합성변환 $f\circ f\circ f$에 의하여 점 $(-1,\ -1)$가 옮겨지는 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?



① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

Sol

Tip

일차변환의 역변환

3

수능완성 기벡 20P 14번

두 점 $(1,\ 2)$, $(3,\ 4)$를 각각 두 점 $(3,\ 4)$, $(1,\ 2)$로 옮기는 일차변환 f가 있다. f의 역변환 f^{-1}에 의하여 점 $(5,\ 6)$이 옮겨지는 점의 좌표는?

① $(-1,\ 0)$ ② $(-1,\ 1)$ ③ $(0,\ -1)$
④ $(0,\ 1)$ ⑤ $(1,\ -1)$

Sol

Tip

합성변환과 역변환에 의한 점의 이동

4

수능완성 기벡 21P 필수유형

두 일차변환

$$f:(x,\ y) \to (2x-3y,\ x-2y)$$
$$g:(x,\ y) \to (ax+by,\ cx+dy)$$

가 있다. 합성변환 $(g\circ f)^{-1}\circ g$에 의하여 점 $(p,\ q)$가 옮겨지는 점의 좌표는 $(2,\ -3)$이다. $p+q$의 값은? (단, $ad-bc\neq 0$)

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

Sol

Tip

일차변환에 의한 도형의 이동

5 특강 | 기벡 35P 8번

m이 정수일 때, 직선 $l: y=mx$는 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환에 의하여 다시 직선 l로 옮겨진다. 이때, 정수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Sol

Tip

역변환이 존재하지 않는 일차변환

6 수능완성 | 기벡 23P 27번

행렬 $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$으로 나타내어지는 일차변환 f에 의하여 원 $x^2+y^2=4$가 옮겨지는 도형의 길이 l은?

① $5\sqrt{2}$ ② $10\sqrt{2}$ ③ $15\sqrt{2}$
④ $20\sqrt{2}$ ⑤ $25\sqrt{2}$

Sol

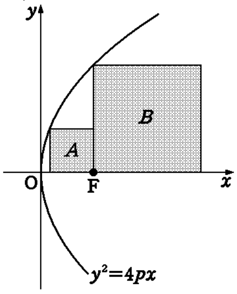
EBSi

Tip

포물선의 방정식

1 특강 | 기벡 45P 3번

그림과 같이 포물선 $y^2 = 4px\ (p > 0)$ 위의 한 점과 초점 F를 꼭짓점으로 하고 한 변이 x축 위에 있는 두 정사각형의 넓이를 각각 A, B라 할 때, $\frac{A}{B}$의 값은? (단, $A < B$)



① $\frac{1}{2}$　② $\sqrt{2}-1$　③ $\frac{1}{3}$　④ $2-\sqrt{3}$　⑤ $3-2\sqrt{2}$

Sol

Tip

두 포물선의 관계

2 수능완성 | 기벡 30P 필수유형

두 포물선 $y^2 = 8(x-a)$와 $y^2 = -4x$의 초점을 각각 F, F′이라 하자. 이 두 포물선의 준선이 일치할 때, 선분 FF′의 길이는?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

Sol

Tip

포물선 위의 점에서 초점과 준선까지의 거리 관계

3

수능완성 기벡 31P 7번

초점이 F인 포물선 $y^2=8x+16$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여
$\overline{AF}+\overline{BF}+\overline{CF}=15$일 때, 삼각형 ABC의 무게중심 G의 x 좌표는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

Sol

Tip

포물선과 직선의 위치 관계

4

수능완성 기벡 33P 13번

직선 $y=m(x+1)$과 포물선 $y^2=6x$의 교점의 개수를 $f(m)$이라 할 때,
$f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(-3)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Sol

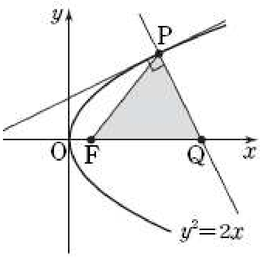
Tip

포물선의 접선

5

수능완성 | 수Ⅱ 실전편 3회 20P 9번

포물선 $y^2 = 2x$의 초점을 F라 하고, 제1사분면에 있는 포물선 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 PFQ의 넓이가 $\frac{5}{2}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?



① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

Sol

Tip

포물선과 접선의 활용

6

수능완성 | 기벡 35P 20번

초점이 F이고 준선이 l인 포물선 $x^2 = 8y$ 위의 서로 다른 두 점 X, Y에서의 두 접선이 점 $\mathrm{P}(1,\ -3)$에서 만난다. 두 점 X, Y에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, $(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}})^2$의 값을 구하시오.

Sol

Tip

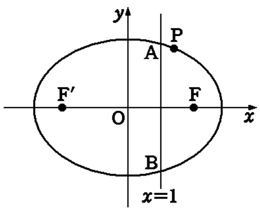
타원의 방정식

Tip

타원 위의 점에서 두 초점까지의 거리의 합

1 수능완성 기벡 37P 3번

그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 F$(2,\ 0)$, F$'(-2,\ 0)$에서의 거리의 합이 일정한 점들이 그리는 도형이 점 P$(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$을 지난다. 이 도형이 직선 $x=1$과 만나는 두 점을 A, B라 한다. 선분 AB의 길이를 l이라 할 때, l^2의 값을 구하시오.

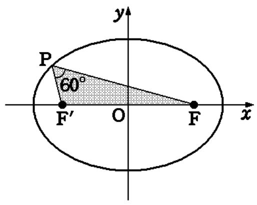


Sol

2 수능완성 기벡 39P 8번

초점이 F$(2,\ 0)$, F$'(-2,\ 0)$이고 점 $(0,\ 2)$를 지나는 타원 위의 점 P에 대하여 $\angle$FPF$'=60°$일 때, 삼각형 FPF$'$의 넓이를 S라 할 때, $9S^2$의 값은?

① 44 ② 45 ③ 46 ④ 47 ⑤ 48



Sol

Tip

타원 위의 점에서의 접선

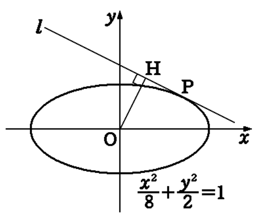
Tip

기울기가 m인 타원의 접선

3 특강 기벡 59P8번

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 제1사분면의 한 점 P에서의 접선을 l, 원점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 PH의 길이의 최댓값은?

① 1
② $\sqrt{2}$
③ $\sqrt{3}$
④ 2
⑤ $2\sqrt{2}$



Sol

4 수능완성 기벡 41P 14번

두 직선 $y=3x+a$와 $y=3x+b$가 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$에 모두 접할 때, $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$의 값을 구하시오. (단, $a>b$)

Sol

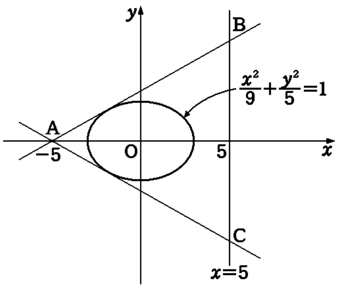
Tip

타원의 접선의 활용

5

수능완성 | 기벡 42P 18번

그림과 같이 점 A$(-5, 0)$에서 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$에 그은 두 접선이 직선 $x=5$와 만나는 두 점을 각각 B, C라 하자. 선분 BC의 길이를 l이라 할 때, l^2의 값을 구하시오.



Sol

Tip

타원의 활용 문제

6

수능완성 | 기벡 43P 필수유형

포물선 $y^2=8x$와 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{8}=1$의 교점 중 제1사분면에 있는 점을 A라 하자. 점 A를 지나고 포물선 $y^2=8x$와 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{8}=1$에 접하는 두 직선이 서로 수직이 되도록 상수 a의 값은? (단, $a>0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Sol

Tip

쌍곡선의 방정식

1 수능완성 기벡 45P 2번

양수 k에 대하여 쌍곡선

$$4x^2-9y^2-8x+18ky+4=0$$

의 주축의 길이가 4이고 중심의 좌표가 $(a,\ b)$이다. 세 상수 $k,\ a,\ b$의 곱 abk의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

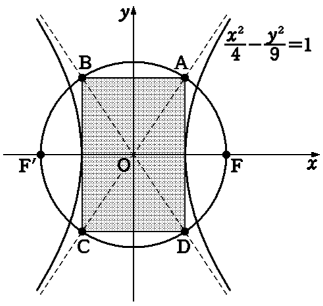
Sol

Tip

쌍곡선의 점근선

2 수능완성 기벡 47P 10번

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점 F, F′에 대하여 선분 FF′을 지름으로 하는 원 C가 쌍곡선의 점근선과 만나는 네 점을 A, B, C, D라 할 때, 사각형 ABCD의 넓이를 구하시오.



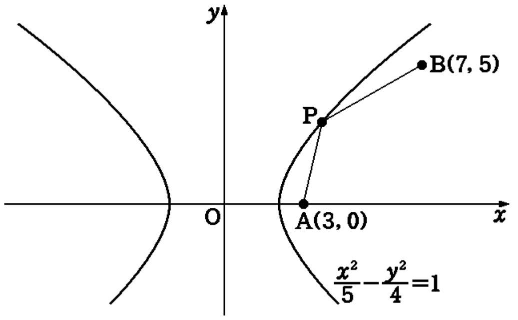
Sol

Tip

쌍곡선 위의 점과 초점 사이의 거리

3 수능완성 기벡 49P 15번

쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$에서 제1사분면 위의 점 P와 두 점 A$(3,\ 0)$, B$(7,\ 5)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값을 k라 할 때, k^2의 값을 구하시오.



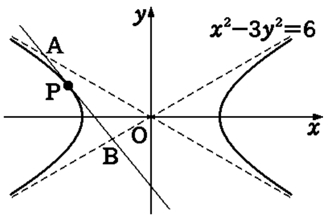
Sol

Tip

쌍곡선의 접선의 방정식

4 특강 기벡 76P 3번

쌍곡선 $x^2-3y^2=6$ 위의 한 점 P$(-3,\ 1)$에서의 접선이 쌍곡선의 두 점근선과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



Sol

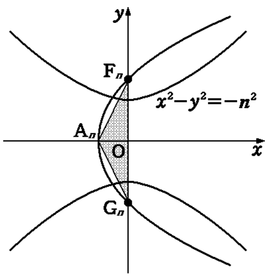
Tip

쌍곡선과 포물선

5 수능완성 기벡 51P 22본

그림과 같이 자연수 n에 대하여 쌍곡선 $x^2-y^2=-n^2$의 두 초점을 F_n, G_n이라 하고 두 점 F_n, G_n을 지나고 원점이 초점인 포물선의 꼭짓점을 A_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{G}_n\mathrm{F}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때,

$\sum_{k=1}^{10} S_k$의 값을 구하시오. (단, 점 A_n의 x 좌표는 음수이다.)



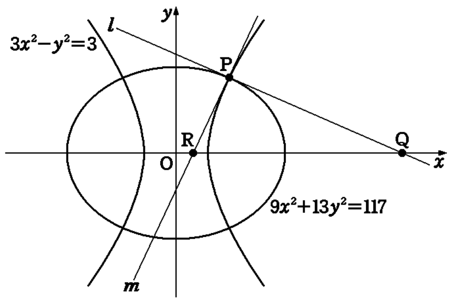
Sol

Tip

쌍곡선과 타원

6 수능완성 기벡 54P 8번

타원 $9x^2+13y^2=117$과 쌍곡선 $3x^2-y^2=3$이 제1사분면 위의 점 P에서 만난다. 점 P를 지나고 타원에 접하는 직선을 l, 점 P를 지나고 쌍곡선에 접하는 직선을 m이라 하자. 직선 l, m이 x축과 만나는 점을 각각 Q, R라 할 때, $\overline{\mathrm{OQ}}\cdot\overline{\mathrm{OR}}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



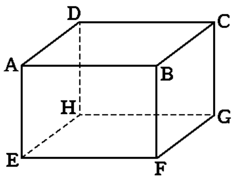
Sol

Tip

공간에서의 직선, 평면의 위치 관계

1 수능완성 기벡

그림과 같은 직육면체 $ABCD-EFGH$의 모서리와 면에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. 서로 만나는 두 모서리를 모두 포함하는 면과 평행한 면은 반드시 한 개 존재한다.

ㄴ. 서로 다른 두 면과 모두 만나는 면은 항상 두 개 존재한다.

ㄷ. 한 면과 평행한 두 모서리를 반드시 서로 평행하다.

①ㄱ ②ㄴ ③ㄱ, ㄷ ④ㄴ, ㄷ ⑤ㄱ, ㄴ, ㄷ

Sol

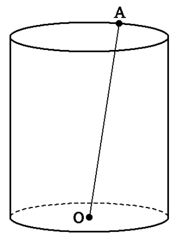
Tip

직선과 직선, 직선과 평면이 이루는 각

2 수능완성 기벡 59P 필수유형

높이가 12인 원기둥이 있다. 그림과 같이 한 밑면의 둘레 위의 점 A에서 다른 밑면의 중심 O에 그은 선분이 밑면과 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$일 때, 한 밑면의 넓이는?

$\left(\text{단, } 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$



① π ② 4π

③ 9π ④ 16π

⑤ 25π

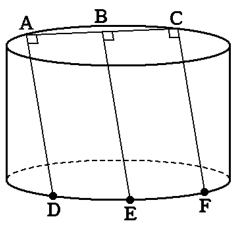
Sol

Tip

삼수선의 정리

3 수능완성 기벡 61P 8번

밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 6인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 한 밑면인 원에서 길이가 6인 현 AC의 중점을 B라 하자. 세 점 A, B, C에서 각각 현 AC에 수직으로 바닥의 밑면인 원의 둘레에 그림과 같이 원기둥의 내부를 지나도록 직선을 그을 때, 원의 둘레와 만나는 점 D, E, F에 대하여 $\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{BE}}^2+\overline{\mathrm{CF}}^2$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{BE}}>\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{BE}}>\overline{\mathrm{CF}}$)



Sol

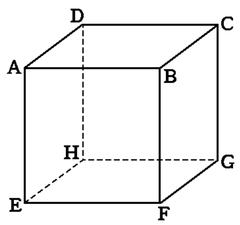
Tip

평면과 평면이 이루는 각

4 특강 기벡 89P 4번

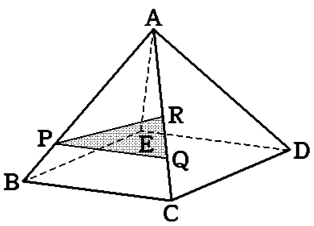
그림과 같은 정육면체 $\mathrm{ABCD}-\mathrm{EFGH}$에서 세 점 A, D, F 를 지나는 평면을 α라 하고, 세 점 A, B, H를 지나는 평면을 β라 하자. 두 평면 α, β의 교선과 평면 BFGC가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $60\times\cos^2\theta$의 값은?

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

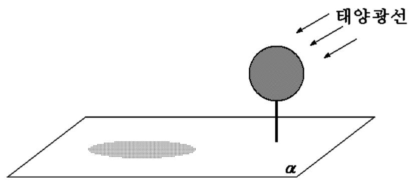


Sol

Tip	정사영의 길이와 넓이
5	**수능완성** 기벡 63P 13번 그림과 같이 밑면이 정사각형이고 옆면이 이등변 삼각형인 사각뿔 $A-BCDE$에서 $\overline{BC}=4$ $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{AE}=6$이다. 모서리 AB를 $3:1$로 내분하는 점을 P, 모서리 AC의 중점을 R, 모서리 AC를 $3:1$로 내분하는 점을 Q라 할 때, 삼각형 PQR의 면 $BCDE$ 위로의 정사영의 둘레의 길이가 $\dfrac{6+\sqrt{2}+\sqrt{k}}{2}$ 이다. 유리수 k의 값을 구하시오.
Sol	



Tip	정사영의 활용
6	**수능완성** 기벡 64P 15번 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 구 모양의 지구본과 평면 α가 있다. 이 지구본에 태양광선이 지면과 $30°$의 각도로 비출 때, 평면 α에 생기는 지구본의 그림자의 넓이는 450이다. r의 값은 $r=\dfrac{k}{\sqrt{\pi}}$이다. k의 값을 구하시오.
Sol	



Tip

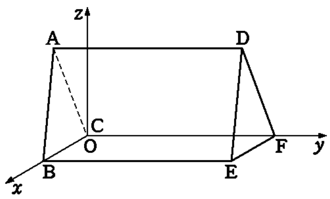
공간에서의 좌표와 대칭이동

Tip

두 점 사이의 거리

1 수능완성 기벡 66P 3번

그림과 같이 좌표공간에 옆면이 직사각형이고, $\overline{AB}=\overline{AC}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AD}=6\sqrt{2}$ 인 삼각기둥 $ABC-DEF$가 있다. 꼭짓점 C가 원점과 일치하고 두 모서리 BC와 CF가 각각 x축, y축 위에 있을 때, 꼭짓점 D를 z축에 대하여 대칭이동한 점을 $G(a,\ b,\ c)$라 하자. abc의 값을 구하시오.



2 특강 기벡 91P 5번

좌표공간에 세 점 $A(-3,6,-9)$, $B(-6,0,8)$, $C(a,\ b,\ c)$가 있다. 삼각형 ABC의 무게중심이 원점일 때, $a+b+c$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

Sol

Sol

Tip

두 점 사이의 거리의 최댓값과 최솟값

3

수능완성 기벡 68P 9번

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 4,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ -2,\ 4)$에서 같은 거리에 있는 xy평면 위의 점 P의 집합을 T라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $(-2,\ -2,\ 0) \in T$

ㄴ. $T = \left\{(x,\ y,\ 0) \middle| y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right\}$

ㄷ. $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소일 때, 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\frac{19}{13},\ \frac{1}{13},\ 0\right)$이다.

①ㄱ ②ㄷ ③ㄱ, ㄴ ④ㄱ, ㄷ ⑤ㄱ, ㄴ, ㄷ

Sol

Tip

공간에서 선분의 내분점, 외분점

4

수능완성 기벡 69P 필수유형

점 $\mathrm{A}(2,\ 4,\ 3)$과 y축 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$에 대하여 선분 AP를 $3:4$으로 내분하는 점 $\mathrm{Q}(d,\ e,\ f)$가 zx평면 위에 있을 때, $3b+7(d+f)$의 값은?

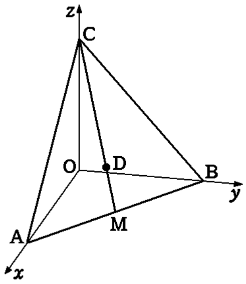
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Sol

Tip	선분의 내분점, 외분점과 삼각형

5 수능완성 기벡 70P 16번

좌표공간에서 그림과 같이 두 점 A$(2,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 2,\ 0)$과 선분 AB의 중점 M, z축 위의 점 C에 대하여 선분 MC를 $1:2$으로 내분하는 점을 D라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 10일 때, 원점에서 점 D까지의 거리는?



① $\dfrac{\sqrt{14}}{3}$ ② $\dfrac{2\sqrt{14}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ ④ $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{14}}{4}$

Sol

Tip	구의 방정식

6 수능완성 기벡 71P 19번

좌표공간의 두 구

$$(x-\sqrt{3})^2+(y-a)^2+(z-1)^2=4$$

$$x^2+(y-1)^2+z^2=4$$

가 만날 때 생기는 두 구의 내부의 공통영역의 부피 V의 최댓값은?

① 2π ② $\dfrac{7}{3}\pi$ ③ $\dfrac{8}{3}\pi$ ④ 3π ⑤ $\dfrac{10}{3}\pi$

Sol

Tip

평면도형에서의 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배

1 수능완성 기벡 78P 3번

사각형 ABCD는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 대각선의 교점 O에 대하여
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$

(나) $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AD}|=2$, $\angle DAB=\dfrac{\pi}{4}$

$|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}|$의 값은?

① 2 ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

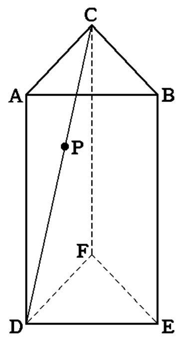
Sol

Tip

공간도형에서의 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배

2 수능완성 기벡 79P 6번

그림과 같은 삼각기둥 ABC−DEF에서 면 ABC와 면 DEF는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이고 옆면은 $\overline{AD}=\sqrt{3}$인 직사각형이다.
점 P가 선분 CD 위를 움직일 때, 벡터 $\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BE}$의 크기의 최댓값은?



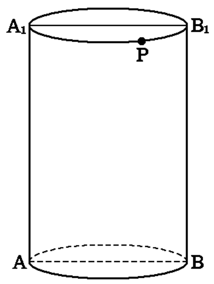
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

Sol

Tip	선분의 내분점, 외분점과 위치벡터(공간)

3 수능완성 기벡 83P 18번

그림과 같이 원기둥에서 선분 AB와 선분 A_1B_1은 두 밑면인 원의 지름이고 $\overline{AA_1}=6$, $\overline{AB}=3$이다. $\overline{A_1B_1}$이 지름인 원의 둘레 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 Q가 $3\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{BA}=4\overrightarrow{BP}$를 만족시킬 때, 점 Q가 나타내는 도형의 길이는? (단, 선분 AA_1은 원기둥의 모선이다.)



① π ② 2π
③ 3π ④ 4π
⑤ 5π

Sol

Tip	벡터의 크기와 내적의 관계

4 특강 기벡 120P 6번

좌표공간에 네 점 $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(2,\ -2,\ 3)$, $C(-2,\ 1,\ 4)$, $D(1,\ 3,\ -1)$이 있다. 선분 AD 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Sol

Tip

벡터의 수직 조건과 내적

5 수능완성 기벡 89P 필수유형

좌표평면 위의 두 점 A$(2,\ 5)$, B$(10,\ 11)$에 대하여 점 P가 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최댓값은? (단, O는 원점이다.)

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

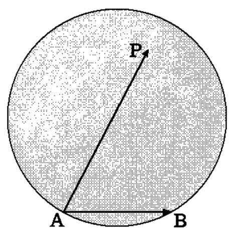
Sol

Tip

공간도형에서의 벡터의 내적

6 수능완성 기벡 92P 21번

반지름의 길이가 4인 구 S 위의 고정된 두 점 A, B가 $\overline{\mathrm{AB}} = 4$를 만족시킨다. 점 P가 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 12$를 만족시키면서 구 S 위를 움직일 때, 점 P가 나타내는 도형의 길이를 l이라 할 때, $\left(\dfrac{l}{\pi}\right)^2$의 값을 구하시오.



Sol

EBSi

Tip

직선의 방정식

1 수능완성 기벡 95P 1번

좌표공간에 점 $(1,\ 0,\ -1)$을 지나고 원 $(x-4)^2+(y-2)^2=4,\ z=4$의 중심을 지나는 직선 l이 있다. 직선 l이 점 $(a,\ b,\ 9)$를 지날 때, $a+b$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

Sol

Tip

두 직선이 이루는 각

2 수능완성 기벡 97P 8번

좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(a,\ -1,\ 2)$, $\mathrm{B}(0,\ 2,\ 5)$을 지나는 직선이 직선 $\dfrac{x+1}{2}=-y+1=\dfrac{z}{a}$와 수직일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Sol

Tip

직선 위의 점의 좌표를 문자로 나타내기

3

수능완성 기벡 98P 필수유형

직선 $x-1=\dfrac{y+1}{2}=-z+1$ 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$일 때, 점 P의 좌표는 $(a,\ b,\ c)$이다. $a+b+c$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

Sol

Tip

평면의 방정식

4

수능완성 기벡 101P 3번

좌표공간의 원점 O에서 평면 $ax+by+cz+d=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 OH의 방향벡터는 $(1,\ 2,\ 2)$이고 $|\overrightarrow{OH}|=6$이다. $\left|\dfrac{d}{2a+b+c}\right|$의 값은? (단, $a,\ b,\ c,\ d$는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Sol

Tip

두 평면 또는 평면과 직선이 이루는 각

5

특강 기벡 151P 3번

직선 $l: \dfrac{x+1}{k}=y=\dfrac{z-1}{2k}$ 과

평면 $\alpha: x-y+kz=1$ 이 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $k>0$ 이고, $0° \le \theta \le 90°$)

보기

ㄱ. $\theta=0°$ 이면 $k=\dfrac{1}{2}$ 이다.

ㄴ. $\theta=90°$ 가 되도록 하는 k 의 값은 무수히 많이 존재한다.

ㄷ. $\lim_{k\to\infty}\cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Sol

Tip

구와 평면

6

특강 기벡 151P 2번

평면 $2x+y+2z=3$ 이 x 축, y 축, z 축과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자. 사면체 OABC에 내접하는 구의 반지름의 길이는?
(단, O는 원점이다.)

① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{3}{8}$ ③ $\dfrac{5}{8}$ ④ $\dfrac{7}{8}$ ⑤ $\dfrac{9}{8}$

Sol

해 답

1강 방정식과 부등식

1. 답 ④

양변에 분모의 최소공배수 $(x-1)(x+2)$를 곱하면 $(x+2)+2(x-1)=k(x-1)(x+2)$

위 식을 전개하여 정리하면 $kx^2+(k-3)x-2k=0$

이 방정식의 두 실근의 합이 2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면

$$-\frac{k-3}{k}=2, \quad -k+3=2k \qquad \therefore\ k=1$$

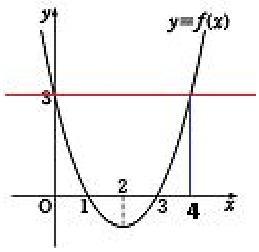
2. 답 ⑤

무리방정식 $\sqrt{f(x)-2}+f(x)=4$ 에서 $\sqrt{f(x)-2}=4-f(x)$의 양변을 제곱하면

$$f(x)-2=16-8f(x)+\{f(x)\}^2$$

$$\{f(x)\}^2-9f(x)+18=0$$

$(f(x)-3)(f(x)-6)=0$에서 $f(x)=3,\ f(x)=6$



그런데 $f(x)=6$은 무연근이므로 $f(x)=3$

그림에서 $f(x)$는 $x=2$에 대칭이므로 두 근은 0, 4이다.

따라서 두 근의 합은 4

3. 답 ⑤

원 모양의 조깅코스의 길이가 $2\pi\,\mathrm{km}$이므로 반지름의 길이는 $1\,\mathrm{km}$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=x$로 놓으면 $\overline{\mathrm{BD}}=7-x$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{1^2+(7-x)^2}$

또, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CD}}=6$이므로 $x+1+\sqrt{1^2+(7-x)^2}=6$

$$\sqrt{x^2-14x+50}=5-x$$

$$x^2-14x+50=x^2-10x+25$$

$$4x=25 \qquad \therefore\ x=\frac{25}{4}\ \mathrm{km}$$

4. 답 ①

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{(n-1)(n+1)^2}{n^3}$$

$$a_2\cdot a_3\cdot\ \cdots\ \cdot a_k=\frac{1\cdot 3^2}{2^3}\cdot\frac{2\cdot 4^2}{3^3}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{(k-1)(k+1)^2}{k^3}=\frac{(k+1)^2}{4k}>2013$$

k는 양의 정수이므로 양변에 $4k$를 곱하면 $k^2+2k+1>8052k$

$$k^2-8050k+1>0$$

$$k(k-8050)+1>0$$

따라서 k의 최솟값은 8050이다.

5. 답 ③

$$\frac{g(x+1)}{f(x-1)}\ge 0 \Leftrightarrow f(x-1)g(x+1)\ge 0,\ f(x-1)\ne 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x+1) \ge 0 \\ f(x-1) > 0 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} g(x+1) \le 0 \\ f(x-1) < 0 \end{cases}$$

함수 $y=f(x-1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축 방향으로 1만큼 평행이동시킨 그래프이고, 함수 $y=g(x+1)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 그래프이므로 두 함수의 그래프를 그려 생각하면

$\begin{cases} g(x+1) \ge 0 \\ f(x-1) > 0 \end{cases}$에서의 공통범위는 $-2 \le x < 0$이므로 만족하는 정수는 -2, -1

$\begin{cases} g(x+1) \le 0 \\ f(x-1) < 0 \end{cases}$에서의 공통범위는 $2 \le x < 3$이므로 만족하는 정수는 2

따라서 주어진 분수부등식에 속하는 정수 x는 -2, -1, 2의 3개이다.

6. 답 36

A→B까지 자전거로 가는데 걸린 시간은 $\dfrac{20}{x}$, B→C까지 자전거로 가는데 걸린 시간은 $\dfrac{6}{x}$

C→D가지 자전거로 가는데 걸린 시간은 $\dfrac{8}{x-4}$, A→D까지 자동차로 가는데 걸린 시간은 $\dfrac{24}{3x}=\dfrac{8}{x}$

따라서 $\dfrac{20}{x}+\dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{x-4}=\dfrac{8}{x}+2+\dfrac{1}{2}$이므로 정리하면 $\dfrac{18}{x}+\dfrac{8}{x-4}=\dfrac{5}{2}$

양변에 $2x(x-4)$를 곱하여 정리하면 $5x^2-72x+144=(x-12)(5x-12)=0$

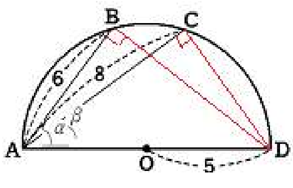
$x>4$이므로 구하는 $x=12$ 따라서 구하고자 하는 자동차의 속력은 시속 36 km이다.

2강 삼각함수

1. 답 ③

오른쪽 그림과 같이 $\angle \mathrm{BAD}=\alpha$, $\angle \mathrm{CAD}=\beta$로 놓으면 $\angle \mathrm{ABD}=\angle \mathrm{ACD}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{100-36}=8$, $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{100-64}=36$



$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$이므로 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\sin\beta=\dfrac{3}{5}$

$\triangle\mathrm{ACB}$에서 $\overline{\mathrm{BC}}^2=6^2+8^2-2\cdot6\cdot8\cos(\alpha-\beta)$

$=100-96(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=100-96\left(\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{5}+\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5}\right)=\left(\dfrac{14}{5}\right)^2$

$\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{14}{5} \qquad \therefore\ pq=70$

2. 답 ⑤

직각삼각형 PAC에서 $\tan\alpha=\dfrac{8}{4}=2$, 직각삼각형 PBC에서 $\tan\beta=\dfrac{8}{x}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{2+\frac{8}{x}}{1-2\cdot\frac{8}{x}}=\frac{2x+8}{x-16}$$ 이므로 $\frac{2x+8}{x-16}=-1$, $2x+8=16-x$

$3x=8 \quad \therefore\ x=\frac{8}{3}$

3. 답 ③

점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\sin(\angle \mathrm{AOH})=\frac{1}{2}$이므로 $\angle \mathrm{AOH}=30^{\circ}$

$\therefore\ \angle \mathrm{AOB}=120^{\circ}$

$\triangle \mathrm{APB}$는 중심각의 크기가 120°인 호 AB의 원주각이므로 $\angle \mathrm{APB}=60^{\circ}$

두 직선 PA, PB가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 $\beta-\alpha=60^{\circ}$

직선 PA의 기울기를 m, PB의 기울기를 m'이라 하면

$\tan 60^{\circ}=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\cdot\tan\alpha}=\frac{m'-m}{1+m'm}=\sqrt{3}$, $\quad m'=\frac{\sqrt{3}+m}{1-\sqrt{3}m}$

그런데 $m=\sqrt{3}+1$이므로 $m'=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} \qquad m'=4-3\sqrt{3}$

4. 답 3

t초 후에 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(1+\cos t,\ \sin t)$이고, 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(-1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right)$

즉, $\mathrm{P}=(-1-\sin t,\ \cos t)$

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=(2+\cos t+\sin t)^2+(\sin t-\cos t)^2=6+4\sqrt{2}\,sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\le 6+4\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{6+4\sqrt{2}}=\sqrt{(2+\sqrt{2})^2}=2+\sqrt{2}$

따라서 두 지점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 $2+\sqrt{2}$이므로 $m=2,\ n=1 \quad \therefore\ m+n=3$

5. 답 ①

$\sin^2\frac{\theta}{4}=\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{2}=\frac{1}{10}$, $\ \therefore\ \cos\frac{\theta}{2}=\frac{4}{5}$

$\angle \mathrm{OAB}=\frac{\theta}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{OA}}=5k$, $\overline{\mathrm{AB}}=4k$로 놓으면 $\triangle \mathrm{OAB}$에서 피타고라스의 정리를 사용하면

$(4k)^2+3^2=(5k)^2$이므로 $\therefore\ k=1$, $\overline{\mathrm{OA}}=5$, $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$

따라서 $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$

$\triangle \mathrm{OBC}$의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin(\pi-\theta)=\frac{9}{2}sin\theta=\frac{9}{2}\cdot\frac{24}{25}=\frac{108}{25}$

6. 답 ②

$\cos 2x + 3\sin x - 2 = 1 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$$(\sin x - 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\therefore\ \sin x = 1 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

(i) $\sin x = 1$에서 $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$0 \le x \le 10\pi$ 이므로 $x = \frac{\pi}{2},\ 2\pi + \frac{\pi}{2},\ 4\pi + \frac{\pi}{2},\ \cdots,\ 8\pi + \frac{\pi}{2}$로 5개이다.

(ii) $\sin x = \frac{1}{2}$에서 $x = m\pi + (-1)^m \frac{\pi}{6}$ (m은 정수)

$0 \le x \le 10\pi$ 이므로 $x = \frac{\pi}{6},\ \pi - \frac{\pi}{6},\ 2\pi + \frac{\pi}{6},\ 3\pi - \frac{\pi}{6}, \cdots,\ 9\pi - \frac{\pi}{6}$로 10개이다

따라서, 구하는 실근의 개수는 15개이다.

3강 함수의 극한

1. 답 ④

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a+x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{(a+x)-(a-x)}{2x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{4}$$

$\therefore\ a = 4$

2. 답 ⑤

$\lim_{x \to \infty} \frac{(2x+1)f(x)}{x^3 + 3x} = 8$에서 $\frac{\infty}{\infty}$꼴 이므로 $f(x)$의 차수는 2이고 최고차항의 계수는 4이다.

또, $\lim_{x \to 2} \frac{(x-1)\{f(x)+1\}}{x^2 - 4} = 8$에서 $\frac{0}{0}$꼴을 만족해야 하므로 $f(2) = -1$이다.

따라서 함수 $f(x) = 4(x-2)(x+a) - 1$을 만족한다. (a는 상수)

$\lim_{x \to 2} \frac{(x-1)\{f(x)+1\}}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)4(x-2)(x+a)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{4(x-1)(x+a)}{x+2} = 8$에서

$2 + a = 8$이므로 $a = 6$

$f(x) = 4(x-2)(x+6) - 1$에서 $f(4) = 4 \cdot 2 \cdot 10 - 1 = 80 - 1 = 79$

3. 답 ②

ㄱ. $\lim_{x \to +0} g(f(x)) = \lim_{t \to 2-0} g(t) = 0,\ \lim_{x \to -0} g(f(x)) = \lim_{t \to 1-0} g(t) = 1$ 이므로 거짓

ㄴ. $\lim_{x \to 1+0} f(g(x)) = \lim_{t \to -1+0} f(t) = 0,\ \lim_{x \to 1-0} f(g(x)) = \lim_{t \to 1+0} f(t) = 1$ 이므로 거짓

ㄷ. $\lim_{x \to 2+0} g(g(x)) = \lim_{t \to -0} g(t) = 2,\ \lim_{x \to 2-0} g(g(x)) = \lim_{t \to -0} g(t) = 2$ (참)

4. 답 ④

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 4x\sin(\sin 2x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan4x\sin(\sin2x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan4x\sin(\sin2x)(1+\cos x)}{\sin^2x}$$

$$=\lim_{x\to}\left\{\frac{\tan4x}{\sin x}\cdot\frac{\sin(\sin2x)}{\sin x}\cdot(1+\cos x)\right\}$$

$$=\lim_{x\to}\left\{\frac{\frac{\tan4x}{4x}\cdot4x}{\frac{\sin x}{x}\cdot x}\cdot\frac{\sin(\sin2x)}{\sin2x}\cdot\frac{\sin2x}{\sin x}\cdot(1+\cos x)\right\}$$

$$=4\cdot2\cdot2=16$$

5. 답 ③

$$f(n)=\ln\left\{\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n}\right)\right\}$$

$$=\ln\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}+\cdots+\frac{3n+1}{3n}\right\}$$

$$=\ln\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}\cdot3n\cdot\frac{3n+1}{3n}\right\}=\ln\frac{3n+1}{3n}$$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{3n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}n^2f(n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2\ln\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot3n^2\ln\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)^{3n^2}=\frac{1}{3}\ln e=\frac{1}{3}$$

6. 답 ④

점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$이므로 원 $x^2+y^2=1$위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y=1$이므로 $x=1$일 때, $y=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$이므로 $\mathrm{Q}\left(1,\ \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

따라서 접선과 x축과의 교점 R의 좌표는 $\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$

구하는 삼각형 QAR의 넓이는 $S(\theta)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-1\right)\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{\sin2\theta}$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{\sin2\theta\cdot(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\left\{\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}\cdot\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\right\}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

4강 함수의 연속

1. 답 ①

$$\lim_{x\to3-0}g(f(x))=\lim_{x\to3-0}g(x^2-3)=\lim_{x\to3-0}(x^2-3)^2+k(x^2-3)=36+6k$$

$$\lim_{x\to3+0}g(f(x))=\lim_{x\to3-0}g(4-x)=\lim_{x\to3-0}(4-x)^2+k(4-x)=1+k$$

$36+6k=1+k$, $5k=-35$ $\quad\therefore\ k=-7$

2. 답 ②

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x-3}=3$이므로 다항함수 $f(x)$는 $f(x)=x^2+3x+k$ (k는 실수)이다.

함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이므로 $\displaystyle\lim_{x\to3}g(x)=\lim_{x\to3}\frac{3x+k}{x-3}=a$가 성립한다.

이 때, $\dfrac{0}{0}$꼴을 만족해야 하므로 $9+k=0$ $\quad\therefore\ k=-9$

$f(x)=x^2+3x-9$에서 $f(3)=9+9-9=9$

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{3x-9}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{3(x-3)}{x-3}=3=a$ $\quad\therefore\ a=3$

$\therefore\ a+f(3)=3+9=12$

3. 답 ③

$f(x)=\begin{cases}-x & (|x|<1)\\ 0 & (x=1)\\ 0 & (x=-1)\\ x & (|x|>1)\end{cases}$이고 $g(x)$는 주기가 2인 함수이다.

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to1+0}g(f(x))=\lim_{t\to1+0}g(t)=-1$, $\displaystyle\lim_{x\to1-0}g(f(x))=\lim_{t\to-1+0}g(t)=-1$ 이므로 (참)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to-1+0}\{f(x)+g(x)\}=1-1=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-1-0}\{f(x)+g(x)\}=-1+1=0$

$f(-1)+g(-1)=0-1=-1$ 따라서 $x=-1$에서 연속이 아니다. (거짓)

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to1+0}f(x)\{g(x)+a\}=-1+a$, $\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)\{g(x)+a\}=-1-a$

$f(1)\{g(1)+a\}=0$이므로 $x=1$에서 연속이 되려면 $-1+a=-1-a=0$을 만족해야 한다.

하지만 이를 만족하는 실수 a는 존재하지 않는다. (참)

4. 답 ④

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to0}g(f(x))=\lim_{t\to1-0}g(t)=0$ (거짓)

ㄴ. $g(f(-1))=g(0)=1$, $\displaystyle\lim_{x\to-1}g(f(x))=\lim_{t\to+0}g(t)=1$ 따라서 $x=-1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $g(f(1))=g(0)=1$

$\lim_{x \to 1+0} g(f(x)) = \lim_{t \to -0} g(t) = 0$, $\lim_{x \to x-0} g(f(x)) = \lim_{t \to +0} g(t) = 1$ 즉, 극한값이 없다.

따라서 $x = 1$에서 불연속이다. (참)

5. 답 ④

ㄱ. $f(x) = x^3 - 3x + 1$로 놓으면 $f(x)$는 닫힌구간 [0, 1]에서 연속이다.

$f(0)f(1) = 1 \cdot (-1) = -1 < 0$이므로 중간값의 정리에 의하여 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x) = x + \ln(4+x) - 1$로 놓으면 $f(x)$는 닫힌구간 [0, 1]에서 연속이다.

$f(0)f(1) = (\ln 4 - 1)(\ln 5) > 0$이므로 실근을 갖는다고 단정할 수 없다.

$\ln(4+x) = 1 - x$라 하고 $y = \ln(4+x)$, $y = 1 - x$의 그래프를 그려보면 열린구간 (0, 1)에서 교점을 갖고 있지 않다. (거짓)

ㄷ. $f(x) = 2x + \sin \pi x - 1$로 놓으면 $f(x)$는 닫힌구간 [0, 1]에서 연속이다.

$f(0)f(1) = (-1)(1) < 0$이므로 중간값의 정리에 의하여 적어도 하나의 실근을 갖는다.(참)

6. 답 ②

방정식 $x^2 - 2ax + a = 0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4} = a^2 - a = a(a-1)$이므로

$0 < a < 1$일 때, $f(a) = 0$, $a = 0$ 또는 $a = 1$일 때,

$f(a) = 1$, $a < 0$ 또는 $a > 1$일 때, $f(a) = 2$이므로 $y = f(a)$는 $a = 0$, 1에서 불연속이다.

따라서 불연속인 점의 개수는 2이다.

5강 미분계수와 도함수

1. 답 ④

$$g(x) = f(f(f(x))) = f\left(f\left(\frac{x}{1-x}\right)\right) = f\left(\frac{\frac{x}{1-x}}{1 - \frac{x}{1-x}}\right) = f\left(\frac{x}{1-2x}\right) = \frac{\frac{x}{1-2x}}{1 - \frac{x}{1-2x}} = \frac{x}{1-3x}$$

$$\frac{g(4) - g(2)}{4-2} = \frac{-\frac{4}{11} + \frac{2}{5}}{4-2} = \frac{1}{55} \quad \therefore\ p + q = 55 + 1 = 56$$

2. 답 ④

함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, -1)$에서 기울기가 -2인 직선의 방정식은 $y = -2x + 3$이다.

따라서 $f'(2) = -2$, $f(2) = -1$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{6}\left\{f\left(2 - \frac{1}{3n}\right) + 1\right\} = \lim_{n \to \infty} \frac{f\left(2 - \frac{1}{3n}\right) - (-1)}{\frac{6}{n}}$$ 에서 $\frac{1}{n} = h$라 하면

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(2 - \frac{1}{3}h\right) - f(2)}{6h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(2 - \frac{1}{3}h\right) - f(2)}{-\frac{1}{3}h} \cdot \left(-\frac{1}{18}\right) = -\frac{1}{18} f'(2) = \frac{1}{9}$$

3. 답 ⑤

함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 연속이지만 미분불능이므로 $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ 이지만 $f'(0)$는 존재하지 않는다.

ㄱ. $g(x) = xf(x)$라 하면 $g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ (참)

ㄴ. $h(x) = x^3 f(x)$라 하면 $h'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 f(x) = 0$ (참)

ㄷ. $r(x) = \frac{1}{1 - xf(x)}$라 하면 $r'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{r(x) - r(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1 - xf(x)} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{1 - xf(x)}$

$= f(0)$ (참)

4. 답 ②

$f(x) = x^2 + ax + 3$에서 $f'(x) = 2x + a$이므로 $f'(5) = 10 + a$, $f'(n) = 2n + a$

$\sum_{n=1}^{10} (2n + a) = 110 + 10a = \alpha$, $f'(5) = 10 + a = \beta$, $\alpha = 2\beta$이므로

$$110 + 10a = 2\beta = 2(10 + a) = 20 + 2a$$

$$90 + 8a = 0 \quad \therefore\ a = -\frac{90}{8} = -\frac{45}{4}$$

5. 답 ③

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$이므로 $f'(1) = 3a + 2b + 1$, $f'(2) = 12a + 4b + 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(1 - 3h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 - 3h) - f(1)}{-3h} \cdot (-3) = -3f'(1) = 3$에서 $3a + 2b + 1 = -1$

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{f'(2)}{4} = \frac{9}{4}$에서 $12a + 4b + 1 = 9$

$\therefore\ a = 2,\ b = -4 \quad \therefore a - b = 2 - (-4) = 6$

6. 답 ②

$g'(x) = 2xf(x - 1) + x^2 f'(x - 1)$에서

ㄱ. $f(1)g'(1) = -2(2f(0) + f'(0)) = -2f'(0) > 0$ (거짓)

ㄴ. $f'(0)g(1) = f'(0)f(0) = 0$ (거짓)

ㄷ. $\frac{g(2)}{2} = \frac{4f(1)}{2} = 2f(1) = -4$, $g'(2) = 4f(1) + 4f'(1) = -8$ 이므로 $\frac{g(2)}{2} > g'(2)$ 성립 (참)

6강 여러 가지 함수의 미분법과 도함수

1. 답 ③

$f'(x)=\dfrac{g'(x)\{g(x)+1\}-\{g(x)-1\}g'(x)}{\{g(x)+1\}^2}=\dfrac{2g'(x)}{\{g(x)+1\}^2}$에서 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=\dfrac{2g'(1)}{\{g(1)+1\}^2}$이므로 $3=\dfrac{48}{\{g(1)+1\}^2}$에서 $g(1)+1=4$ $\quad \therefore g(1)=3$

2. 답 ②

$\sin y=x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\cos y \cdot y'=2x$, $y'=\dfrac{2x}{\cos y}$ (단, $\cos y \neq 0$)

점 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$를 대입하면 $y'=\dfrac{\sqrt{2}}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}=2$

3. 답 15

이차함수 $f(x)$가 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-1}{x^2-1}=1$을 만족시키므로 이차항의 계수는 1이다.

또, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=1$에서 $f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)=(x-1)(x+a)$라 하면 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+a}{x+1}=\frac{1+a}{2}=1$ $\quad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=(x-1)(x+1)=x^2-1$이므로 $f(2x)=4x^2-1$

$h(x)=4x^2-1$이라 하면 $h(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $h(g(x))=x$이다. 양변을 미분하면

$h'(g(x))g'(x)=1$ $\quad x=3$을 대입하면 $h'(g(3))g'(3)=1$

$g(3)=b$라 하면 $h(b)=3$이므로 $4b^2-1=3$, $b^2=1$ $\quad \therefore b=1$ $(\because b\geq 0)$

따라서 $h'(1)g'(3)=1$이고, $h'(x)=8x$에서 $h'(1)=8$이므로 $g'(3)=\dfrac{1}{8}$ $\quad \therefore 120g'(3)=\dfrac{120}{8}=15$

4. 답 ④

$f(x)=\sin x^2$이라 하면 $f'(x)=\cos x^2\cdot 2x$이다.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5+x)^2-\sin 25}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+5)-f(5)}{x}=f'(5)=10\cos 25$

5. 답 410

$f(x)>0$이므로 양변에 자연로그를 취하면 $f(x)=(e^x+1)(e^{2x}+1)\cdots(e^{nx}+1)$에서

$\ln f(x)=\ln(e^x+1)+\ln(e^{2x}+1)+\cdots+\ln(e^{nx}+1)$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{e^x}{e^x+1}+\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}+\cdots+\dfrac{ne^{nx}}{e^{nx}+1}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}(1+2+3+\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{4}=g(n)$$

$$\therefore\ g(40)=\frac{40\cdot 41}{4}=410$$

6. 답 50

주어진 식 $f(x+y)=e^y f(x)+e^x f(y)$에 $x=y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$이므로 $f(0)=0$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h f(x)+e^x f(h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\cdot f(x)+e^x\cdot\frac{f(h)}{h}\right)=f(x)+e^x f'(0)$$

즉, $f'(x)=f(x)+25e^x$에서 이계도함수가 존재하므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f''(x)=f'(x)+25e^x$ 이므로 $f''(0)=f'(0)+25=50$

7강 도함수의 활용(1) (접선의 방정식, 평균값의 정리)

1. 답 ①

$y=e^x$를 미분하면 $y'=e^x$ 이므로 접점의 좌표를 $(t,\ e^t)$라 하면 기울기는 $e^t=e$이므로 $t=1$

따라서 접선의 방정식은 $y-e=e(x-1)$ $y=ex$

이 접선이 $(a,\ 10e)$를 지나므로 대입하면 $10e=ea$ $\therefore\ a=10$

2. 답 ②

함수 $y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로 기울기가 1인 접선과 곡선 $y=e^x$의 접점의 좌표는 $e^x=1$에서 $x=0$

따라서 접점의 좌표는 (0, 1)이고 접선의 방정식은 $y=x+1$이다. $\therefore\ a=1$

마찬가지로 $y=x^2$에서 $y'=2x$이므로 기울기가 1인 접선과 곡선 $y=x^2$의 접점의 좌표는 $2x=1$

$x=\frac{1}{2}$ 따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$이고 접선의 방정식은 $y=x-\frac{1}{4}$이므로 $b=-\frac{1}{4}$

$$\therefore\ a-4b=1-4\left(-\frac{1}{4}\right)=2$$

3. 답 ⑤

$x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t$에서 $\frac{dx}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t,\ \frac{dy}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$$ 따라서 $t=\frac{\pi}{2}$일 때, $\frac{dy}{dx}=-1$

4. 답 ②

함수 $y=\frac{x}{x+1}$에서 $y'=\frac{1}{(x+1)^2}$이므로 접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{t}{t+1}\right)$라 하면, 이 점에서의 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{(t+1)^2}(x-t)+\frac{t}{t+1}$ 위 직선이 (2, 2)를 지나므로 대입하면 $2=\frac{1}{(t+1)^2}(2-t)+\frac{t}{t+1}$

정리하면 $t(t+4)=0$에서 $t=0,\ t=-4$

각각의 기울기를 구하면 $t=0$에서의 기울기는 1, $t=-4$에서의 기울기는 $\frac{1}{9}$이므로

x축과 이루는 각을 $\alpha,\ \beta$라 하면 두 직선이 이루는 각은 $\alpha-\beta=\theta$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{4}{5}$$

5. 답 ①

$y=e^{x-b}$에서 $y'=e^{x-b}$이고 $y=\ln x+1$에서 $y'=\frac{1}{x}$이다.

두 곡선이 $x=a$에서 공통접선을 가지므로 $e^{a-b}=\ln a+1,\ e^{a-b}=\frac{1}{a}$를 만족시킨다.

이 때, 연립하면 $\ln a+1=\frac{1}{a}$이므로 $\ln a=\frac{1}{a}-1$

a는 두 곡선 $y=\ln x$, $y=\frac{1}{x}-1$의 교점의 x좌표이다. 따라서 교점은 $(1,\ 0)$이므로 $\therefore\ a=1$

$a=1$을 대입하면 $e^{1-b}=1$에서 $b=1$

$\therefore\ ab=1$

6. 답 ②

함수 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$은 $x\neq1$인 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $2\le x_1<x_2\le 3$일 때,

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[x_1,\ x_2]$에서 연속이고 열린구간 $(x_1,\ x_2)$에서 미분가능하다.

따라서, 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(x_1,\ x_2)$에 적어도 하나

존재한다. $f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}$이므로 $f'(c)=a$라 하면 $a=-\frac{2}{(c-1)^2}$

$2<c<3$ 에서 $1<c-1<2$ 각 변을 제곱하면 $1<(c-1)^2<4$

역수를 취하면 $1>\frac{1}{(c-1)^2}>\frac{1}{4}$ 각 변에 -2를 곱하면 $-2<-\frac{2}{(c-1)^2}<-\frac{1}{2}$

즉, $-2<a<-\frac{1}{2}$의 범위에 있으면 된다.

따라서 옳은 것은 ②번이다.

8강 도함수의 활용(2) (극대, 극소, 최대, 최소)

1. 답 ③

$f(x)=-x-2\cos x$에서 $f'(x)=-1+2\sin x$

ㄱ. $f'(0)=-1$ (참)

ㄴ. 열린구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{6}\right)$에서 $\sin x<\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$이므로 $f'(x)=-1+2\sin x<-1+1=0$

$\therefore\ f'(x)<0$ 이므로 (거짓)

ㄷ. $f'(x)=-1+2\sin x=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$이므로 만족하는 x의 값은 $x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\cdots$이므로

열린구간 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi\right)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

2. 답 26

조건을 만족하는 삼차함수는 $f(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)+C$ (k는 0이 아닌 상수)

$$f'(x)=k(3x^2-12x+11)$$

이므로 근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=\frac{11}{3}$이므로

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16-\frac{22}{3}=\frac{26}{3}$$

$$\therefore\ 3(\alpha^2+\beta^2)=26$$

3. 답 ③

$f(x)=\ln(1+x^2)$에서 $f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$, $f''(x)=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

ㄱ. $f(-x)=\ln\{1+(-x)^2\}=\ln(1+x^2)=f(x)$이므로 $f(x)$는 y축 대칭이다. (참)

ㄴ. $-1<x<1$에서 $f''(x)=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}>0$이므로 그래프는 열린구간 (-1, 1)에서 아래로 복록이다. (거짓)

ㄷ. $f''(x)=0$의 해는 $x=\pm1$이고 전후에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 점 $(-1,\ln2)$, $(1,\ \ln2)$는 변곡점이다. 따라서 변곡점에서의 기울기의 곱 $f'(-1)\cdot f'(1)=-1$이므로 서로 수직이다. (참)

4. 답 ④

ㄱ. $\lim_{x\to1-0}f'(x)=1$ (참)

ㄴ. 열린구간 (-2, 0)에서 함수 $f(x)$가 증가하고 $f(0)=0$이므로 $f(-2)<f(0)=0$ (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 열린구간 (-3, 3)에서 $x=-2$일 때 극소, $x=1$일 때 극대, $x=2$일 때 극소로 3개의 극값을 갖는다. (거짓)

5. 답 81

함수 $f(x)=\dfrac{x^3}{x-2}$에서 $f'(x)=\dfrac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$, $f'(x)=0$에서 $2x^2(x-3)=0$

$x>2$이므로 $x=3$

또, $x=3$ 좌우에서 함수 $f(x)$가 감소상태에서 증가 상태로 바뀌므로 $a=3$, $m=f(3)=27$

$\therefore\ am=3\cdot 27=81$

6. 답 ④

곡선 $y=\left(\dfrac{1}{e}\right)^x$에서 점 P의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{1}{e^a}\right)$ $(a>0)$로 놓으면 $y'=-\dfrac{1}{e^x}$에서 점 P에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{1}{e^a}$이므로 접선의 방정식은 $y-\dfrac{1}{e^a}=-\dfrac{1}{e^a}(x-a)$

$y=0$일 때, $0-\dfrac{1}{e^a}=-\dfrac{1}{e^a}(x-a)$, $x=a+1$ $\quad\therefore\ \mathrm{Q}(a+1,\ 0)$

$x=0$일 때, $y-\dfrac{1}{e^a}=-\dfrac{1}{e^a}(-a)$, $y=\dfrac{1}{e^a}(a+1)$ $\ \therefore\ \mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{1}{e^a}(a+1)\right)$

$\triangle\mathrm{OQR}$의 넓이를 $S(a)$라 하면 $S(a)=\dfrac{1}{2}(a+1)\cdot\dfrac{1}{e^a}(a+1)=\dfrac{1}{2e^a}(a+1)^2$

$$S'(a)=-\frac{1}{2e^a}(a+1)(a-1)$$

$S'(a)=0$에서 $a=-1$ 또는 $a=1$ 이 때, $a>0$이므로 만족하는 $a=1$

따라서 넓이 $S(a)$는 $a=1$에서 극대이면서 최댓값이다.

9강 도함수의 활용(3) (변화율, 방정식과 부등식 활용)

1. 답 68

방정식 $e^x-x-70+n=0$에서 $-e^x+x+70=n$이라 놓고

각각 $f(x)=-e^x+x+70$, $g(x)=n$이라 하면 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만날 조건을 구하면 된다.

$f'(x)=-e^x+1$, $f'(x)=0$에서 즉, $e^x=1$, $x=0$이고 $f''(x)=-e^x$이므로 $f''(0)=-1<0$이므로 $x=0$ 극댓값 70을 갖는다.

따라서 $n<70$이면 두 함수의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만나므로 자연수 n의 값은 $1,\ 2,\ \cdots,\ 68$의 68개이다.

2. 답 ②

$f(x)=x^4-2x^2+a$라 하면 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$이므로 함수 $f(x)$는

$x=-1$, $x=1$에서 극솟값을 갖고 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 극솟값 $f(-1)=f(1)=a-1\geq 0$이면 주어진 부등식이 항상 성립하므로 $\therefore\ a\geq 1$

3. 답 48

가로등의 밑을 원점으로 하고 공의 그림자가 움직이는 방향을 x축 가로등의 방향을 y축으로 하는 좌표 평면에서 t초 후의 공의 위치는 점 $(2.1,\ 7-4.9t^2)$이고 전구의 위치는 점$(0,\ 7)$이다.

따라서 가로등의 전구와 공을 지나는 직선의 방정식은 $y=-\dfrac{7}{3}t^2x+7$

공의 그림자는 $y=0$일 때 이므로 $x=\dfrac{3}{t^2}$, 공의 그림자의 좌표는 $x=\dfrac{3}{t^2}$이고 $v=\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{6}{t^3}$

따라서 0.5 초가 지나는 순간에 공의 그림자가 움직이는 속도의 크기는

$|v|=\left|-6\cdot\dfrac{1}{(0.5)^3}\right|=6\cdot\dfrac{1000}{125}=48$ (m/초)

4. 답 ②

$x=\cos t$, $y=\sin t-4\cos t$에서 $\dfrac{dx}{dt}=-\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=\cos t+4\sin t$

점 P의 속력 $|v|$는 $|v|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t+4\sin t)^2}=\sqrt{17\sin^2 t+8\sin t\cos t+\cos^2 t}$

$=\sqrt{1+16\sin^2 t+8\sin t\cos t}=\sqrt{1+8(1-\cos 2t)+4\sin 2t}$

$=\sqrt{9+4\sin 2t-8\cos 2t}=\sqrt{9+4\sqrt{5}\,sin(2t-\alpha)}$

따라서 속력의 최댓값은 $\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{9+2\sqrt{20}}=\sqrt{5}+\sqrt{4}=2+\sqrt{5}$

5. 답 ③

시각 t일 때, $\overline{AP}=t$, $\overline{BQ}=2t$, $\overline{PB}=10-t$, $\overline{QC}=10-2t$이므로 사각형 DPBQ의 넓이를 $S(t)$라 하면 $S(t)=100-(\triangle\mathrm{APD}$의 넓이)-($\triangle\mathrm{DQC}$의 넓이)$=100-\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot t-\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot(10-2t)$

$=5t+50$

이고 삼각형 PBQ의 넓이를 $f(t)$라 하면 $f(t)=\dfrac{1}{2}(10-t)\cdot 2t=10t-t^2$

따라서 삼각형 PBQ의 넓이의 변화율 $f'(t)=10-2t$이므로 $S(t)=60$일 때, $5t+50=60$

$\therefore\ t=2$이므로 $f'(2)=10-4=6$

6. 답 ⑤

사각뿔 2개를 합한 것으로 생각하고 사각뿔의 부피를 구하면 된다. 맨 위의 꼭짓점을 A라 하고 밑변의 꼭짓점을 B, C, D, E라 하면 높이는 $\overline{AH}^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2=a^2$이므로 $\therefore\ \overline{AH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$

따라서 부피 V는 $V=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot a^2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$

t초 후의 한 모서리의 길이는 $2t+1$이므로 $V(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}(2t+1)^3$, $V'(t)=2\sqrt{2}(2t+1)^2$

모서리의 길이가 9일 때, $2t+1=9\quad\therefore\ t=4\quad\therefore\ V'(4)=2\sqrt{2}(9)^2=162\sqrt{2}$

10강 부정적분과 정적분

1. 답 ②

$f'(x) = 2x^3 + 3x + 5 \qquad \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \cdot \frac{1}{(x+4)} = \frac{f'(1)}{5} = \frac{10}{5} = 2$

2. 답 ②

$f(x) = (\ln 2)\int 4^x dx = \ln 2 \cdot \frac{4^x}{\ln 4} + C = 2^{2x-1} + C \quad$ (C는 적분상수)

$f(1) = 2$이므로 $\quad \therefore\ C = 0 \quad \therefore\ f(x) = 2^{2x-1}$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{2n-1}} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots\right)$

초항이 $\frac{1}{2}$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 무한등비급수의 합은 $3\left(\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}}\right) = 2$

3. 답 ①

함수 $f(x)$가 실수 전체에서 연속이므로 $x = 0$에서 연속이어야 한다. 즉 $\lim_{X \to -0} f(x) = \lim_{x \to +0} f(x) = f(0)$

에서 $\lim_{x \to -0} (e^x + a) = \lim_{x \to +0} \sqrt[3]{x} = 1 + a \qquad \therefore\ a = -1$

$$\int_{-a}^{2} f(x)dx - \int_{a}^{2} f(x)dx = \int_{-a}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{a} f(x)dx$$

$$= \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{1}^{-1} f(x)dx = -\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$= -\left\{\int_{-1}^{0} (e^x - 1)dx + \int_{0}^{1} \sqrt[3]{x}\, dx\right\}$$

$$= -\left(\left[e^x - x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_{0}^{1}\right)$$

$$= \frac{1}{e} - \frac{3}{4}$$

4. 답 ①

$f^{-1}(x) = t$로 놓으면 $\{f^{-1}(x)\}' \frac{dx}{dt} = 1$

한편 $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \{f^{-1}(x)\}' = 1$

$\therefore\ \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \frac{dx}{dt} = 1$

또, $f(x) = x^3 + x$에서 $y = x^3 + x$로 놓고 x, y를 바꾸면 $x = y^3 + y$

이 때, $x=0$이면 $y=f^{-1}(0)=0$, $x=2$이면 $y=f^{-1}(2)=1$

즉, $x=0$일 때 $t=f^{-1}(0)=0$, $x=2$일 때 $t=f^{-1}(2)=1$이므로

$$\int_0^2 \frac{2f^{-1}(x)}{f'(f^{-1}(x))}dx=\int_0^1 2tdt=[t^2]_0^1=1$$

5. 답 133

$$a_n=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos(2nx)dx=\left[\frac{x}{2n}sin(2nx)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{1}{2n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(2nx)dx$$

$$=\frac{1}{4n^2}(\cos 2n\pi-\cos n\pi)$$

$$a_{2m-1}=\frac{1}{4(2m-1)^2}\{\cos 2(2m-1)\pi-\cos(2m-1)\pi\}=\frac{1}{2(2m-1)^2}$$

$$\frac{1}{20}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_{2k-1}}=\frac{1}{20}\left\{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{19}}\right\}$$

$$=\frac{1}{20}\{2\cdot 1^2+2\cdot 3^2+\cdots+2\cdot 19^2\}$$

$$=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}(2k-1)^2=133$$

6. 답 ④

조건 (가)에서 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고, 조건 (가)의 등식에 x대신 $x-1$을 대입하면 $f(2-x)=f(x)$이다,

조건 (나)에서 $\int_0^1\{f(x)+f(2-x)\}dx$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(2-x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx=-4$$

$$\therefore \int_0^1 f(x)dx=-2$$

조건 (다)에서 $\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx-2=0$

$$\therefore \int_{-1}^0 f(x)dx=2$$

$\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=t$라 하면 $dx=2dt$, $x=1$일 때, $t=2$, $x=3$일 때, $t=3$

$$\int_1^3 f\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)dx=\int_2^3 f(t)2dt=2\int_{-1}^0 f(t)dt=4$$

11강 정적분으로 표현된 함수

1. 답 ③

$\int_{-1}^{x} f(t)dt = (x+2)f(x) - (x+1)^3$ 의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $f(-1)=0$이다.

또 양변을 미분하면 $f(x) = f(x) + (x+2)f'(x) - 3(x+1)^2$ $\quad\therefore\ f'(x) = \dfrac{3(x+1)^2}{x+2}$

적분하면 $f(x) = \int f'(x)dx = 3\int \dfrac{(x+1)^2}{x+2}dx = 3\int \left(x + \dfrac{1}{x+2}\right)dx = 2\left(\dfrac{1}{2}x^2 + \ln(x+2)\right) + C$

$$f(-1) = \frac{3}{2} + C = 0\text{에서 } C = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3\ln(x+2) - \frac{3}{2}$$

$$\therefore\ f(1) = 3\ln 3$$

2. 답 ①

$2xf(x) = xe^x + \int_0^x (x+t)f'(t)\,dt$에서 $2xf(x) = xe^x + x\int_0^x f'(t)dt + \int_0^x tf'(t)\,dt$

$$2xf(x) = xe^x + x[f(x) - f(0)] + \int_0^x tf'(t)\,dt$$

$$2xf(x) = xe^x + x\left[f(x) - \frac{1}{2}\right] + \int_0^x tf'(t)\,dt$$

$$xf(x) = xe^x - \frac{1}{2}x + \int_0^x tf'(t)\,dt$$

양변을 미분하면 $f(x) + xf'(x) = e^x + xe^x - \dfrac{1}{2} + xf'(x)$

$$\therefore\ f(x) = e^x + xe^x - \frac{1}{2} \qquad \therefore\ f(1) = 2e - \frac{1}{2}$$

3. 답 ③

$f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} t^2 dt$이므로 $f'(x) = \sin^2 x \cdot \cos x - \cos^2 x(-\sin x) = \sin x\cos x(\sin x + \cos x)$

$f'(x) = 0$에서 $\sin x = 0$ 또는 $\cos x = 0$ 또는 $\sin x + \cos x = 0$

$$\therefore\ x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{4}\pi \ (\because\ 0 < x < \pi)$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x = \dfrac{\pi}{2}$에서 극댓값을 갖고, $x = \dfrac{3}{4}\pi$에서 극솟값을 갖는다.

$a = \dfrac{\pi}{2}$, $b = \dfrac{3}{4}\pi$ $\quad b - a = \dfrac{3}{4}\pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{4}\pi$

4. 답 ⑤

$\int_1^2 \frac{f(t)}{t}dt = a$ (a는 상수) 라 하면 $f'(x) = (x^2+2x)e^x + 2a$

양변을 적분하면 $f(x) = \int [(x^2+2x)e^x + 2a]dx = x^2e^x + 2ax + C$ (C는 적분 상수)

$f(0) = 0$이므로 $C = 0$ $\therefore f(x) = x^2e^x + 2ax$

$$a = \int_1^2 \frac{f(t)}{t}dt = \int_1^2 \frac{t^2e^t + 2at}{t}dt = \int_1^2 (te^t + 2a)dt = e^2 + 2a \quad \therefore a = -e^2$$

$\therefore f(x) = x^2e^x - 2e^2x$ 이므로 $f(1) = e - 2e^2$

5. 답 ③

$f(t) = e^{t-2}\sin\frac{t}{4}\pi + t^2 - 2$라 하고 $f(t)$의 부정적분 중 하나를 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{2-x}^{2+x}\left(e^{t-2}\sin\frac{t}{4}\pi + t^2 - 2\right)dt = \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{2-x}^{2+x} f(t)dt = \lim_{x\to0}\frac{F(2+x)-F(2-x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{F(2+x)-F(2)}{x} + \lim_{x\to0}\frac{F(2-x)-F(2)}{-x} = 2F'(2) = 2f(2)$$

$$= 2(1+2^2-2) = 6$$

6. 답 63

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right\}^5\frac{12k}{n^2} = 12\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right\}^5\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n} = 12\int_0^1 (x^2+1)^5 x\,dx$$

$x^2+1 = t$라 하면 $2xdx = dt$, $x = 1$일 때 $t = 2$. $x = 0$일 때 $t = 1$

$$12\int_0^1 (x^2+1)^5 x\,dx = 12\int_1^2 \frac{t^5}{2}dt = 6\left[\frac{1}{6}t^6\right]_1^2 = 6\left\{\frac{64-1}{6}\right\} = 63$$

12강 정적분의 활용

1. 답 1

삼각함수 $f(x)$, $g(x)$의 주기는 각각 $4a$, $8a$이고, 최댓값이 각각 $3b$, $2b$이므로

$$f(x) = 3b\sin\frac{\pi}{2a}x, \quad g(x) = 2b\sin\frac{\pi}{4a}x$$

두 점 O, A를 지나는 직선을 l_1, 두 점 O, B를 지나는 직선을 l_2라 하면

$$l_1 : y = \frac{3b}{a}x, \quad l_2 : y = \frac{b}{a}x$$

제 1사분면에서 곡선 $y = f(x)$와 직선 l_1으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_1은

$$S_1 = \int_0^a\left(3b\sin\frac{\pi}{2a}x - \frac{3b}{a}x\right)dx = \frac{3}{2}ab\left(-1+\frac{4}{\pi}\right)$$

제 1사분면에서 곡선 $y=g(x)$와 직선 l_2로 둘러싸인 부분의 넓이 S_2는

$$S_2=\int_0^{2a}\left(2b\sin\frac{\pi}{4a}x-\frac{b}{a}x\right)dx=2ab\left(-1+\frac{4}{\pi}\right)$$

$$\therefore\ \frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{3}{2}ab\left(-1+\frac{4}{\pi}\right)}{2ab\left(-1+\frac{4}{\pi}\right)}=\frac{3}{4} \qquad \therefore\ p-q=4-3=1$$

2. 답 50

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수, $1\le x\le 2$)라 할 때, $f(1)=1$, $f(2)=2$이므로

$1+a+b=1$, $\quad 4+2a+b=2$ 연립하면 $a=-2$, $b=2$

$\therefore\ f(x)=x^2-2x+2$

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(x^2-2x+2)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_1^2=\frac{4}{3}$$

한편 역함수의 그래프가 $y=x$에 대칭됨을 이용하면 $\int_1^2 f(x)dx+\int_1^2 g(x)dx=2^2-1^2=3$

$\therefore\ \int_1^2 g(x)dx=3-\int_1^2 f(x)dx=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3} \qquad S=\frac{5}{3}$이므로 $30S=30\cdot\frac{5}{3}=50$

3. 답 ①

이웃하는 두 변의 길이가 π, $\cos\sqrt{\pi x}$인 직사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\pi\cot\sqrt{\pi x}$ 따라서 입체도형의 부피를 V라 하면 $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\sqrt{\pi x}\,dx$

이때, $\sqrt{\pi x}=t$라 하면 $\frac{dt}{dx}=\frac{\pi}{2\sqrt{\pi x}}=\frac{\pi}{2t}$이고 $x=0$이면 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$이면 $t=\frac{\pi}{2}$이므로

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2t}{\pi}cost\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\,dt=2\left([t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt\right)=\pi-2$$

4. 답 72

$y=|\ln x|$에서 $x\ge 1$일 때, $y=\ln x$이므로 $x=e^y$, $0<x<1$일 때, $y=-\ln x$이므로 $x=e^{-y}$

따라서 구하는 부피 V는

$$V=\int_0^{\ln 2}(e^y)^2dy-\pi\int_0^{\ln 2}(e^{-y})^2dy=\pi\int_0^{\ln 2}e^{2y}dy-\pi\int_0^{\ln 2}e^{-2y}dy$$

$$=\frac{3}{2}\pi-\frac{3}{8}\pi=\frac{9}{8}\pi \qquad \therefore\ ab=72$$

5. 답 ②

ㄱ. 점 P는 $v_1(t)=0$일 때, 방향을 바꾸므로 $t=a$, $t=b$일 때 방향을 두 번 바꾸었다. (거짓)

ㄴ. 점 P는 출발 후 $t=a$까지 수직선의 양의 방향으로 움직이고 $t=a$에서 $t=b$까지 수직선의

음의 방향으로 움직인다. 또한, 점 Q는 출발 후 $t=b$까지 수직선의 양의 방향으로만 움직인다. $t=b$에서 두 점 P,Q의 위치가 같으므로 $t=a$일 때, 점 P는 점 Q의 오른쪽에 있다. (참)

ㄷ. $t=b$에서 $t=c$가지의 각각의 넓이를 구하여 보면
$t=b$에서 $t=c$까지 점 P가 움직인 거리는 점 Q가 움직인 거리보다 작다. 따라서 점 P는 점 Q의 왼쪽에 있다. (거짓)

6. 답 ④

그릇에 물을 넣기 시작하고 8초가 지난 후 수면의 높이는 $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt = \left[2\sqrt{t+1}\right]_0^8 = 4$

따라서 구하는 물의 양을 V라 하면 $V=\pi\int_0^4 x^2 dy = \pi\int_0^4 \frac{y^4}{64}dy = \frac{16}{5}\pi$ $\therefore pq = 16 \cdot 5 = 80$

13강 순열과 조합

1. 답 ④

(i) $f(4)=3$인 경우 1, 2, 3, 5, 6, 7은 각각 3을 제외한 1, 2, 4, 5, 6, 7중 하나에 대응되므로 구하는 함수 f의 개수는 ${}_6\Pi_6$

(ii) $f(4)=6$인 경우 1, 2, 3, 5, 6, 7은 각각 6을 제외한 1, 2, 3, 4, 5, 7중 하나에 대응되므로 구하는 함수 f의 개수는 ${}_6\Pi_6$

따라서 조건을 만족하는 모든 함수의 개수는 $2 \cdot {}_6\Pi_6$

2. 답 15

(i) B가 양쪽 끝에 오는 경우 :

가운데 세 자리에 A, C, C 가 오는 경우 => $\frac{3!}{2!}=3$

가운데 세 자리에 A, B, C 가 오는 경우 => 없다. (B의 개수가 2개이므로)

(ii) C가 양쪽 끝에 오는 경우 :

A, B, B 인 경우 3가지, A, B, C 인 경우 3!=6가지. A, C, C 인 경우 3가지

따라서 구하는 총 가지는 15가지

3. 답 27

(i) 구간 PQ를 거쳐서 최단거리로 가는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}\cdot\frac{4!}{2!2!}=18$

(ii) 구간 QR를 거쳐서 최단거리로 가는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{3!}{2!}=18$

(iii) 구간 PQ와 QR를 모두 거쳐서 최단거리로 가는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}\cdot\frac{3!}{2!}=9$

따라서 구하는 경우의 수는 $18+18-9=27$

4. 답 126

바둑돌을 4개 택할 때, 흰 바둑돌과 검은 바둑돌의 개수에 따라 나누어 생각한다.

그릇 A, 그릇 B, 그릇 C에 담긴 흰 바둑돌의 개수를 각각 x, y, z라 하고 검은 바둑돌의 개수를 a, b, c라 하면

(ⅰ) 흰 바둑돌 4개를 택하는 경우 : $x+y+z=4$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

$$_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$$

(ⅱ) 검은 바둑돌 4개를 택하는 경우 : $a+b+c=4$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

$$_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$$

(ⅲ) 흰 바둑돌 3개, 검은 바둑돌 1개를 택하는 경우 : $x+y+z=3$의 음이 아닌 정수해의 개수와 $a+b+c=1$의 음이 아닌 정수해의 개수의 곱과 같으므로 $_3\mathrm{H}_3\cdot{}_3\mathrm{H}_1={}_5\mathrm{C}_3\cdot{}_3\mathrm{C}_1=30$

(ⅳ) 흰 바둑돌 1개, 검은 바둑돌 3개를 택하는 경우 : $x+y+z=1$의 음이 아닌 정수해의 개수와 $a+b+c=3$의 음이 아닌 정수해의 개수의 곱과 같으므로 $_3\mathrm{H}_1\cdot{}_3\mathrm{H}_3={}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_3=30$

(ⅴ) 흰 바둑돌 2개, 검은 바둑돌 2개를 택하는 경우 : $x+y+z=2$의 음이 아닌 정수해의 개수와 $a+b+c=2$의 음이 아닌 정수해의 개수의 곱과 같으므로 $_3\mathrm{H}_2\cdot{}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2=36$

따라서 구하는 방법의 가짓수는 $15+15+30+30+36=126$

5. 답 60

$\dfrac{d}{dx}\left(2x^2+\dfrac{1}{2x}\right)^7$의 전개식에서 x^4의 계수는

$\left(2x^2+\dfrac{1}{2x}\right)^7$의 전개식에서 x^5의 항을 미분하면 얻어지고

$\displaystyle\int\left(2x^2+\frac{1}{2x}\right)^7dx$의 전개식에서 x^3의 개수는

$\left(2x^2+\dfrac{1}{2x}\right)^7$의 전개식에서 x^2의 항을 적분하면 된다.

따라서 $\left(2x^2+\dfrac{1}{2x}\right)^7$의 전개식의 일반항은 $_7\mathrm{C}_r(2x^2)^r\left(\dfrac{1}{2x}\right)^{7-r}={}_7\mathrm{C}_r2^{2r-7}x^{3r-7}$

x^5항은 $r=4$일 때, $70x^5$이므로 미분하면 $350x^4$이므로 계수 $a=350$

x^2항은 $r=3$일 때, $\dfrac{35}{2}x^2$이므로 적분하면 $\dfrac{35}{6}x^3$이다. $b=\dfrac{35}{6}$

$\therefore\ \dfrac{a}{b}=350\cdot\dfrac{6}{35}=60$

6. 답 98

점 A를 포함하는 n각형의 개수 a_n은 $a_n={}_{7-1}\mathrm{C}_{n-1}={}_6\mathrm{C}_{n-1}$

또, 점 A를 포함하지 않는 n각형의 개수 b_n은 $b_n={}_{7-1}\mathrm{C}_n={}_6\mathrm{C}_n$

$$\therefore\ \sum_{n=3}^{6}a_n+\sum_{n=3}^{6}b_n=\sum_{n=3}^{6}(a_n+b_n)=\sum_{n=3}^{6}({}_6\mathrm{C}_{n-1}+{}_6\mathrm{C}_n)=\sum_{n=3}^{6}{}_7\mathrm{C}_n$$

$$={}_7\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_4+{}_7\mathrm{C}_5+{}_7\mathrm{C}_6=35+35+21+7=98$$

14강 확률의 뜻과 활용

1. 답 ⑤

7개의 공에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_7C_3=35$

서로 다른 세 수가 삼각형의 세 변의 길이가 되려면 두 수의 합이 나머지 한 수보다 커야 된다.

따라서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 수가 세 변의 길이가 되는 경우는 다음과 같다.

(7, 6, 5), (7, 6, 4), (7, 6, 3), (7, 6, 2), (7, 5, 4), (7, 5, 3), (6, 5, 4), (6, 5, 3)

(6, 5, 2), (6, 4, 3), (5, 4, 3), (5, 4, 2), (4, 3, 2) 즉, 13개 이므로 확률은 $\dfrac{13}{35}$

2. 답 17

6명이 식탁에 둘러앉는 경우의 수는 $6!$이다. 한웅이는 준호가 않았던 자리에 앉으므로 준호가 앉을 자리는 5개의 자리 중에서 한웅이가 앉았던 자리를 제외한 4자리이고, 나머지 네 명이 자리를 정하는 경우의 수는 $4!$이다. 따라서 구하는 확률은 $\dfrac{4\cdot 4!}{6!}=\dfrac{2}{15}$ $\quad\therefore\quad p+q=17$

3. 답 ②

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 $P(A\cap B)=0$, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+P(B)-0 \qquad \therefore\ P(B)=\frac{1}{6}$$

4. 답 7

남학생 3명과 여학생 3명에서 2명씩 3개의 조를 만드는 경우의 수는

$${}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{3!}=15$$

이 때, 각 조가 모두 남학생 1명과 여학생 1명으로 이루어지는 경우의 수는 ${}_3C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_1C_1=6$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$이다. $\therefore\ p+q=2+5=7$

5. 답 ②

1부터 9까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 세 수를 동시에 선택하는 경우의 수는 ${}_9C_3=84$

최솟값이 4가 나오는 사건을 A, 최댓값이 7이 나오는 사건을 B

(ⅰ) 최솟값이 4인 경우 : 4를 뽑고 5, 6, 7, 8, 9까지의 자연수 중 2개를 뽑는 경우의 수가

$${}_5C_2=10 \quad\therefore\ P(A)=\frac{10}{84}$$

(ⅱ) 최댓값이 7인 경우 : 7을 뽑고 1, 2, 3, 4, 5, 6까지의 자연수에서 2개를 뽑는 경우이므로

$${}_6C_2=15 \quad\therefore\ P(B)=\frac{15}{84}$$

(ⅲ) 최솟값이 4이고 최댓값이 7인 경우 4, 7을 뽑고 5, 6 중에 하나를 뽑으면 되므로 2가지이다.

따라서 구하는 확률은 $P(A\cup B)=\dfrac{10}{84}+\dfrac{15}{84}-\dfrac{2}{84}=\dfrac{23}{84}$

6. 답 62

6명의 학생이 가위바위보를 할 때, 나오는 모든 경우의 수는 3^6. 이기는 쪽은 가위바위보 중 어느 한 가지로 이길 수 있으므로 k명이 이길 확률은

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_k \cdot 3}{3^6} = \frac{{}_6\mathrm{C}_k}{3^5}$$ (단, k는 1, 2, 3, 4, 5)

따라서 한 번의 가위바위보에서 승부가 나지 않을 확률은

$$1 - \frac{{}_6\mathrm{C}_1 + {}_6\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_6\mathrm{C}_2}{3^5} = \frac{181}{243} \qquad p - q = 243 - 181 = 62$$

15강 조건부확률

1. 답 ②

남자 회원인 사건을 M, 여자 회원인 사건을 W. 동반 행사에 참여한 사건을 C라 하면

$$\mathrm{P}(\mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{C}) + \mathrm{P}(\mathrm{W} \cap \mathrm{C}) = \frac{18+a}{50}, \quad \mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{C}) = \frac{18}{50}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(\mathrm{M}|\mathrm{C}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{C})}{\mathrm{P}(\mathrm{C})} = \frac{\frac{18}{50}}{\frac{18+a}{50}} = \frac{18}{18+a} = \frac{9}{16} \qquad \therefore\ a = 14$$

2. 답 26

유진이와 혜진이가 같은 열에 이웃하여 앉는 경우는

A열 : (10, 11), (11, 12)　　　B열 : (10, 11), (11, 12), (12, 13)

의 5가지이다. 그 각 경우마다 바꿔 앉는 경우가 2! 이므로 구하는 확률은 $\frac{5 \cdot 2 \cdot 5!}{7!} = \frac{5}{21}$

3. 답 ①

(i) 성재가 승자가 되는 경우는 성재는 5, 성윤이는 3, 재준이는 4가 적힌 공을 뽑을 때 이므로

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot 1 = \frac{4}{9}$$

(ii) 성윤이가 승자가 되는 경우는 성재는 2 또는 5, 성윤이는 6, 재준이는 4가 적힌 공을 뽑을 때

이므로 $1 \cdot \frac{2}{6} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

(iii) 재준이가 승자가 되는 경우는 성재는 2, 성윤이는 3, 재준이는 4가 적힌 공을 뽑을 때이므로

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot 1 = \frac{2}{9}$$

따라서 승자가 될 확률이 가장 높은 사람은 성재, 가장 낮은 사람은 재준이다.

4. 답 ①

두 사건 A, B가 독립이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$에서 $\frac{3}{4}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\frac{1}{3}\mathrm{P}(\mathrm{B})$ $\quad\therefore\ \mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{5}{8}$

$\therefore\ \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^{C})=\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{1}{8}$

5. 답 ⑤

A$=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, B$=\{3,\ 6\}$, C$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이고

$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{6\}$, $\mathrm{B}\cap\mathrm{C}=\{3\}$, $\mathrm{A}\cap\mathrm{C}=\{2,\ 4\}$이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(\mathrm{C})=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})=\frac{1}{4}$

따라서 서로 독립인 사건은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 이다.

6. 답 221

동전을 한 번 던지는 시행에서 앞면과 뒷면이 나올 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다. 각각의 시행이 독립시행이고 동전을 8번 던지는 시행 후에 점 P가 x좌표와 y좌표가 서로 다른 점 위에 놓이는 사건은 앞면과 뒷면이 각각 4번 나오는 사건의 여사건이다. 따라서 구하는 확률은

$$1-{}_{8}\mathrm{C}_{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=1-\frac{35}{128}=\frac{93}{128}\qquad\therefore\ p+q=221$$

16강 이산확률변수와 이항분포

1. 답 ④

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이므로

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=\frac{{}_{2}\mathrm{C}_{2}\cdot{}_{4}\mathrm{C}_{0}}{{}_{6}\mathrm{C}_{2}}=\frac{1}{15},\ \mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=\frac{{}_{2}\mathrm{C}_{1}\cdot{}_{4}\mathrm{C}_{1}}{{}_{6}\mathrm{C}_{2}}=\frac{8}{15},\ \mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=\frac{{}_{2}\mathrm{C}_{0}\cdot{}_{4}\mathrm{C}_{2}}{{}_{6}\mathrm{C}_{2}}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(\mathrm{X}\le 1)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=\frac{1}{15}+\frac{8}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

2. 답 ①

확률변수 X가 취하는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)+\cdots+\mathrm{P}(\mathrm{X}=10)&=\frac{k}{20}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{10\cdot 11}\right)\\&=\frac{k}{22}=1\qquad\therefore\ k=22\end{aligned}$$

즉, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=\frac{11}{10x(x+1)}$이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)<\frac{1}{10}$에서 $\frac{11}{10x(x+1)}<\frac{1}{10}$, $\quad 11<x(x+1)$

$\therefore\ x=3,\ 4,\ ,5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$이 모두 성립하므로 최솟값은 3이다.

3. 답 ⑤

확률변수 X가 취하는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로 $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+b=1$

$\therefore\ b=\frac{1}{4}$

또, 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(\mathrm{X})=1\cdot\frac{1}{4}+a\cdot\frac{1}{2}+2a\cdot\frac{1}{4}=a+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

$\therefore\ a=2$

$\therefore\ \mathrm{E}(\mathrm{X}^2)=1^1\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{2}+4^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{25}{4}$ $\quad\therefore\ \mathrm{E}(4\mathrm{X}^2)=4\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)=4\cdot\frac{25}{4}=25$

4. 답 ②

세 명의 학생이 선택한 과목을 순서쌍으로 나타내면

(A, A, A), (A, A, B), (A, B, A), (B, A, A)
(A, B, B), (B, A, B), (B, B, A), (B, B, B)

이므로 확률분포표를 그리면

X	0	1	2	3	계
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{3}{2}$, $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\frac{3}{4}$

$\therefore\ \mathrm{V}(4\mathrm{X}+5)=16\mathrm{V}(\mathrm{X})=16\cdot\frac{3}{4}=12$

5. 답 ⑤

$\sigma(\mathrm{X}_1)=\sqrt{50p(1-p)}=\sqrt{-50\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{2}}$ 이므로 $p=\frac{1}{2}$일 때 최대가 된다.

따라서 확률변수 X_2는 이항분포 $\mathrm{B}\left(160,\ \frac{1}{4}\right)$를 따르므로

$\mathrm{V}(\mathrm{X})=160\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=30$

6. 답 60

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(30,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 $\mathrm{E}(\mathrm{X})=30\cdot\frac{1}{3}=10$

$\sum_{x=0}^{30}9(x-10)^2\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=9\sum_{x=0}^{30}(x-10)^2\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)$ 에서 $\sum_{x=0}^{30}(x-10)^2\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)$은 분산

$\mathrm{V}(\mathrm{X})$를 뜻한다. $9\mathrm{V}(\mathrm{X})=9\cdot30\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=60$

17강 연속확률분포와 정규분포

1. 답 ②

$0 \le X \le 3$에서 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$1 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot (a+3a) \cdot 2 = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{5}$

또, 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(1,\ \frac{1}{5}\right)$, $\left(3,\ \frac{3}{5}\right)$을 지나므로 $0 \le X \le 3$에서 $f(x) = \frac{1}{5}x$

조건에서 $P(0 \le X \le 1) + 2P(1 \le X \le b) = 1 \quad \frac{1}{5} + 2\int_1^b \frac{1}{5}x\,dx = 1$ 계산하면 $\quad \therefore b^2 = 5$

$\therefore 25 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot 5 = 25$

2. 답 ②

$-1 \le x \le 1$에서 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} a|x|\,dx = \int_{-1}^{0}(-ax)dx + \int_0^1 ax\,dx = a = 1 \quad \therefore a = 1$

$E(X) = \int_{-1}^{1} xf(x)dx = \int_{-1}^{0}(-x^2)dx + \int_0^1 x^2 dx = 0$

$V(X) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx - \{E(X)\}^2 = \int_{-1}^{0}(-x^3)dx + \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{2}$

3. 답 ④

확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=m$에 대하여 대칭이다.

ㄱ. $P(X+1 \le m) = P(X \le m-1) < P(X \le m) = 0.5$ (거짓)

ㄴ. $P(a \le X \le a+2)$가 최대가 되려면 $\frac{a+(a+2)}{2} = m \quad \therefore m-a=1$ (참)

ㄷ. $P(m \le X \le m+1) = P\left(\frac{m-m}{\sigma} \le Z \le \frac{(m+1)-m}{\sigma}\right) = P\left(0 \le Z \le \frac{1}{\sigma}\right)$

이므로 σ의 값이 클수록 확률의 값은 작아진다. (참)

4. 답 ②

함수 $f(x)$가 $f(50-x) = f(50+x)$를 만족하므로 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=50$에 대하여 대칭이다.

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$이므로 $m=50$

따라서 확률변수 X가 정규분포 $N(50,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z = \frac{X-50}{\sigma}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1^2)$을 따른다. $P(m \le X \le m+8) = P(50 \le X \le 58) = P\left(\frac{50-50}{\sigma} \le Z \le \frac{58-50}{\sigma}\right) = P\left(0 \le Z \le \frac{8}{\sigma}\right)$

또, 주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.4772$이므로 $\dfrac{8}{\sigma} = 2 \quad \therefore \sigma = 4$

$\mathrm{P}(46 \le \mathrm{X}) = \mathrm{P}(-1 \le Z) = 0.5 + 0.3413 = 0.8413$

5. 답 ①

백열전구의 수명을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1200, 50^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(1300 \le \mathrm{X}) = \mathrm{P}\left(\dfrac{1300-1200}{50} \le Z\right) = \mathrm{P}(2 \le Z) = 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

6. 답 93

162번의 시행중 6의 약수인 1, 2, 3, 6의 눈이 나오는 횟수를 X, 그 외의 눈이 나오는 횟수를 Y라 하면 $\mathrm{X}+\mathrm{Y}=162$. 또, 점 P의 좌표가 189이상일 경우는 $2\mathrm{X}-\mathrm{Y} \ge 189$ 이므로 $\therefore \mathrm{X} \ge 117$

이 때, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(162, \dfrac{2}{3}\right)$를 따르므로 $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 162 \cdot \dfrac{2}{3} = 108$,

$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = 162 \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = 6^2$ 이때, $n = 162$는 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포

$\mathrm{N}(108, 6^2)$를 따른다. $\mathrm{P}(\mathrm{X} \ge 117) = \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{117-108}{6}\right) = \dfrac{7}{100} \quad \therefore p - q = 100 - 7 = 93$

18강 통계적 추정

1. 답 ⑤

모집단이 $\{-2, -1, 1, 2\}$에서 크기가 2인 표본을 복원추출하는 방법의 수는 $4 \cdot 4 = 16$가지이다.

크기가 2인 표본평균은 $\overline{\mathrm{X}} = \dfrac{\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{X}}$의 값은 -2, -1.5, -1, 0, 0.5, 1, 1.5, 2이다.

(ⅰ) $\overline{\mathrm{X}} = -1$인 경우는 (-1, -1)

(ⅱ) $\overline{\mathrm{X}} = -0.5$인 경우는 (-2, 1), (1, -2)

(ⅲ) $\overline{\mathrm{X}} = 0$인 경우는 (-2, 2), (-1, 1), (1, -1), (2, -2)

(ⅴ) $\overline{\mathrm{X}} = 0.5$인 경우는 (-1, 2), (2, -1)

(ⅳ) $\overline{\mathrm{X}} = 1$인 경우는 (1, 1)

$\mathrm{P}(|\overline{\mathrm{X}}| \le 1) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{X}} = -1) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{X}} = -0.5) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{X}} = 0) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{X}} = 0.5) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{X}} = 1) = \dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8}$

2. 답 ①

상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	4	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$E(X)=2$, $V(X)=\frac{3}{2}$ 이 때, 모평균 $m=2$, 모분산 $\sigma^2=\frac{3}{2}$이고 표본의 크기 $n=3$이므로

$$E(\overline{X})=E(X)=2,\ V(\overline{X})=\frac{V(X)}{n}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}$$

3. 답 9

직장인의 한 달 동안의 근무시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m,\ 3^2)$을 따르므로 크기 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{3^2}{n}\right)$을 따른다.

$$P(|\overline{X}-m|\le 1)=P(m-1\le\overline{X}\le m+1)=2P(m\le\overline{X}\le m+1)$$

$$=2P\left(0\le Z\le\frac{1}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)=0.6826\quad\therefore\quad P\left(0\le Z\le\frac{1}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)=0.3413$$

주어진 표준정규분포표에서 $\frac{1}{\frac{3}{\sqrt{n}}}=1\quad\sqrt{n}=3$

$\therefore\ n=9$

4. 답 576

모집단의 표준편차를 σ라 하면 표본의 크기가 16이고, 모평균 m을 신뢰도 99%로 추정한 신뢰구간에서 $2\cdot 2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{9}}=55.58-50.42=5.16$

이 때, $\sigma=3$이므로 표본의 크기가 n이고, 모평균 m을 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간에서

$$2\cdot 1.96\cdot\frac{3}{\sqrt{n}}=53.25-52.76=0.49$$

$\sqrt{n}=24\quad\therefore\ n=576$

5. 답 ⑤

100명 중 A회사의 스마트폰을 사용하는 사람의 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면

$$E(\hat{p})=p=0.2\qquad\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=\sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{100}}=0.04$$

즉, 표본의 크기 $n=100$은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 정규분포 $N(0.2\ 0.04^2)$을 따르고

$Z=\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}$는 표준정규분포 $N(0,\ 1^2)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$P\left(\hat{p}\le\frac{30}{100}\right)=P\left(Z\le\frac{0.3-0.2}{0.04}\right)=P(Z\le 2.5)=0.9938$$

6. 답 ④

$\mathrm{E}(\hat{p})=p=0.2 \qquad \mathrm{V}(\hat{p})=\dfrac{p(1-p)}{n}=\dfrac{0.2\cdot 0.8}{64}=0.0025$이고 $n=64$는 충분히 큰 수이므로

$\hat{p}$은 정규분포 $\mathrm{N}(0.2\ 0.0025)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\hat{p}-0.2}{0.05}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\hat{p}\geq 0.25)=\mathrm{P}\left(Z\geq \dfrac{0.25-0.2}{0.05}\right)=\mathrm{P}(Z\geq 1)=0.1587$

19강 일차변환의 뜻과 여러 가지 일차변환

1. 답 ②

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -3 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a \\ 3 \end{pmatrix}$이므로 일차변환 f에 의하여 점 $(-1,\ 0)$이 옮겨지는 점의 좌표는 $(-a,\ 3)$

이다. 이 점이 제1사분면 위의 점이므로 $\therefore\ a<0$

또, $\begin{pmatrix} a & 1 \\ -3 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -b \end{pmatrix}$이므로 일차변환 f에 의하여 점 $(0,\ -1)$이 옮겨지는 점의 좌표는 $(-1,\ -b)$

이다. 이 점이 제3사분면 위의 점이므로 $\therefore\ b>0$

이 때, $\begin{pmatrix} a & 1 \\ -3 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4a+2 \\ 12+2b \end{pmatrix}$이므로 $a<0,\ -4a>0,\ -4a+2>2$이고,

$b>0,\ 2b>0,\ 12+2b>12$

따라서 $(-4a+2,\ 12+2b)$는 제1사분면 위에 있는 점이다.

2. 답 ②

일차변환을 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

이 식을 연립하여 풀면 $a=7,\ b=-11,\ c=-3,\ d=5 \quad \therefore \begin{pmatrix} 7 & -11 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

따라서 $\begin{pmatrix} 7 & -11 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -47 \\ 21 \end{pmatrix}$

3. 답 ③

$f(2P-Q)=2f(P)-f(Q)=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$f(P+3Q)=f(P)+3f(Q)=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

연립하면 $f(P)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ f(Q)=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\therefore\ f(2P-3Q)=2f(P)-3f(Q)=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$

4. 답 ⑤

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore$ Q$(3,\ 2)$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore$ R$(-3,\ -2)$

$\triangle$PQR에서 $\overline{\mathrm{QR}}=2\sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{PR}}=5\sqrt{2}$ $\quad\therefore$ $\overline{\mathrm{QR}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{PR}}^2$이므로 $\angle\mathrm{QPR}=90^\circ$

$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PR}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{5}$ $\quad\therefore\ \cot\theta=5$

5. 답 ⑤

곡선 $y=x^2$이 행렬 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$로 나타내어지는 닮음변환에 의하여 곡선 $y=\dfrac{2}{5}x^2$으로 옮겨졌다고 하자.

주어진 변환에 의하여 점 $(x,\ y)$가 점 $(x',\ y')$으로 옮겨진다고 하면 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$에서

$x'=kx$, $y'=ky$

점 $(x',\ y')$은 곡선 $y=\dfrac{2}{5}x^2$위의 점이므로 대입하면 $ky=\dfrac{2}{5}(kx)^2$, $y=\dfrac{2k}{5}x^2=x^2$ $\quad\therefore\ k=\dfrac{5}{2}$

따라서 두 곡선의 닮음비가 $1:\dfrac{5}{2}=2:5$이므로 $\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OQ}}=2:5$이므로 $\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{PQ}}=2:3$

$\therefore$ OP $=6$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=9$

6. 답 ④

두 직선 l_1, l_2 위의 한 점을 각각 X_1, X_2라 할 때, $\angle\mathrm{P}_1\mathrm{OX}_1=\alpha$, $\angle\mathrm{X}_2\mathrm{OP}_1=\beta$로 놓으면

$\alpha+\beta=30^\circ$이다. $\angle\mathrm{P}_2\mathrm{OP}_1=\angle\mathrm{P}_2\mathrm{OX}_2+\angle\mathrm{X}_2\mathrm{OP}_1=\angle\mathrm{X}_2\mathrm{OP}+\angle\mathrm{X}_2\mathrm{OP}_1$

$$=(\alpha+\beta+\alpha)+\beta=2(\alpha+\beta)=60^\circ$$

즉, 점 $\mathrm{P}_2(a,\ b)$는 점 $\mathrm{P}_1(1,\ \sqrt{3})$을 원점을 중심으로 60° 회전시킨 것이다.

$\therefore\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos60^\circ & -\sin60^\circ \\ \sin60^\circ & \cos60^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\quad\therefore\ a^2+b^2=1+3=4$

20강 일차변환의 합성과 역변환

1. 답 23

두 일차변환 f, g를 나타내는 행렬이 각각 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c & d \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이고 합성변환 $g\circ f$를 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix} c & d \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 계산하면 $a=-3$, $b=-1$, $c=-3$, $d=-2$이므로

$a^2+b^2+c^2+d^2=(-3)^2+(-1)^2+(-3)^2+(-2)^2=9+1+9+4=23$

2. 답 ④

주어진 일차변환 f는 원점을 중심으로 60° 회전한 회전변환과 원점을 중심으로 2배 확대하는 닮음변환

의 합성변환이다. 일차변환을 f를 나타내는 행렬을 A라 하면

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos60^\circ&-\sin60^\circ\\\sin60^\circ&\cos60^\circ\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\cos60^\circ&-\sin60^\circ\\\sin60^\circ&\cos60^\circ\end{pmatrix}$$

합성변환 $f\circ f\circ f$가 나타내는 행렬은 $\mathrm{A}^3=2^3\begin{pmatrix}\cos180^\circ&-\sin180^\circ\\\sin180^\circ&\cos180^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&0\\0&-8\end{pmatrix}$

따라서 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&0\\0&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}$ $\quad\therefore\ a+b=8+8=16$

3. 답 ①

일차변환 f를 나타내는 행렬을 A라 하면 $\mathrm{A}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\mathrm{A}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$에서 $\mathrm{A}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}$ $\therefore\ \mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-5&4\\-6&5\end{pmatrix}$

이 때, 일차변환 f의 역변환 f^{-1}를 나타내는 행렬은 A^{-1}이므로 $\therefore\ \begin{pmatrix}-5&4\\-6&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

4. 답 ⑤

두 일차변환 f, g를 나타내는 행렬을 각각 A, B라 하면 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&-3\\1&-2\end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$이고 $ad-bc\neq0$

이므로 B^{-1}가 존재한다. 이 때, 합성변환 $(g\circ f)^{-1}\circ g$를 나타내는 행렬은

$(\mathrm{BA})^{-1}\mathrm{B}=(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{B})=\mathrm{A}^{-1}$

따라서 $\mathrm{A}^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\mathrm{A}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\8\end{pmatrix}$ $\quad\therefore\ p+q=13+8=21$

5. 답 ②

직선 l 위의 임의의 점의 좌표를 $(x,\ mx)$로 놓으면 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\mx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+amx\\2x-mx\end{pmatrix}$

에서 $x'=x+amx$, $y'=2x-mx$이다. 주어진 일차변환에 의하여 직선 l은 직선 l로 옮겨지므로

$y'=mx'$이 성립한다. 따라서 대입하면 $2x-mx=m(x+amx)$

항등식으로 풀면 $2-m=m+am^2$, $m(2+am)=2$ 이때, $a,\ m$은 정수이므로 만족하는 값은

$m=1$일 때 $a=0$, $m=-1$일 때 $a=4$뿐이다. $\therefore$ 2개

6. 답 ④

행렬 $\begin{pmatrix}-1&3\\-2&6\end{pmatrix}$으로 나타내어지는 일차변환 f에 의하여 좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$가 점 $(x',\ y')$으로

옮겨진다고 하면 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\-2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+3y\\-2x+6y\end{pmatrix}$

즉, $x'=-x+3y$, $y'=-2x+6y$이고 $y'=2x'$이 성립하므로 일차변환 f에 의하여 좌표평면

전체는 직선 $y=2x$로 옮겨진다. 한편 등식 $x^2+y^2=4$를 만족시키는 실수 $x,\ y$에 대하여

$x'=-x+3y=k$ (k는 실수)로 놓으면 $x^2+y^2=4$는 중심 $(0,\ 0)$에서 직선 $-x+3y=k$에

이르는 거리가 반지름의 길이보다 작거나 같아야 하므로 $\dfrac{|k|}{\sqrt{1+9}}\le2$ $\quad\therefore\ -2\sqrt{10}\le k\le2\sqrt{10}$

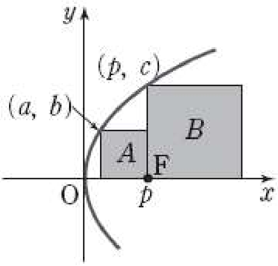
따라서 일차변환 f에 의하여 원은 선분으로 옮겨진다. 이 때 구하는 길이 l은

$$l=\sqrt{(2\sqrt{10}+2\sqrt{10})^2+(4\sqrt{10}+4\sqrt{10})^2}=\sqrt{800}=20\sqrt{2}$$

21강 포물선

1. 답 ⑤

포물선 $y^2=4px$의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이다. 넓이가 A, B인 두 정사각형의 꼭짓점 중 포물선 위의 점의 좌표를 각각 $(a,\ b)$, $(p,\ c)$ $(0<a<p,\ b>0,\ c>0)$라 하면 넓이가 B인 정사각형의 한 변의 길이는 c이므로 $B=c^2=4p\cdot p=4p^2$



넓이가 A인 정사각형의 한 변의 길이는 $b=p-a$이므로

$A=(p-a)^2=b^2=4pa$에서 $a^2-6pa+p^2=0$

$0<a<p$이므로 $a=3p-2\sqrt{2}\,p=(3-2\sqrt{2})p$

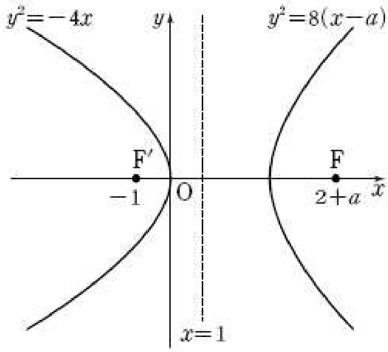
$\therefore\ A=4p^2(3-2\sqrt{2})$ $\quad\therefore\ \dfrac{A}{B}=3-2\sqrt{2}$

2. 답 ③

포물선 $y^2=8(x-a)=4\cdot 2(x-a)$의 초점은 $\mathrm{F}(2+a,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-2+a$이다.

또, $y^2=-4x=4\cdot(-1)x$의 초점은 $\mathrm{F}'(-1,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=1$이므로 $-2+a=1$ $\quad\therefore\ a=3$

따라서, $\mathrm{F}(5,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-1,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{FF}'}=6$



3. 답 ④

세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3라 하면

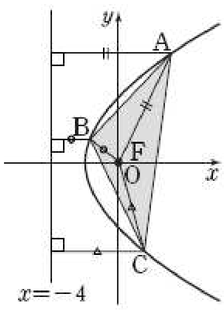
포물선 $y^2=8x+16=4\cdot 2(x+2)$의 초점은 $(0,\ 0)$

준선의 방정식은 $x=-4$이고 포물선 위의 점에서 초점과 준선에 이르는 거리가 같으므로

$\overline{\mathrm{AF}}=x_1+4$, $\overline{\mathrm{BF}}=x_2+4$, $\overline{\mathrm{CF}}=x_3+4$

이때, $\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{CF}}=15=x_1+x_2+x_3+12$

$\therefore\ x_1+x_2+x_3=3$이므로 무게중심의 x좌표는 1이다.



4. 답 ⑤

(ⅰ) $m=0$일 때, 직선 $y=0$과 포물선 $y^2=6x$의 교점의 개수는 1개이다. $\therefore\ f(0)=1$

(ⅱ) $m\neq 0$일 때, 직선 $y=m(x+1)$과 포물선 $y^2=6x$의 교점의 개수는 이차방정식 $\{m(x+1)\}^2=6x$의 개수와 같다. 즉, $m^2x^2+2(m^2-3)x+m^2=0$에서

$\dfrac{D}{4}=9-6m^2$이다.

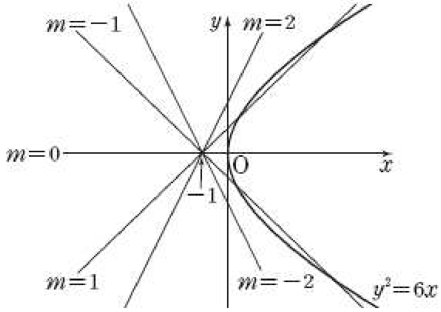
$f(-3)=-45<0$, $f(-2)=-15<0$, $f(-1)=3>0$

$f(1)=3>0$, $f(2)=-15<0$, $f(3)=-54<0$

따라서

$f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(-3)$

$=0+0+2+1+2+0+0=5$



5. 답 ③

포물선 $y^2=4\cdot\dfrac{1}{2}x$의 초점의 좌표는 $F\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$이다. 점 $P(a,\ b)$

에서의 접선의 방정식은 $by=2\cdot\dfrac{1}{2}(x+a)$, $y=\dfrac{1}{b}(x+a)$

또, 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{b}$이므로 점 P를 지나고 점 P에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y-b=-b(x-a)$이다. $y=0$일 때, $x=a+1$이므로 $Q(a+1,\ 0)$

삼각형 PFQ의 넓이가 $\dfrac{5}{2}$이므로 $\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{2}\right)\cdot b=\dfrac{5}{2}$ ⋯ ㉠

또, 점 $P(a,b)$는 포물선 $y^2=2x$ 위의 점이므로 $b^2=2a$ ⋯ ㉡

정리하면 $b^3+b-10=(b-2)(b^2+2b+5)=0$이고 b가 실수이므로 $b=2$, $a=2$

$\therefore\ a-b=2-2=0$

6. 답 104

점 P에서 포물선 $y^2=8y$에 그은 접선의 좌표를 $(a,\ b)$라 하자. 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax=4(y+b)$이다. 이 직선이 점 $(1,\ -3)$을 지나므로 $a=4(b-3)$ ⋯ ㉠

또, 점 $(a,\ b)$는 포물선 $x^2=8y$ 위의 점이므로 $a^2=8b$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a^2-2a-24=(a-6)(a+4)=0$ $\therefore\ a=6$ 또는 $a=-4$

따라서 두 점 X, Y의 x좌표를 각각 6, -4라 하면 준선의 방정식은 $y=-2$이므로

$Q(6,\ -2)$, $R(-4,\ -2)$이다. 따라서 두 점 사이의 거리 공식을 이용하면

$\therefore\ \overline{PQ}+\overline{PR}=2\sqrt{26}$ 이므로 $\therefore\ \{\overline{PQ}+\overline{PR}\}^2=104$

22강 타원

1. 답 14

두 점 $F(2,\ 0)$, $F'(-2,\ 0)$에서의 거리의 합이 일정한 점들이 그리는 도형은 타원이 된다.

구하는 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라 하면 $2^2=a^2-b^2$ $\therefore\ a^2=b^2+4$

또, 이 타원이 점 $P(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$을 지나므로 $\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{3}{b^2}=1$, a^2b^2을 곱하면 $3a^2+2b^2=a^2b^2$

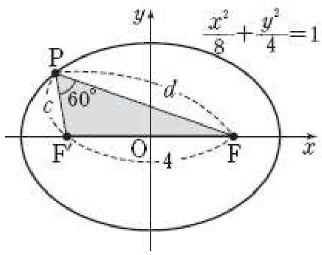
이므로 $a^2=b^2+4$을 대입하면 $b^4-b^2-12=(b^2-4)(b^2+3)=0$이므로 $\therefore\ b^2=4,\ a^2=8$

즉, 구하는 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$이므로 $x=1$을 대입하면 $y=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

두 점 $\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)$이므로 $l=\sqrt{14}$이므로 $l^2=14$

2. 답 ⑤

구하는 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라 하자. 초점이 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$이므로 $2^2=a^2-b^2$



이 타원이 점 (0, 2)를 지나므로 $b^2=4$, $a^2=8$ 따라서 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$

또, 이 타원의 장축의 길이는 $2\cdot2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{PF}'}=c$, $\overline{\mathrm{PF}}=d$라 하면 $c+d=4\sqrt{2}$

$\angle\mathrm{FPF}'=60^\circ$이므로 $\cos60^\circ=\dfrac{c^2+d^2-4^2}{2cd}=\dfrac{1}{2}$, $(c+d)^2=(4\sqrt{2})^2$에서 $c^2+2cd+d^2=32$

이므로 연립하면 $\dfrac{32-2cd-16}{2cd}=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\ cd=\dfrac{16}{3}$

따라서 삼각형 FPF'의 넓이

$$S=\frac{1}{2}\cdot cd\cdot\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore\ 9S^2=9\cdot\frac{48}{9}=48$$

3. 답 ②

점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ (단, $x_1>0,\ y_1>0$)이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{x_1x}{8}+\dfrac{y_1y}{2}=1$ 즉, $xx_1+4yy_1-8=0$

$\overline{\mathrm{OH}}$의 길이는 원점에서 직선까지의 거리이므로 $\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{|-8|}{\sqrt{x_1^2+(4y_1)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{x_1^2+16y_1^2}}$

또, 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$은 타원 위의 점이므로 $\dfrac{x_1^2}{8}+\dfrac{y_1^2}{2}=1$ 즉, $x_1^2=8-4y_1^2$

이 때, 직각삼각형 OPH에서 $\overline{\mathrm{PH}}^2=\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2=(x_1^2+y_1^2)-\dfrac{64}{x_1^2+16y_1^2}$

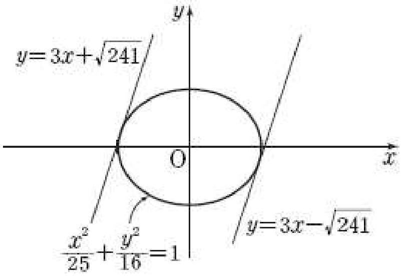
$$=8-4y_1^2+y_1^2-\frac{64}{2+3y_1^2}=8-3y_1^2-\frac{16}{2+3y_1^2}$$

$$=10-\left((2+3y_1^2)+\frac{16}{2+3y_1^2}\right)$$

$$\le 10-\left(2\sqrt{(2+3y_1^2)\cdot\frac{16}{2+3y_1^2}}\right)=10-8=2$$

즉, $\overline{\mathrm{PH}}^2 \le 2$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}$의 길이의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.

4. 답 241



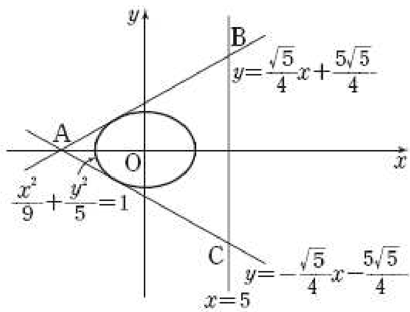
타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{25\cdot 9+16}=3x\pm\sqrt{241}$

$a=\sqrt{241}$, $b=-\sqrt{241}$ $(\because a>b)$

$\therefore \left(\frac{a-b}{2}\right)^2=(\sqrt{241})^2=241$

5. 답 125



점 A에서 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$에 그은 접선의 기울기를 m_1, m_2 $(m_1>0,\ m_2<0)$라 하면 접선의 방정식은

$y=m_1x+\sqrt{9m_1^2+5}$, $y=m_2x-\sqrt{9m_2^2+5}$

이 두 직선이 점 $\mathrm{A}(-5,\ 0)$을 지나므로

$-5m_1+\sqrt{9m_1^2+5}=0$에서 $9m_1^2+5=(5m_1)^2$

$-5m_2+\sqrt{9m_2^2+5}=0$에서 $9m_2^2+5=(5m_2)^2$

따라서 m_1, m_2는 방정식 $(5m)^2=9m^2+5$의 해이다.

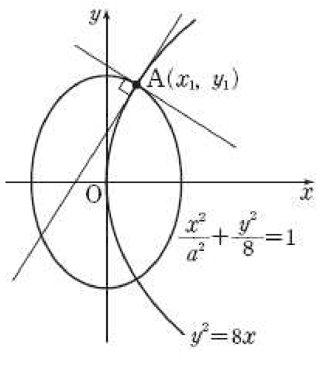
즉, $m_1=\frac{\sqrt{5}}{4}$, $m_2=-\frac{\sqrt{5}}{4}$이므로 두 접선의 방정식은

$y=\frac{\sqrt{5}}{4}x+\frac{5\sqrt{5}}{4}$, $y=-\frac{\sqrt{5}}{4}x-\frac{5\sqrt{5}}{4}$

이 두 직선이 직선 $x=5$와 만나는 점의 좌표는 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{5\sqrt{5}}{2}\right)$, $\mathrm{C}\left(5,\ -\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)$이다.

따라서, 선분 BC의 길이는 $l=\overline{\mathrm{BC}}=5\sqrt{5}$ 이므로 $l^2=125$

6. 답 ④



포물선과 타원의 교점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하자. 점 A를 지나고 포물선 $y^2=8x$와 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{8}=1$에 접하는 직선의 방정식은 각각 $yy_1=4(x+x_1)$, $\frac{xx_1}{a}+\frac{yy_1}{8}=1$이고 두 직선의 기울기는 각각 $\frac{4}{y_1}$, $-\frac{8x_1}{y_1a}$이다.

두 접선이 서로 수직이므로 $\frac{4}{y_1} \cdot \left(-\frac{8x_1}{y_1 a}\right) = -1 \quad \therefore \frac{32x_1}{y_1^2 a} = 1$

그런데 점 (x, y_1)는 이 포물선 $y^2 = 8x$위의 점이므로 $y_1^2 = 8x_1$

대입하면 $\frac{4}{a} = 1$이므로 $\therefore a = 4$

23강 쌍곡선

1. 답 ①

$4x^2 - 9y^2 - 8x + 18ky + 4 = 0$을 변형하면 $4(x^2 - 2x) - 9(y^2 - 2ky) = -4$

$$4(x-1)^2 - 9(y-k)^2 = -9k^2$$

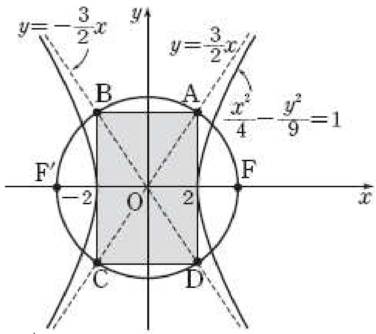
$$\frac{(x-1)^2}{\frac{9k^2}{4}} - \frac{(y-k)^2}{k^2} = -1$$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는 $2k$이다. 이때, $2k = 4$이므로 $\therefore k = 2$

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = -1$$

쌍곡선의 중심의 좌표는 $(1, 2)$이므로 $a = 1, b = 2 \quad \therefore abk = 4$

2. 답 24



$4 + 9 = 13 = (\sqrt{13})^2$이므로 쌍곡선의 두 초점은

$F(\sqrt{13}, 0)$, $F'(-\sqrt{13}, 0)$이다. 또 점근선의 방정식은 $y = \pm\frac{3}{2}x$

선분 FF′을 지름으로 하는 원의 방정식은 $x^2 + y^2 = 13$이다.

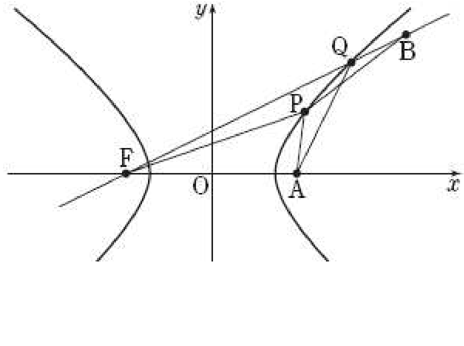
따라서, 원과 쌍곡선을 연립하면 $x^2 + \frac{9}{4}x^2 = 13$, $x^2 = 4$

$\therefore x = \pm 2, y = \pm 3$

이제 네 점의 좌표는 각각 $A(2, 3)$, $B(-2, 3)$, $C(-2, -3)$, $D(2, -3)$

이므로 사각형 ABCD의 넓이는 $4 \cdot 6 = 24$이다.

3. 답 45



$5 + 4 = 9 = 3^2$이므로 쌍곡선의 두 초점은

$F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$이다. 또, 직선 FB가 쌍곡선과

만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 Q라 하면

$\overline{FP} - \overline{PA} = \overline{FQ} - \overline{QA} \quad \cdots ㉠$

$\overline{FQ} + \overline{QB} \le \overline{FP} + \overline{PB} \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 변변 더하면

$$\overline{FP}-\overline{PA}+\overline{FQ}+\overline{QB}\le \overline{FQ}-\overline{QA}+\overline{FP}+\overline{PB}$$
$$\overline{QA}+\overline{QB}\le \overline{PA}+\overline{PB}$$

따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}$가 최소가 되는 경우는 점 P와 점 Q가 일치할 때이다.

점 Q가 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{FQ}-\overline{QA}=2\sqrt{5}$ ⋯ ㉢ $\qquad$ $\overline{FQ}+\overline{QB}=5\sqrt{5}$ ⋯ ㉣

㉣-㉢에서 $\overline{QA}+\overline{QB}=3\sqrt{5}$이므로 $\overline{PA}+\overline{PB}$의 최솟값 $k=3\sqrt{5}$이다. $\therefore\ k^2=45$

4. 답 12

쌍곡선 $x^2-3y^2=6$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}x$이므로 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$이다.

또, 쌍곡선 위의 점 $P(-3,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $y=-x-2$이다.

이제 점근선 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$와 접선 $y=-x-2$를 연립하면 $x=-3+\sqrt{3}$, $y=1-\sqrt{3}$을 얻는다.

따라서 $A(-3-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$, $B(-3+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$이다. 또한 두 점근선이 이루는 예각의 크기는 $\dfrac{\pi}{3}$이므로 삼각형 OAB에서 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$, $\overline{OA}=2(\sqrt{3}+1)$, $\overline{OB}=2(\sqrt{3}-1)$

따라서 삼각형의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot sin(\angle AOB)=\frac{1}{2}\cdot 2(\sqrt{3}+1)\cdot 2(\sqrt{3}-1)\cdot \sin 60^\circ=2\sqrt{3}$$

$\therefore\ S^2=12$

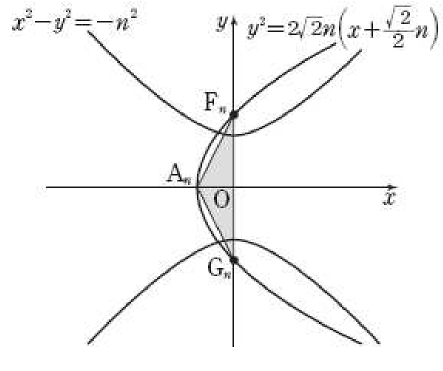
5. 답 385

$x^2-y^2=-n^2$의 양변을 n^2으로 나누면 $\dfrac{x^2}{n^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=-1$

이고 $n^2+n^2=(\sqrt{2}n)^2$이므로 초점은 $F_n(0,\ \sqrt{2}n)$, $G_n(0,\ -\sqrt{2}n)$. 따라서 $\overline{F_nG_n}=2\sqrt{2}n$

원점이 초점이고 두 점 F_n, G_n을 지나는 포물선의 방정식을 $y^2=4p(x-m)$이라 하면 이 포물선의 초점의 좌표는 $(p+m,\ 0)$이므로 $p+m=0$이다. 또 포물선이 점 $(0,\ \sqrt{2}n)$을 지나므로

$$2n^2=4p(-m)$$



$m=-p$를 대입하면 $p=\dfrac{\sqrt{2}}{2}n$, $m=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}n$을 얻는다.

결국 포물선의 방정식은 $y^2=2\sqrt{2}n\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}n\right)$이고 이 식에 $y=0$을 대입하면 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}n$이므로 $A_n\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}n,\ 0\right)$이다. $\therefore\ \overline{OA_n}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}n$

따라서 $S_n=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{F_nG_n}\cdot\overline{OA_n}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}n\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}n=n^2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}S_k=\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=385$

6. 답 4

$3x^2-y^2=3$에서 $y^2=3x^2-3$을 $9x^2+13y^2=117$에 대입하면 $48x^2=156$, $x^2=\dfrac{13}{4}$

$$\therefore\ x=\pm\frac{\sqrt{13}}{2},\ y=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

제1사분면 위의 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{\sqrt{13}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 점 P에서 타원 $9x^2+13y^2=117$에 그은 접선 l의 방정식은 $\dfrac{\sqrt{13}}{26}x+\dfrac{\sqrt{3}}{6}y=1$이고 점 P에서 쌍곡선 $3x^2-y^2=3$에 그은 접선 m의 방정식은 $\dfrac{\sqrt{13}}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=1$이다.

따라서 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{26}{\sqrt{13}},\ 0\right)$, $\mathrm{R}\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}},\ 0\right)$이므로 $\overline{\mathrm{OQ}}\cdot\overline{\mathrm{OR}}=\dfrac{26}{\sqrt{13}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{13}}=4$

24강 공간도형

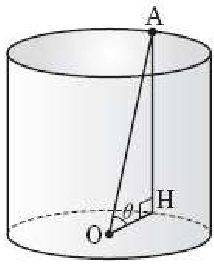
1. 답 ①

ㄱ. 서로 만나는 두 모서리를 포함하는 면은 직육면체의 한 면이므로 이 면과 평행한 면은 반드시 한 개 존재한다. (참)

ㄴ. 면 ABCD와 면 EFGH에 모두 만나는 면은 면 AEFB, 면 BFGC, 면 DHGC, 면 AEHD의 4개 이다. (거짓)

ㄷ. 면 ABCD와 평행한 두 모서리 EF와 FG는 만난다. (거짓)

2. 답 ④



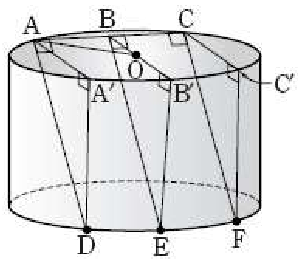
그림의 점 A에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 AH는 밑면과 수직이므로 $\overline{\mathrm{AH}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$

또, 직각삼각형 OHA에서 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$이므로 $\tan\theta=3$

이때, $\overline{\mathrm{AH}}=12$이므로 $\tan\theta=\dfrac{12}{\overline{\mathrm{OH}}}=3$ $\therefore\ \overline{\mathrm{OH}}=4$

따라서 밑면의 넓이는 16π

3. 답 317



그림과 같이 점 A, B, C에서 각각 현 AC와 수직인 직선을 점 A, B, C가 있는 밑면 위에 그을 때, 밑면인 원의 둘레와 만나는 점을 각각 A′, B′, C′이라 하자. 다시 점 A′, B′, C′에서 바닥의 밑면인 원에 수선의 발을 내리면 이 수선의 발은 삼수선의 정리에 의하여 각각 점 D, E, F와 일치한다. 한편, 점 A, B, C 가 있는 밑면인 원의 중심 O에 대하여

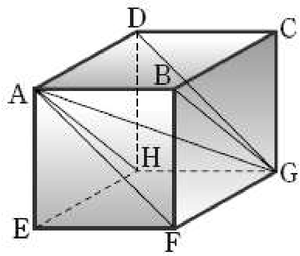
직선 BB′는 점 O를 지나고, $\overline{AB}=3$, $\overline{OA}=5$이므로 $\overline{OB}=4$ $\quad\therefore\ \overline{BB'}=4+5=9$

이때, $\overline{AA'}=\overline{CC'}=2\overline{OB}=2\cdot4=8$ $\quad\therefore\ \overline{AD}=\overline{CF}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$

$\overline{BE}=\sqrt{9^2+6^2}=3\sqrt{13}$

$\therefore\ \overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2=10^2+(3\sqrt{13})^2+10^2=317$

4. 답 ⑤



오른쪽 그림과 같이 세 점 A, D, F를 지나는 평면은 평면 AFGD와 같고, 세 점 A, B, H를 지나는 평면은 평면 ABGH와 같다. 이 때, 직선 AG는 평면 AFGD와 평면 ABGH에 모두 포함되므로 두 평면의 교선은 직선 AG이다.
점 A에서 평면 BFGC에 내린 수선의 발은 점 B이므로 선분 AG의 평면 BFGC 위로의 정사영은 선분 BG이다.

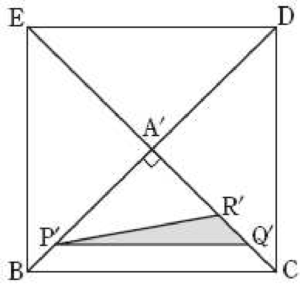
$\therefore\ \theta=\angle BGA$

이 때, 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면 $\overline{AG}=\sqrt{3}a$, $\overline{BG}=\sqrt{2}a$

이므로 직각삼각형 ABG에서 $\cos\theta=\dfrac{\overline{BG}}{\overline{AG}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ 60\cdot\cos^2\theta=60\cdot\dfrac{2}{3}=40$

5. 답 26



삼각형 ABC의 밑면으로의 정사영을 삼각형 A′BC, 세 점 P, Q, R의 밑면으로의 정사영을 각각 P′, Q′, R′ 이라 하면 삼각형 PQR의 정사영은 삼각형 P′Q′R′이다.
밑면 BCDE는 정사각형이므로

$\overline{A'B}=\overline{A'C}=2\sqrt{2}$, $\quad\angle BA'C'=90^\circ$

점 P가 모서리 AB를 3:1로 내분하므로 점 P′는 선분 A′B를 3:1로 내분한다.

$\therefore\ \overline{A'P'}=2\sqrt{2}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

마찬가지로 $\overline{A'Q'}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

직각삼각형 A′P′Q′에서 $\overline{P'Q'}=\sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=3$

점 R가 선분 AC의 중점이므로 점 R′은 선분 A′C의 중점이다. $\quad\therefore\ \overline{A'R'}=\sqrt{2}$

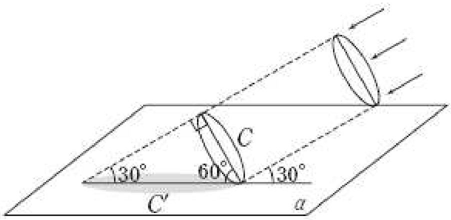
$\therefore\ \overline{P'Q'}=\overline{A'Q'}-\overline{A'R'}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

또한, 직각삼각형 A′P′R′에서 $\overline{P'R'}=\sqrt{\overline{A'P'}^2+\overline{A'R'}^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$

따라서 삼각형 P′Q′R′의 둘레의 길이는 $3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{26}}{2}=\dfrac{6+\sqrt{2}+\sqrt{26}}{2}$ $\quad\therefore\ k=26$

6. 답 15

평면 α에 생기는 지구본의 그림자는 반지름의 길이가 r인 원 C에 태양광선이 수직으로 비출 때, 평면 α에 생기는 그림자 C'과 같다.

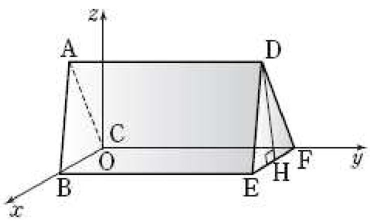


그림과 같이 그림자 C'의 정사영이 원 C이므로 원 C의 넓이를 S. 원 C의 정사영 C'의 넓이를 S'이라 하면 $\cos 60^{\circ} = \dfrac{S}{S'}$에서 $S = S'\cos 60^{\circ} = 450 \cdot \dfrac{1}{2} = 225$

$\pi r^2 = 225$이므로 $r^2 = \dfrac{225}{\pi}$ $\quad r = \dfrac{15}{\sqrt{\pi}}$ $\quad \therefore\ k = 15$

25강 공간좌표

1. 답 24



꼭짓점 D의 xy평면 위로의 정사영을 H라 하면 선분 EF는 y축과 수직이고, 삼각형 DEF는 이등변삼각형이므로 점 H는 선분 EF의 중점이다.

따라서, $\overline{HF} = 1$이고 점 D의 x좌표는 1이다.

또한 $\overline{AD} = 6\sqrt{2}$이므로 점 D의 y좌표는 $6\sqrt{2}$이다.

한편 직각삼각형 DEH에서 $\overline{DE} = 3$, $\overline{EH} = 1$이므로 $\overline{DH} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$에서 점 D의 z좌표는 $2\sqrt{2}$이다.

따라서 꼭짓점 $D(1,\ 6\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$, 꼭짓점 D를 z축에 대칭이동한 점 $G(-1,\ -6\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$

그러므로 $a = -1$, $b = -6\sqrt{2}$, $c = 2\sqrt{2}$ $\quad \therefore\ (-1) \cdot (-6\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{2} = 24$

2. 답 ②

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\dfrac{-3-6+a}{3},\ \dfrac{6+0+b}{3},\ \dfrac{-9+8+c}{3}\right) = (0,\ 0,\ 0)$이다.

$\therefore\ a = 9$, $b = -6$, $c = 1$ $\quad \therefore\ a + b + c = 4$

3. 답 ③

ㄱ. 두 점 $A(-1,\ 4,\ 2)$, $B(3,\ -2,\ 4)$에 대하여 $C(-2,\ -2,\ 0)$라 하면 조건에서 점 C는 xy의 평면위에 있고 $\overline{AC} = \overline{AB} = \sqrt{41}$이므로 성립한다. (참)

ㄴ. 두 점 $A(-1,\ 4,\ 2)$, $B(3,\ -2,\ 4)$에서 같은 거리에 있는 xy 평면위의 점을 $P(x,\ y,\ 0)$라 하면 $\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2 + 4}$, $\overline{BP} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2 + 16}$에서

$\overline{AP}=\overline{BP}$ 이므로 제곱하여 정리하면 $2x-3y-2=0 \quad \therefore y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$

$T=\left\{(x,\ y,\ 0)\middle| y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right\}$ (참)

ㄷ. $\overline{AP}=\overline{BP}$ 이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}=2\overline{AP}$ 의 값이 최소일 때는 $\overline{AP}$ 의 값이 최소일 때이다.

$y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$에서 $P\left(x,\ \frac{2}{3}x-\frac{2}{3},\ 0\right)$이라 하면

$\overline{AP}=\sqrt{(x+1)^2+\left(\frac{2}{3}x-\frac{14}{3}\right)^2+4}=\sqrt{\frac{13}{9}\left(x^2-\frac{38}{13}x\right)+\frac{241}{9}}$

이것은 이차방정식 $x=\frac{19}{13}$일 때, $\overline{AP}$가 최소이다. 따라서 $y=\frac{2}{3}\cdot\frac{19}{13}-\frac{2}{3}=\frac{4}{13}$

$\therefore P\left(\frac{19}{13},\ \frac{4}{13},\ 0\right)$이다. (거짓)

4. 답 ④

점 $P(a,\ b,\ c)$가 y축 위에 있으므로 $a=c=0$이다. $\therefore P(0,\ b,\ 0)$

한편 선분 AP를 3:4으로 내분하는 점 Q가 zx 평면에 있으므로 $e=0$이다.

$e=\frac{3b+4\cdot 4}{3+4}=0$이므로 $b=-\frac{16}{3}$, $d=\frac{3\cdot 0+4\cdot 2}{3+4}=\frac{8}{7}$, $f=\frac{3\cdot 0+4\cdot 3}{3+4}=\frac{12}{7}$

$\therefore 3b+7(e+f)=3\left(-\frac{16}{3}\right)+7\left(\frac{8}{7}\right)+7\left(\frac{12}{7}\right)=-16+8+12=4$

5, 답 ②

$\overline{AO}=\overline{BO}$ 이므로 삼각형 OAB는 직각이등변삼각형이다. $\overline{MO}\perp\overline{AB}$ 이므로 $\overline{CM}\perp\overline{AB}$

삼각형 ABC의 넓이가 10이므로 $\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CM}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\overline{CM}=10 \quad \therefore \overline{CM}=5\sqrt{2}$

$\overline{OM}=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 OMC에서

$\overline{OC}=\sqrt{\overline{CM}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{50-2}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

$\therefore M(1,\ 1,\ 0),\ C(0,\ 0,\ 4\sqrt{3})$

점 D는 선분 MC를 1:2로 내분한 점이므로 $D\left(\frac{1\cdot 0+2\cdot 1}{1+2},\ \frac{1\cdot 0+2\cdot 1}{1+2},\ \frac{1\cdot 4\sqrt{3}+2\cdot 0}{1+2}\right)$

$\therefore D\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \quad \therefore \overline{DO}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{48}{9}}=\sqrt{\frac{56}{9}}=\frac{2\sqrt{14}}{3}$

6. 답 ⑤

두 구의 중심을 각각 C_1, C_2라 하면 $C_1(\sqrt{3},\ a\ ,1)$, $C_2(0,\ 1\ ,0)$

반지름의 길이가 2인 구 $(x-\sqrt{3})^2+(y-a)^2+(z-1)^2=4$는

a의 값에 따라 중심 C_1의 x좌표, z좌표가 각각 $x=\sqrt{3}$, $z=1$

이면서 y축에 평행하게 움직인다.

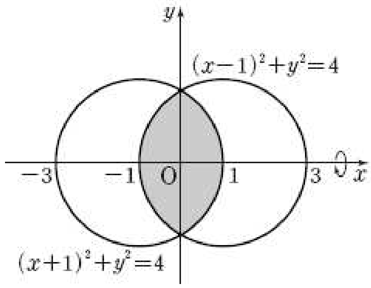
그런데 $\overline{C_1C_2}=\sqrt{3+(a-1)^2+1}=\sqrt{(a-1)^2+4}$ 이고 $\overline{C_1C_2}$

의 길이가 최소일 때, 공통영역의 부피는 최대가 된다.

그러므로 두 구가 만나는 공통영역의 부피 V가 최대일 때, $a=1$이다.

이때, $\overline{C_1C_2}=\sqrt{4}=2$이고 두 구의 반지름의 길이는 2이다.

따라서 V`가 최대일 때의 부피는 그림의 어두운 부분을 x축의 둘레로 회전시킬 때, 생기는 회전체의 부피와 같으므로

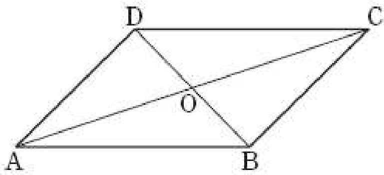


$$V=\pi\int_{-1}^{0}\{4-(x-1)^2\}dx=\pi\int_{0}^{1}\{4-(x+1)^2\}dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{1}\{4-(x+1)^2\}dx=\pi\int_{0}^{1}(-x^2-2x+3)dx=\frac{10}{3}\pi$$

26강 벡터의 뜻과 성분과 내적

1. 답 ⑤



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$에서 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$

$\therefore\ \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$

따라서 사각형 ABCD는 평행사변형이다.

$\angle DAB=\frac{\pi}{4}$이므로 $\angle ABC=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$

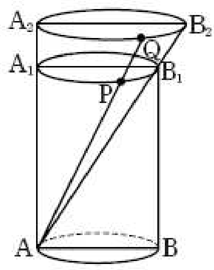
$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2-2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos\frac{3}{4}\pi=(2\sqrt{2})^2+2^2-2\cdot2\sqrt{2}\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=20$

$\therefore\ |\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}$ $\quad\therefore\ |\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}$

2. 답 ②

$\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EP}$이고 점 P가 선분 CD 위를 움직이므로 벡터 $\overrightarrow{EP}$의 크기는 점 P가 점 C에 있을 때 최대이다. 따라서 $|\overrightarrow{EP}|$의 최댓값은 $\sqrt{(\sqrt{3})^3+1^2}=\sqrt{4}=2$

3. 답 ④



$3\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{BA}=4\overrightarrow{BP}$에서 $\overrightarrow{BQ}=\dfrac{4\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BA}}{3}$이므로 점 Q는 선분 AP를 $4:1$로 외분하는 점이다.

그림에서 점 P가 점 A_1에 있을 때, 점 Q는 점 A_2에 있고,

점 P가 점 B_1에 있을 때, 점 Q는 점 B_2에 있다.

또한, $\overline{AQ}:\overline{AP}=4:3$이므로 삼각형 AA_2B_2와 삼각형 AA_1B_1에서 $\overline{A_2B_2}=\frac{4}{3}\overline{A_1B_1}=\frac{4}{3}\cdot3=4$

따라서 점 Q가 나타내는 도형의 길이는 반지름의 길이가 2인 원의 둘레의 길이이다.

$\therefore\ 2\pi\cdot2=4\pi$

4. 답 ③

원점을 O라 할 때, 점 P는 선분 AD위를 움직이는 점이므로 $0 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (1-t)(1,\ 1,\ 1) + t(1,\ 3,\ -1) = (1,\ 2t+1,\ 1-2t)$

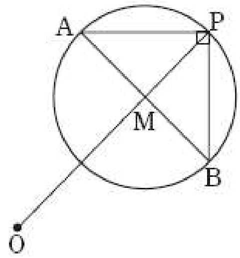
$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2,\ -2,\ 3) - (1,\ 2t+1,\ 1-2t) = (1,\ -2t-3,\ 2t+2)$

$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (-2,\ 1,\ 4) - (1,\ 2t+1,\ 1-2t) = (-3,\ -2t,\ 2t+3)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} &= (1,\ -2t-3,\ 2t+2) \cdot (-3,\ -2t,\ 2t+3) \\ &= -3 + (-2t-3)(-2t) + (2t+2)(2t+3) \\ &= 8t^2 + 16t + 3 \\ &= 8(t+1)^2 - 5\end{aligned}$$

$0 \le t \le 1$이므로 $t=0$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}}$의 최솟값은 3이다.

5. 답 ⑤



$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$를 만족시키려면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BP}}$이므로 점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

이 때, 이 원의 중심 M은 선분 AB의 중점이므로 M$(6,\ 8)$이고,

반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{MA}} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

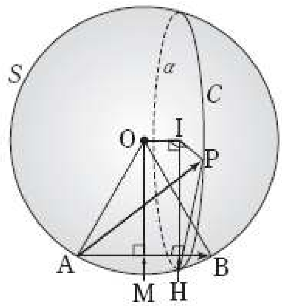
$$\therefore\ \overline{\mathrm{OM}} = \sqrt{6^2+8^2} = 10$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \overline{\mathrm{OP}} \le \overline{\mathrm{OM}} + \overline{\mathrm{MP}} = 10 + 5 = 15$

(단, 등호는 점 M이 선분 OP 위에 있을 때 성립한다.)

따라서 구하는 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최댓값은 15

6. 답 60



선분 AB의 중점을 M이라 하고, 점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

이때, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{AH}} = 4\overline{\mathrm{AH}} = 12$ 에서 $\overline{\mathrm{AH}} = 3$

따라서 점 P는 점 H를 지나고 직선 AB에 수직인 평면 α와 구가 만나서 생기는 원 C 위의 점이다.

이때, 구 S의 중심 O에서 평면 α에 내린 수선의 발을 I라 하면

점 I는 원 C의 중심이고 $\overline{\mathrm{OI}} = \overline{\mathrm{MH}} = 1$이다.

또, $\overline{\mathrm{OI}} \perp \alpha$이므로 $\overline{\mathrm{OI}} \perp \overline{\mathrm{IP}}$이다.

따라서 직각삼각형 OIP에서 $\mathrm{IP} = \sqrt{4^2-1^2} = \sqrt{15}$

따라서 점 P는 반지름의 길이가 $\sqrt{15}$인 원 위의 점이므로 점 P가 나타내는 도형의 길이 $l = 2\sqrt{15}\pi$

$$\therefore\ \frac{l}{\pi} = \frac{2\sqrt{15}\pi}{\pi} = 2\sqrt{15}$$

$$\therefore\ \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 = (2\sqrt{15})^2 = 60$$

27강 공간도형에서 직선과 평면의 방정식

1. 답 ⑤

원 $(x-4)^2+(y-2)^2=4,\ z=4$의 중심의 좌표는 $(4,\ 2,\ 4)$이므로 구하는 직선은 두 점 $(1,\ 0,\ -1),\ (4,\ 2,\ 4)$를 지난다. 따라서 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-0}{2-0}=\frac{z+1}{4-(-1)} \qquad \therefore\ \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{5}$$

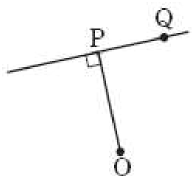
직선에 $(a,\ b,\ 9)$를 대입하면 $\dfrac{a-1}{3}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{9+1}{5}$이므로 $a=7,\ b=4 \quad \therefore\ a+b=11$

2. 답 ③

직선 $\dfrac{x+1}{2}=-y+1=\dfrac{z}{a}$의 방향벡터는 $\vec{u}=(2,\ -1,\ a)$이고, $\overrightarrow{AB}=(-a,\ 3,\ 3)$이므로 $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$에서

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=(2,\ -1,\ a)\cdot(-a,\ 3,\ 3)=-2a-3+3a=a-3=0 \qquad \therefore\ a=3$

3. 답 ⑤



$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$이므로 $\overrightarrow{OP}\perp\cdot\overrightarrow{PQ}$이다.

직선 $x-1=\dfrac{y+1}{2}=-z+1$의 방향벡터는 $\vec{u}=(1,\ 2,\ -1)$이고

$\overrightarrow{PQ}//\vec{u}$이므로 $\overrightarrow{OP}\perp\vec{u}$이어야 한다.

따라서 점 P는 원점 O에서 직선 $x-1=\dfrac{y+1}{2}=-z+1$에 내린 수선의 발이다.

이제 $x-1=\dfrac{y+1}{2}=-z+1=t$라 하면 $P(t+1,\ 2t-1,\ -t+1)$로 놓을 수 있다.

$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u}=(t+1,\ 2t-1,\ -t+1)\cdot(1,\ 2,\ -1)=t+1+2(2t-1)-(-t+1)=6t-2=0$

$\therefore\ t=\dfrac{1}{3}$이므로 $P\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right) \qquad a+b+c=\dfrac{5}{3}$

4. 답 ③

직선 OH의 방향벡터를 $\vec{u}=(1,\ 2,\ 2)$라 하면 $|\vec{u}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$

이때, $|\overrightarrow{OH}|=6=2|\vec{u}|$이므로 $\overrightarrow{OH}=2\vec{u}=(2,\ 4,\ 4)$ 또는 $\overrightarrow{OH}=-2\vec{u}=(-2,\ -4,\ -4)$이다.

직선 OH는 평면 $ax+by+cz+d=0$과 수직이므로 벡터 $\vec{u}$는 이 평면의 법선벡터이다.

(ⅰ) $\overrightarrow{OH}=(2,\ 4,\ 4)$인 경우

평면 $ax+by+cz+d=0$은 점 $H(2,\ 4,\ 4)$를 지나고 법선벡터가 $\vec{u}=(1,\ 2,\ 2)$이므로

$1\cdot(x-2)+2(y-4)+2(z-4)=0 \quad \therefore\ x+2y+2z-18=0$

$$\therefore\ \left|\frac{d}{2a+b+c}\right|=\left|\frac{-18}{2+2+2}\right|=3$$

(ⅱ) $\overrightarrow{OH}=(-2,\ -4,\ -4)$ 인 경우

평면 $ax+by+cz+d=0$은 점 $H(-2,\ -4,\ -4)$를 지나고 법선벡터가 $\vec{u}=(1,\ 2,\ 2)$이므로

$1\cdot(x+2)+2(y+4)+2(z+4)=0 \quad \therefore\ x+2y+2z+18=0$

$$\therefore \quad \left|\frac{d}{2a+b+c}\right| = \left|\frac{18}{2+2+2}\right| = 3$$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $\left|\frac{d}{2a+b+c}\right| = 3$

5. 답 ③

직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$. 평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}$ㅇ라 하면 $\vec{u} = (k,\ 1,\ 2k)$, $\vec{n} = (1\ ,-1,\ k)$이다.

ㄱ. $\theta = 0^{\circ}$이면 직선 l과 평면 α는 평행하므로 $\vec{u} \perp \vec{n}$이다. 따라서

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (k,\ 1,\ 2k) \cdot (1,\ -1,\ k) = k-1+2k^2 = (2k-1)(k+1) = 0$$

$$\therefore\ k = \frac{1}{2}\ (\because\ k > 0)\quad (\text{참})$$

ㄴ. $\theta = 90^{\circ}$이면 직선 l과 평면 α는 서로 수직이므로 두 벡터는 서로 평행하다. 따라서 0이 아닌 실수 t에 대하여 $\vec{u} = t\vec{n}$이 성립한다. 즉 $(k,\ 1,\ 2k) = t(1,\ -1,\ k) = (t,\ -t,\ tk)$
이때, 위의 세 등식을 동시에 만족하는 t, k의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $$\sin\theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|} = \frac{|k-1+2k^2|}{\sqrt{k^2+1^2+(2k)^2}\ \sqrt{1^2+(-1)^2+k^2}} = \frac{|2k^2+k-1|}{\sqrt{5k^2+1}\ \sqrt{k^2+2}}$$

$$\lim_{k\to\infty} sin\theta = \lim_{k\to\infty} \frac{|2k^2+k-1|}{\sqrt{5k^2+1}\ \sqrt{k^2+2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

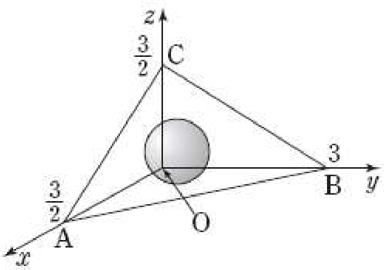
$$\therefore\ \lim_{k\to\infty} cos^2\theta = \lim_{k\to\infty}(1-\sin^2\theta) = 1 - \lim_{k\to\infty} sin^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}\quad (\text{참})$$

6. 답 ②

사면체 OABC에 내접하는 구의 반지름의 길이를 r라 하면 구의 중심의 좌표는 $(r,\ r,\ r)$이다. 이때, 구의 중심과 평면 $2x+y+2z=3$사이의 거리는 r이므로

$$\frac{|2r+r+2r-3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = r$$

$$\therefore\ r = \frac{3}{2}\ \text{또는}\ \frac{3}{8}$$



그런데 오른쪽 그림에서 $r = \frac{3}{2}$이면 구가 사면체 OABC에 내접할 수 없다.

따라서 만족하는 r의 값은 $\frac{3}{8}$