〈 2021(6)−가형20 〉

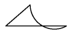
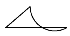
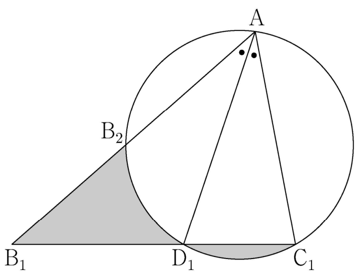
그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$이고 $\angle B_1AC_1=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 D_1, 세 점 A, D_1, C_1을 지나는 원이 선분 AB_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_2라 할 때, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 B_2D_1로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 호 C_1D_1로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

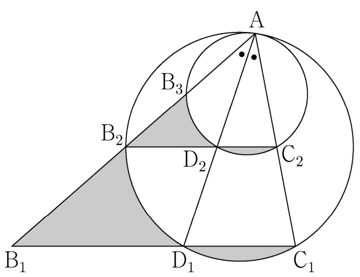
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1C_1에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1과 만나는 점을 각각 D_2, C_2라 하자. 세 점 A, D_2, C_2를 지나는 원이 선분 AB_2와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_3이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 B_3D_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 호 C_2D_2로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점][1](2021(6)−가형20)

R_1



R_2



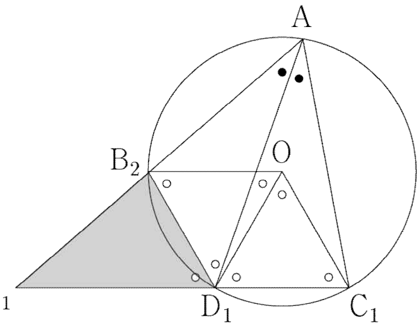
⋮ ⋮

① $\frac{27\sqrt{3}}{46}$ ② $\frac{15\sqrt{3}}{23}$ ③ $\frac{33\sqrt{3}}{46}$ ④ $\frac{18\sqrt{3}}{46}$ ⑤ $\frac{39\sqrt{3}}{46}$

1) [풀이1]

그림 R_1에서 그려진 원의 중심을 O라고 하자.

R_1



(단, ○ $=60^\circ$, ● $=30^\circ$)

우선 선분 B_1C_1의 길이를 구하자.

코사인법칙에 의하여

$\overline{B_1C_1}=\sqrt{3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos60^\circ}=\sqrt{7}$

원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle C_1OD_1=60^\circ(=2\angle C_1AD_1)$,

$\angle D_1OB_2=60^\circ(=2\angle D_1AB_2)$

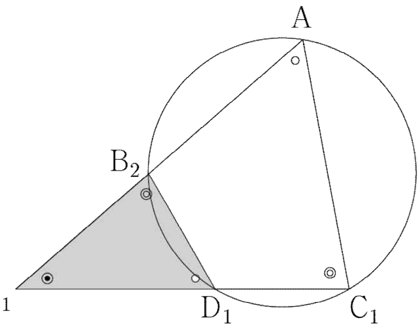
원의 정의와 이등변삼각형의 성질에 의하여

두 삼각형 OD_1C_1, OB_2D_1은 서로 합동인 정삼각형이다.

그런데 $\angle C_1AB_1=\angle B_2D_1B_1=60^\circ$ 이므로

두 삼각형 C_1AB_1, $B_2D_1B_1$은 서로 닮음이다. (아래 그림)

R_1



(단, ○ $=60^\circ$)

이제 $\overline{D_1C_1}=r$로 두자.

이때, 선분 D_1C_1의 길이는 원 O의 반지름의 길이와 같다.

$\overline{AB_1}:\overline{AC_1}=\overline{B_1D_1}:\overline{D_1B_2}$

즉, $3:2=\sqrt{7}-r:r$, $r=\frac{2}{5}\sqrt{7}$

이때, 다음을 알 수 있다.

$\overline{D_1B_2}=\frac{2}{5}\sqrt{7}$, $\overline{B_1D_1}=\frac{3}{5}\sqrt{7}$, $\overline{B_2A}=\frac{8}{5}$

S_1의 값을 구하면

$$S_1=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{B_1D_1}}\,\overline{\mathrm{D_1B_2}}\sin60^\circ=\frac{21\sqrt{3}}{50}$$

$\overline{\mathrm{B_2A}}=\frac{8}{5}$이므로 $\overline{\mathrm{B_1A}}:\overline{\mathrm{B_2A}}=15:8$

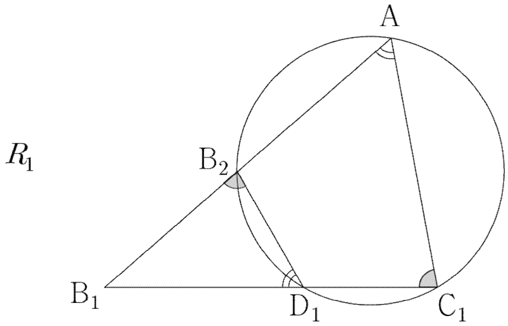
그러므로 그림 R_1의 모양의 도형과 그림 R_2에서 새롭게 그려진 모양의 도형의 넓이의 비는 $1:\left(\frac{8}{15}\right)^2$이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

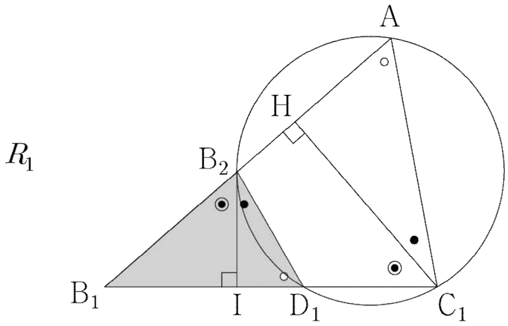
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1-\left(\frac{8}{15}\right)^2}=\frac{27\sqrt{3}}{46}$$

답 ①

[참고1]
중학교 수학3 원주각 단원에서는 아래의 그림을 연습문제에서 다룬다.



[참고2]
다음과 같은 방법으로 원 O의 반지름의 길이 r을 구해도 좋다.
점 $\mathrm{C_1}$에서 선분 $\mathrm{AB_1}$에 내린 수선의 발을 H, 점 $\mathrm{B_2}$에서 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 I라고 하자. 이때, 각각의 각이 아래 그림처럼 결정된다. 그리고 $\angle \mathrm{B_2B_1I}=\theta$로 두자.



(단, ○$=60^\circ$, ●$=30^\circ$)

특수각의 삼각비와 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{HB_1}=2$, $\overline{HC_1}=\sqrt{3}$, $\overline{B_1C_1}=\sqrt{7}$

두 삼각형 HB_1C_1, IB_1B_2는 서로 닮음이므로

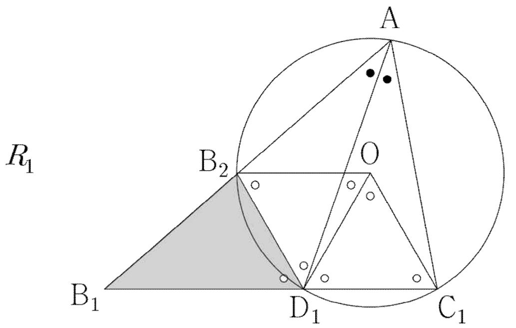
$\overline{B_1I}:\overline{IB_2}=\overline{B_1H}:\overline{HC_1}$

즉, $\sqrt{7}-\frac{3}{2}r:\frac{\sqrt{3}}{2}r=2:\sqrt{3}$

$\therefore\ r=\frac{2}{5}\sqrt{7}$

[풀이2]

그림 R_1에서 그려진 원의 중심을 O라고 하자.



(단, $\circ=60^\circ$, $\bullet=30^\circ$)

원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle C_1OD_1=60^\circ\,(=2\angle C_1AD_1)$,

$\angle D_1OB_2=60^\circ\,(=2\angle D_1AB_2)$

원의 정의와 이등변삼각형의 성질에 의하여

두 삼각형 OD_1C_1, OB_2D_1은 서로 합동인 정삼각형이다.

코사인법칙에 의하여

$\overline{B_1C_1}=\sqrt{3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos60^\circ}=\sqrt{7}$

그런데

$\overline{AB_1}:\overline{AC_1}=\overline{B_1D_1}:\overline{D_1C_1}=3:2$

($\because$ 각의 이등분선 정리(만약 이 정리를 모른다면 [참고3]의 방법을 따르면 된다.))

이므로

$\overline{B_1D_1}=\frac{3}{5}\sqrt{7}$, $\overline{D_1C_1}=\frac{2}{5}\sqrt{7}$

이제 S_1의 값을 구하면

$S_1=\frac{1}{2}\overline{B_1D_1}\,\overline{D_1B_2}\sin60^\circ=\frac{21\sqrt{3}}{50}$

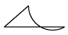
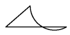
한편 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{B_1B_2}}^2 = \overline{\mathrm{B_1D_1}}^2 + \overline{\mathrm{D_1B_2}}^2 - \overline{\mathrm{B_1D_1}}\,\overline{\mathrm{D_1B_2}}\cos 60^\circ$

$= \left(\dfrac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2 - 2 \times \dfrac{3\sqrt{7}}{5}\,\dfrac{2\sqrt{7}}{5}\,\dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{49}{25}$, 즉 $\overline{\mathrm{B_1B_2}} = \dfrac{7}{5}$

이때, $\overline{\mathrm{B_2A}} = \dfrac{8}{5}$이므로 $\overline{\mathrm{B_1A}} : \overline{\mathrm{B_2A}} = 15 : 8$

그러므로 그림 R_1의  모양의 도형과 그림 R_2에서 새롭게 그려진  모양의 도형의 넓이의 비는 $1 : \left(\dfrac{8}{15}\right)^2$이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\dfrac{21\sqrt{3}}{50}}{1-\left(\dfrac{8}{15}\right)^2} = \frac{27\sqrt{3}}{46}$$

답 ①

[참고3]
다음과 같이 원 O의 반지름의 길이를 구해도 좋다.
원 O의 반지름의 길이를 r이라고 하자.
$\overline{\mathrm{AD_1}} = x$로 두자.
($\triangle \mathrm{AB_1C_1}$의 넓이)
$=$($\triangle \mathrm{AB_1D_1}$의 넓이)$+$($\triangle \mathrm{AD_1C_1}$의 넓이)

즉, $\dfrac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \sin 60^\circ = \dfrac{1}{2} \times (3+2) \times x \times \sin 30^\circ$

$x = \dfrac{6\sqrt{3}}{5}$

삼각형 $\mathrm{AD_1C_1}$에서 코사인법칙에 의하여

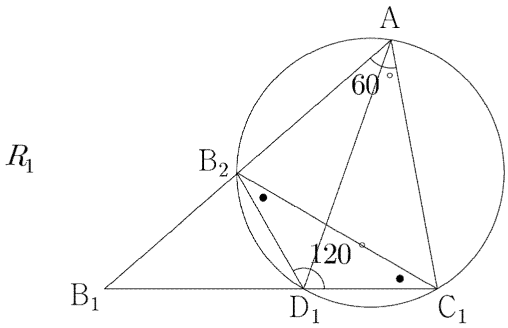
$r^2 = 2^2 + \left(\dfrac{6\sqrt{3}}{5}\right)^2 - 2 \times 2 \times \dfrac{6\sqrt{3}}{5} \times \cos 30^\circ$

$\therefore\ r = \dfrac{2\sqrt{7}}{5}$

[참고4] 교육과정 외
선분 $\mathrm{B_1B_2}$의 길이는 다음과 같이 구해도 좋다.
할선의 성질에 의하여
$\overline{\mathrm{B_1D_1}} \times \overline{\mathrm{B_1C_1}} = \overline{\mathrm{B_1B_2}} \times \overline{\mathrm{B_1A}}$, 즉

$\frac{3}{5}\sqrt{7}\times\sqrt{7}=\overline{B_1B_2}\times 3$, $\therefore\ \overline{B_1B_2}=\frac{7}{5}$

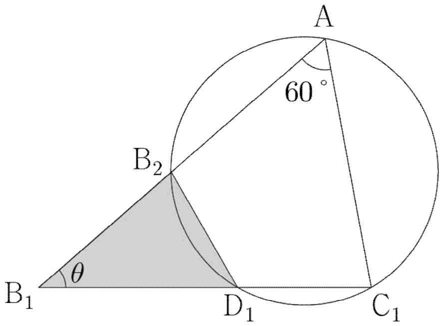
[참고5]
선분 AB_2의 길이를 다음과 같이 구할 수도 있다.
$\overline{D_1C_1}=\frac{2\sqrt{7}}{5}$까지는 유도했다고 하자.



(단, ● $=30^\circ$)
$\overline{AB_2}=x$로 두자.
삼각형 $B_2D_1C_1$에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{B_2C_1}=\frac{2\sqrt{21}}{5}\left(=\frac{2\sqrt{7}}{5}\times\sqrt{3}\right)$
($1:1:\sqrt{3}$의 비율관계를 암기해두는 편이 낫긴 하다.)
삼각형 AB_2C_1에서 코사인법칙에 의하여
$\left(\frac{2\sqrt{21}}{5}\right)^2=2^2+x^2-2\times 2\times x\times\cos 60^\circ$
정리하면
$x^2-2x+\frac{16}{25}=0$, $\left(x-\frac{8}{5}\right)\left(x-\frac{2}{5}\right)=0$
$\therefore\ x=\frac{8}{5}$, 즉 $\overline{AB_2}=\frac{8}{5}$
($\because$ 만약 $x=\frac{2}{5}$이면 $\overline{B_2B_1}=\frac{13}{5}$이고, $\overline{B_1B_2}:\overline{B_2A}=13:2$이므로 문제에서 주어진 그림과 맞지 않는다.)

[참고6]
삼각형 $B_2B_1D_1$의 넓이를 다음과 같이 구할 수도 있다.
$\overline{B_1D_1}=\frac{3}{5}\sqrt{7}$, $\overline{B_1B_2}=\frac{7}{5}$
까지 유도했다고 하자.

R_1



$\angle B_2B_1D_1 = \theta$로 두자.

삼각형 AB_1C_1에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{2}{\sin\theta} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}$, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\therefore$ ($\triangle B_2B_1D_1$의 넓이)

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7}{5} \times \dfrac{3}{5}\sqrt{7} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$= \dfrac{21\sqrt{3}}{50}$

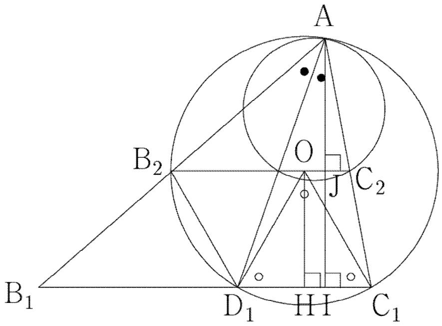
[참고7]

$\overline{AB_1} : \overline{AB_2} = 15 : 8$임을 다음과 같이 증명해도 좋다.

$\overline{D_1C_1} = \dfrac{2}{5}\sqrt{7}$

까지 유도했다고 하자.

R_1



(단, ○$= 60^\circ$, ●$= 30^\circ$)

두 점 A, O에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 각각 I, H, 점 A에서 선분 B_2O의 연장선에 내린 수선의 발을 J라고 하자.

정삼각형 OD_1C_1에서

$\overline{OH} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

($\triangle AB_1C_1$의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times3\times2\times\sin60^\circ=\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\overline{\mathrm{AI}}$에서

$\overline{\mathrm{AI}}=\frac{3\sqrt{21}}{7}$

$\overline{\mathrm{AJ}}=\overline{\mathrm{AI}}-\overline{\mathrm{OH}}=\frac{8\sqrt{21}}{35}$

두 삼각형 $\mathrm{AB_2C_2}$, $\mathrm{AB_1C_1}$의 닮음비는

$\overline{\mathrm{AJ}}:\overline{\mathrm{AI}}=\frac{8\sqrt{21}}{35}:\frac{3\sqrt{21}}{7}=8:15$

이므로

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB_1}}:\overline{\mathrm{AB_2}}=15:8$

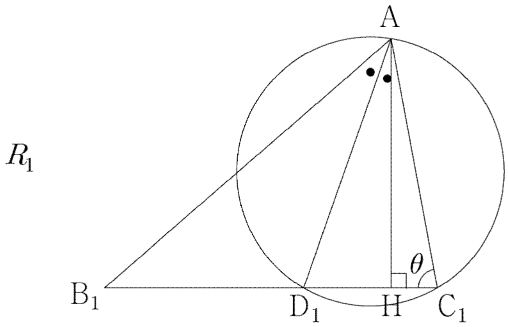
[참고8]

각의 이등분선 정리를 이용하지 않고 원 O의 반지름의 길이를 구할 수도 있다.

$\overline{\mathrm{B_1C_1}}=\sqrt{7}$

까지 유도했다고 하자.

점 A에서 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle\mathrm{AC_1D_1}=\theta$로 두자.



(단, $\bullet=30^\circ$)

($\triangle\mathrm{AB_1C_1}$의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times3\times2\times\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\times(3+2)\times\overline{\mathrm{AD_1}}\times30^\circ$

$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{3\sqrt{21}}{7}$, $\overline{\mathrm{AD_1}}=\frac{6\sqrt{3}}{5}$

직각삼각형 $\mathrm{AC_1H}$에서 삼각비의 정의에 의하여

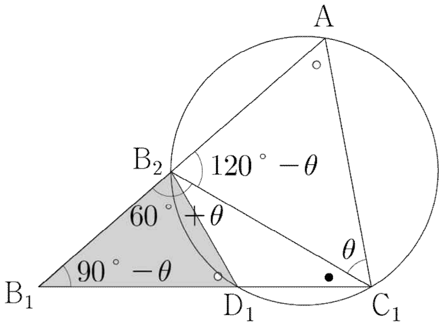
$\sin\theta=\frac{3\sqrt{21}}{14}$

삼각형 $\mathrm{AD_1C_1}$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{D_1C_1}}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{AD_1}}{\sin\theta}$$

$$\therefore\ \overline{D_1C_1} = \frac{2}{5}\sqrt{7}$$

[참고9]
다음과 같이 원 O의 반지름의 길이 r을 결정할 수 있다.
$\angle B_2C_1A = \theta$로 두면 다른 각들의 크기는 아래 그림과 같다.



(단, ○ = 60°, ● = 30°)
삼각형 AB_2C_1에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{3}r}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin(120^\circ - \theta)}$$

정리하면

$$r = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta} \quad \cdots㉠$$

(∵삼각함수의 덧셈정리)
삼각형 $B_2B_1C_1$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{3}r}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{7}}{\sin(60^\circ + \theta)}$$

정리하면

$$r = \frac{\sqrt{7}\cos\theta}{\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right)} \quad \cdots㉡$$

(∵삼각함수의 덧셈정리)
㉠, ㉡을 연립하면

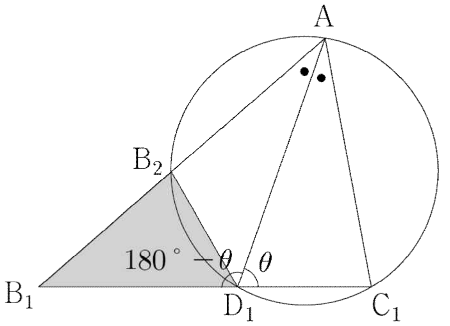
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \text{에서 } \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\therefore\ r = \frac{2\sqrt{7}}{5}$$

[참고10]
다음과 같이 원 O의 반지름의 길이 r을 결정할 수 있다.
$\angle \mathrm{AD_1C_1} = \theta$로 두자.

R_1



(단, ● = 30°)
두 삼각형 $\mathrm{AB_1D_1}$, $\mathrm{AD_1C_1}$ 각각에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{7}-r}{\sin 30^\circ} = \frac{3}{\sin(180^\circ - \theta)}, \quad \frac{r}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sin\theta}$$

정리하면

$$\frac{3}{2} = (\sqrt{7}-r)\sin\theta, \quad \sin\theta = \frac{1}{r}$$

연립하면

$$\frac{3}{2}r = (\sqrt{7}-r)$$

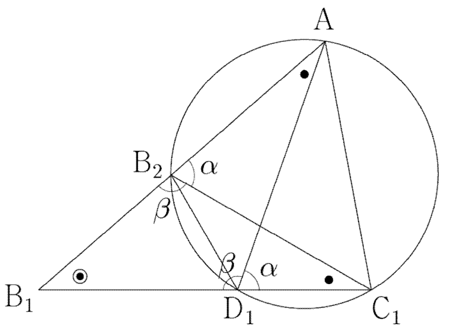
$$\therefore \ r = \frac{2\sqrt{7}}{5}$$

[참고11]
할선의 정리의 증명 과정을 이용하여 선분 $\mathrm{B_1B_2}$의 길이를 구할 수도 있다.

$$\overline{\mathrm{D_1C_1}} = \frac{2}{5}\sqrt{7}, \quad \overline{\mathrm{B_1D_1}} = \frac{3}{5}\sqrt{7}$$

까지 유도했다고 하자.

R_1



(단, ● = 30°, $\alpha + \beta = 180^\circ$)

위의 그림처럼 호 AC_1의 원주각을 α,

$\beta = 180^\circ - \alpha$라고 하면

$\angle B_1D_1A = \angle B_1B_2C_1 = \beta$

이므로 두 삼각형 B_1D_1A, $B_1B_2C_1$는 서로 닮음이다.

$\overline{C_1B_1} : \overline{B_1B_2} = \overline{AB_1} : \overline{B_1D_1}$

즉, $\sqrt{7} : \overline{B_1B_2} = 3 : \dfrac{3\sqrt{7}}{5}$

$\therefore\ \overline{B_1B_2} = \dfrac{7}{5}$