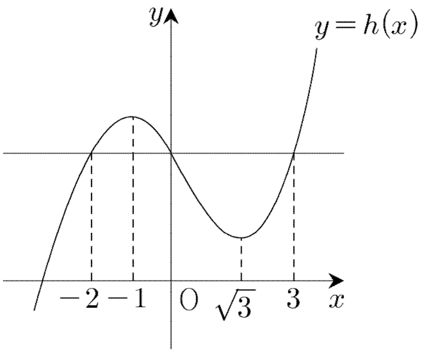
〈 2021(6)−나형30 추가해설 〉

[풀이2]
문제에서 주어진 조건에 의하여
$f(x)=a(x+1)^2+b,\ g(x)=px^3+qx+r$
(단, $a<0,\ p\neq 0$)
함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$f(0)=g(0)$, 즉 $a+b=r$
함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$f'(0)=g'(0)$, 즉 $2a=q$
$(\because f'(x)=2a(x+1),\ g(x)=3px^2+q)$
함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=px^3+2ax+a+b$
조건 (가)를 생각하자.
$x\leq 0$일 때,
$f(x)=f(0) \Leftrightarrow a(x+1)^2+b=a+b$
$\Leftrightarrow ax(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$ 또는 $x=-2$
방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합이 1이므로
방정식 $g(x)=f(0)$의 모든 실근의 합은 3이다.
$(\because -2+0+3=1)$
$px^3+2ax+a+b=a+b \Leftrightarrow px^3+2ax=0$
$$\Leftrightarrow px\left(x+\sqrt{-\frac{2a}{p}}\right)\left(x-\sqrt{-\frac{2a}{p}}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x=\sqrt{-\frac{2a}{p}}=3$$
양변을 제곱하여 정리하면
$-2a=9p$
이상에서 함수 $h(x)$의 방정식은
$$h(x)=\begin{cases} a(x+1)^2+b & (x\leq 0) \\ -\dfrac{2a}{9}x^3+2ax+a+b & (x>0) \end{cases}$$
(단, $a<0$)
$x>0$일 때,
$$h'(x)=f'(x)=-\frac{2a}{3}(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$
이므로 $h'(x)=0$을 풀면 $x=\sqrt{3}$
함수 $h(x)$의 그래프는



마지막으로 조건 (나)를 생각하자.

$f(-1)-g(\sqrt{3})$

$=-\dfrac{3+4\sqrt{3}}{3}a=3+4\sqrt{3}$, $a=-3$

함수 $h'(x)$의 방정식은

$$h(x)=\begin{cases}-6(x+1) & (x \le 0)\\ 2x^2-6 & (x>0)\end{cases}$$

$\therefore\ h'(-3)+h'(4)=12+26=38$

답 38