01

[풀이]

지수법칙에 의하여

$\sqrt[3]{8}\times 4^{\frac{3}{2}}=2\times 2^{2\times\frac{3}{2}}=2^{1+3}=2^4=16$

답 ⑤

02

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2+7$

$\therefore\ f'(0)=7$

답 ④

03

[풀이1]

등차중항의 정의에 의하여

$2a_2=a_1+a_3$, 즉 $a_2=\dfrac{20}{2}=10$

답 ⑤

[풀이2]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$a_1+a_3=2a_1+2d=20$, 즉 $a_1+d=20$

$\therefore\ a_2=a_1+d=20$

답 ⑤

04

[풀이]

함수의 극한의 성질에 의하여

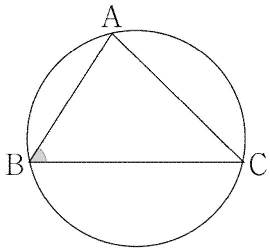
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-6x}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x(x-2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}3x=6$

답 ①

05

[풀이]



사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin B}=2R$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=2\times 15\times\dfrac{7}{10}=21$

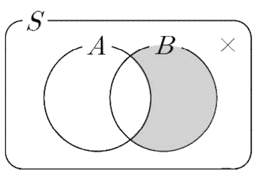
답 ③

06

[풀이1]

$\mathrm{P}(A\cup B)=1$이므로 $A\cup B=S$이다.

집합 A^C을 벤다이어그램으로 표시하면 다음과 같다.



(×는 집합 $(A\cup B)^C=\varnothing$임을 의미한다.)

$\mathrm{P}(A^C)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$

답 ④

[풀이2]

확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$1=\mathrm{P}(A)+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{6}$

여사건의 확률에 의하여

$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{6}$

답 ④

07

[풀이]

$x \to 1+$일 때, $f(x)$는 1보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 1+} f(x)=1$

$x \to 3-$일 때, $f(x)$는 2보다 작은 값을 가지면서 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 3-} f(x)=2$

$\therefore \lim_{x \to 1+} f(x) - \lim_{x \to 3-} f(x) = 1-2=-1$

답 ②

08

[풀이]

$(1+2x)^4$의 전개식에서 각 항은

${}_4C_r(2x)^r = {}_4C_r 2^r x^r$

의 꼴로 나타낼 수 있으므로

$x^2 = x^r$에서 $x=2$

따라서 x^2의 계수는 ${}_4C_2 2^2=24$

답 ④

09

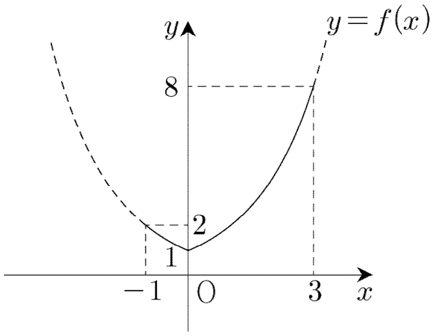
[풀이]

$|x| = \begin{cases} x & (x \ge 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$

이므로 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = \begin{cases} 2^x & (x \ge 0) \\ 2^{-x} & (x < 0) \end{cases}$

함수 $f(x)$의 그래프는



최댓값: $f(3)=2^3=8$

최솟값: $f(0)=1$

이때, 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 최솟값을 갖는 것이 아님을 주의해야 한다.

따라서 구하는 값은 $8+1=9$이다.

답 ③

10

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=-x^2+4x+m$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극값을 가지므로

$f'(3)=3+m=0$, 즉 $m=-3$

답 ①

11

[풀이]

세 점

O$(0,\ 0)$, A$(2,\ \log_4 2)$, B$(4,\ \log_2 a)$

이 한 직선 위에 있으므로

(직선 OA의 기울기)=(직선 AB의 기울기)

즉, $\dfrac{\log_4 2}{2} = \dfrac{\log_2 a - \log_4 2}{4-2}$

정리하면

$\dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\log_2 a - \frac{1}{2}\log_2 2}{2}$

풀면

$\log_2 a = 1$

$\therefore\ a=2$

답 ②

12

[풀이1]

1학년 학생 2명을 1명으로 생각하고, 2학년 학생 2명을 1명으로 생각하여 5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{5} = 4! = 24$

이 각각에 대하여 1학년 학생 2명이 자리를 바꾸는

경우의 수는

$2!=2$

이 각각에 대하여 2학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

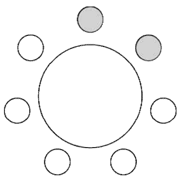
따라서 구하는 경우의 수는

$24\times2\times2=96$

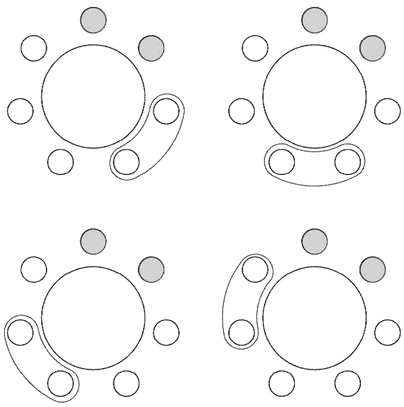
답 ①

[풀이2]

아래 그림처럼 1학년 학생 2명이 앉을 자리를 선택하자.



이제 2학년 학생 2명이 앉을 자리를 선택하면 아래 그림처럼 4가지의 경우가 가능하다.



따라서 구하는 경우의 수는

$4\times2!\times2!\times3!=96$

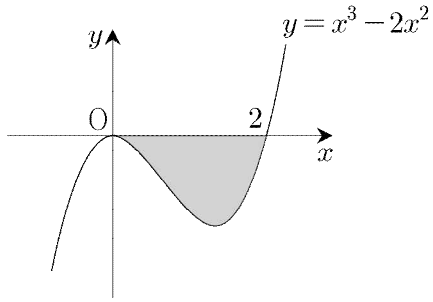
이때, 2!은 1학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수, 2!은 2학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수, 3!은 3학년 학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수이다.

답 ①

13

[풀이1]

$y=x^2(x-2)$이므로 이 삼차함수의 그래프는 아래 그림과 같다.



위의 그림에서 어둡게 색칠된 영역의 넓이를 S라고 하면

$$S=\int_0^2|x^3-2x^2|dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=\frac{16}{3}-4=\frac{4}{3}$$

답 ②

[참고]

문제에서 주어진 삼차함수의 도함수는

$$y'=3x^2-4x=3x\left(x-\frac{4}{3}\right)$$

$y'=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

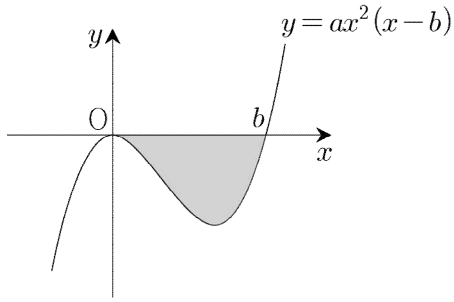
문제에서 주어진 함수의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 위의 풀이에서와 같은 그래프를 얻는다.

[풀이2]

삼차함수의 정적분에 대한 공식을 적용하면 빠르게 계산할 수 있다.



위의 그림에서 어둡게 색칠된 영역의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{|a|}{12}(b-0)^4$$

이므로 구하는 넓이는

$S=\frac{1}{12}\times 2^4=\frac{4}{3}$

답 ②

14

[풀이1]

문제에서 주어진 세 등식을 변변히 모두 합하면

$a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}=2a_n+4$

이 등식에 $n=4$를 대입하면

$a_{11}+a_{12}+a_{13}=2a_4+4$

그런데 문제에서 주어진 세 번째 등식에서

$a_4=a_{3\times1+1}=a_1+1=2$, 즉 $a_4=2$

이므로

$\therefore\ a_{11}+a_{12}+a_{13}=2a_4+4=2\times2+4=8$

답 ③

[풀이2]

문제에서 주어진 귀납적 정의를 이용하여 수열 $\{a_n\}$을 나열해보자.

문제에서 주어진 세 등식에 $n=1$을 대입하면

$a_2=2a_1+1=3$, $a_3=-a_1+2=1$,

$a_4=a_1+1=2$

문제에서 주어진 세 등식에 $n=2$를 대입하면

$a_5=2a_2+1=7$, $a_6=-a_2+2=-1$,

$a_7=a_2+1=4$

$\vdots$

마찬가지의 방법으로

$1(a_1)$, 3, 1, 2, 7, -1, 4, 3, 1, 2,

$5(a_{11})$, $0(a_{12})$, $3(a_{13})$, $\cdots$

$\therefore\ a_{11}+a_{12}+a_{13}=5+0+3=8$

답 ③

15

[풀이]

점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라고 하면

$x(t)=\int v(t)dt=-2t^2+5t+C$

(단, C는 적분상수)

$x(3)=-3+C=11$, 즉 $C=14$

$\therefore\ x(0)=C=14$

답 ④

16

[풀이1]

$|a-3|+|b-3|=2$일 사건을 A,

$a=b$일 사건을 B라고 하자.

우선 사건 A가 일어날 확률을 구하자.

$|a-3|\ge0$, $|b-3|\ge0$이고,

$2=2+0=1+1=0+2$이므로

아래의 표를 얻는다.

	a	b	순서쌍 $(a,\ b)$의 개수
$\lvert a-3\rvert=0$, $\lvert b-3\rvert=2$	3	1, 5	$1\times2=2$
$\lvert a-3\rvert=1$, $\lvert b-3\rvert=1$	2, 4	2, 4	$2\times2=4$
$\lvert a-3\rvert=2$, $\lvert b-3\rvert=0$	1, 5	3	$2\times1=2$

합의 법칙에 의하여

$\mathrm{P}(A)=\frac{8}{36}$

사건 B가 일어날 확률을 구하자.

$a=b$인 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 6이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{6}{36}$

사건 $A\cap B$가 일어날 확률은 위의 표에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{36}$

이다. 이때, $A\cap B=\{(2,\ 2),\ (4,\ 4)\}$

확률의 덧셈정리에 의하여

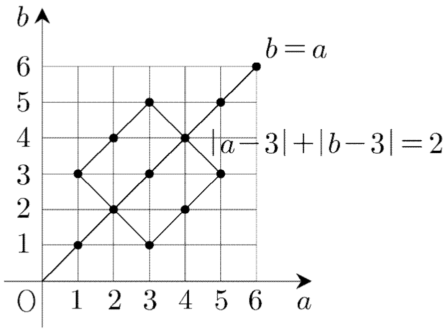
$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{8}{36}+\frac{6}{36}-\frac{2}{36}=\frac{1}{3}$

답 ②

[풀이2]

좌표평면에 도형 $|a-3|+|b-3|=2$와 직선 $b=a$를 함께 그리면 아래 그림과 같다.



위의 그림에서 구하는 확률은

$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

답 ②

17

[풀이]

$\int_0^1 f(t)dt=a$로 두면

$f(x)=4x^3+ax$ (단, a는 상수)

$a=\int_0^1 f(t)dt=\left[t^4+\frac{a}{2}t^2\right]_0^1=1+\frac{a}{2}$

풀면 $a=2$이므로

$\therefore\ f(1)=6$

답 ①

18

[풀이1]

합과 일반항의 관계에 의하여

$S_{k+2}-S_k=a_{k+1}+a_{k+2}$

$=2a_1+(2k+1)\times 2=-12-(-16)=4$

즉, $a_1+2k=1$ $\cdots$㉠

등차수열의 합의 공식에 의하여

$S_k=\frac{2a_1+(k-1)\times 2}{2}\times k=-16$

즉, $\frac{2(1-2k)+2(k-1)}{2}\times k=-16(\because$ ㉠$)$

정리하면

$k^2=16,\ k=4\ (\because k>0)$

이를 ㉠에 대입하면 $a_1=-7$

$\therefore\ a_{2k}=a_8=a_1+7\times 2=-7+14=7$

답 ②

[풀이2]

등차수열의 합의 공식에 의하여

$S_k=\frac{2a_1+(k-1)\times 2}{2}\times k=-16,$

$S_{k+2}=\frac{2a_1+(k+1)\times 2}{2}\times (k+2)=-12$

위의 두 식을 변형하면

$2a_1+2(k-1)=-\frac{32}{k},$

$2a_1+2(k+1)=-\frac{24}{k+2}$

위의 두 등식을 변변히 빼면

$-4=-\frac{32}{k}+\frac{24}{k+2}$

정리하면

$k^2=16,\ k=4\ (\because k>0)$

$S_4=\frac{2a_1+6}{2}\times 4=-16$에서 $a_1=-7$

$\therefore\ a_{2k}=a_8=a_1+7\times 2=-7+14=7$

답 ②

[풀이3]

합과 일반항의 관계에 의하여

$S_{k+2}-S_k=a_{k+1}+a_{k+2}$

$=a_k+d+a_k+2d=2a_k+3d=4$

$d=2$이므로 $a_k=-1$

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$-7,\ -5,\ -3,\ -1(a_k=a_4),\ 1,$

$3(a_{k+2}=a_6),\ 5,\ 7(a_{2k}=a_8),\ \cdots$

$\therefore\ k=4,\ a_{2k}=a_8=7$

답 ②

[풀이4]

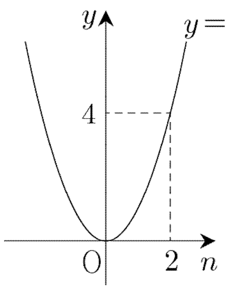
등차수열의 합의 공식에 의하여

$S_n=\frac{\{2a_1+(n-1)\times 2\}}{2}\times n$

$=n^2+(a_1-1)n$ (즉, 이차함수)

$=\left(n+\dfrac{a_1-1}{2}\right)^2-\dfrac{(a_1-1)^2}{4} \quad \cdots(*)$

함수 $y=n^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{a_1-1}{2}$만큼 평행이동하면 함수 $y=S_n$의 그래프와 일치한다.



그런데 $S_{k+2}-S_k=4$이므로

$(k,\ S_k)$는 (*)의 꼭짓점이다.

$k=-\dfrac{a_1-1}{2},\ -\dfrac{(a_1-1)^2}{4}=-16$

연립하면

$a_1=-7,\ k=4$

$\therefore\ a_{2k}=a_8=a_1+7\times 2=-7+14=7$

답 ②

19

[풀이]

다음의 필요충분조건이 성립한다.

$2x^3+6x^2+a=0$ (단, $-2\le x\le 2$)

$\Leftrightarrow$

$2x^3+6x^2=-a$ (단, $-2\le x\le 2$)

그러므로 구간 $[-2,\ 2]$에서 곡선 $y=2x^3+6x^2(\cdots(*))$과 직선 $y=-a$가 (서로 다른) 두 점에서 만나도록 하는 정수 a의 개수를 구하면 된다.

함수 (*)의 도함수는

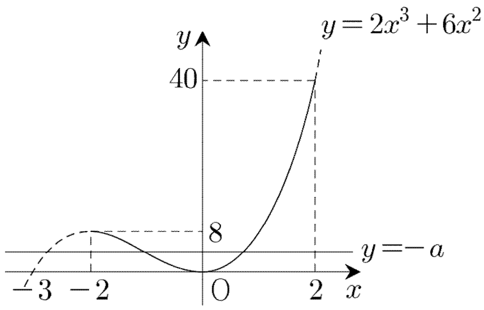
$y'=6x^2+12x=6x(x+2)$

$y'=0$을 풀면 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 (*)의 증가와 감소를 표로 정리하면

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	8	↘	0	↗	40

함수 (*)의 그래프는



위의 그림에서

$0<-a\le 8$, 즉 $-8\le a<0$

$(a=-8,\ -7,\ \cdots,\ -1)$

따라서 정수 a의 개수는 8이다.

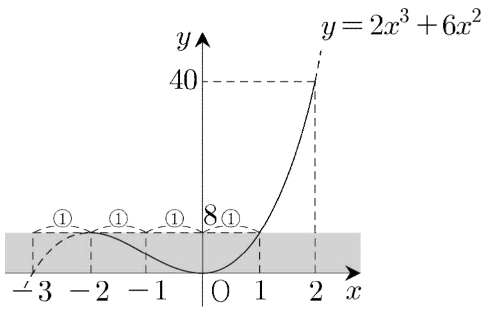
답 ③

[참고1]

함수 $y=2x^3+6x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동시키면 함수 $y=2x^3+6x^2+a$의 그래프와 일치한다. 따라서 구간 $[-2,\ 2]$에서 곡선 $y=2x^3+6x^2+a$과 x축($y=0$)이 (서로 다른) 두 점에서 만나도록 정수 a의 개수를 구해도 좋다.

[참고2]

삼차함수의 비율관계를 이용하면 함수 (*)의 그래프를 빠르게 그릴 수 있다.



위의 그림처럼

$f(1)=f(-2)=8$

이므로 $x>1$이면 $f(x)>8$임을 알 수 있다.

따라서 이 문제는 삼차함수의 비율관계를 알고 있다면 좀 더 빠르게 해결할 수 있다.

20

[풀이]

꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있을 사건을

A,
꺼낸 공에 검은 공이 2개 있을 사건을 B라고 하자.

• 우선 $n(A)$의 값을 구하자.

③, ❸을 꺼낼 경우의 수: ${}_6C_2$

왜냐하면 ①, ②, ④, ❶, ❷, ❹ 중에서 서로 다른 2개를 꺼낼 경우의 수이기 때문이다.

④, ❹를 꺼낼 경우의 수: ${}_6C_2$

왜냐하면 ①, ②, ③, ❶, ❷, ❸ 중에서 서로 다른 2개를 꺼낼 경우의 수이기 때문이다.

③, ❸, ④, ❹를 꺼낼 경우의 수: 1

이상에서

$n(A)={}_6C_2+{}_6C_2-1=29$

• 이제 $n(A\cap B)$의 값을 구하자.

③, ❸, ○, ●: ${}_3C_1\times{}_3C_1$

왜냐하면 ①, ②, ④ 중에서 한 개, ❶, ❷, ❹ 중에서 한 개를 꺼낼 경우의 수이기 때문이다.

④, ❹, ○, ●: ${}_3C_1\times{}_3C_1$

왜냐하면 ①, ②, ③ 중에서 한 개, ❶, ❷, ❸ 중에서 한 개를 꺼낼 경우의 수이기 때문이다.

③, ❸, ④, ❹: 1

이상에서

$n(A\cap B)={}_3C_1\times{}_3C_1+{}_3C_1\times{}_3C_1-1=17$

따라서 구하는 확률은

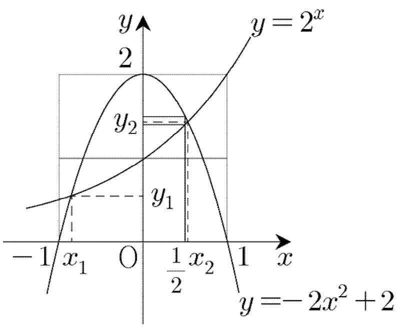
$$\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{17}{29}$$

답 ③

21

[풀이]

ㄱ. (참)



$$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}<1.5=-2\left(\frac{1}{2}\right)^2+2$$

(이때, $\sqrt{2}\approx1.4$임을 이용해도 좋고,

$\left(\frac{3}{2}\right)^2-(\sqrt{2})^2=\frac{1}{4}>0$임을 보여도 좋다.)

이므로 위의 그림에서

$\therefore\ x_2>\frac{1}{2}$

ㄴ. (참)

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2x_2^2+2-(-2x_1^2+2)}{x_2-x_1}$$

($\because$ 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$는 곡선 $y=-2x^2+2$ 위에 있다.)

$$=\frac{-2(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1}$$

$=-2(x_1+x_2)$ …㉠

한편 보기 ㄱ의 그림에서

$-1<x_1<0$, $\frac{1}{2}<x_2<1$ …(*)

위의 두 부등식을 변변히 더하면

$-\frac{1}{2}<x_1+x_2<1$

양변에 -2를 곱하면

$-2<-2(x_1+x_2)<1$ …㉡

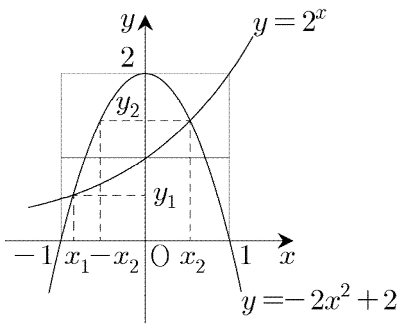
㉠, ㉡에서

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<1$

양변에 양수 x_2-x_1을 곱하면

$\therefore\ y_2-y_1<x_2-x_1$

ㄷ. (참)



문제에서 주어진 이차함수는 y축에 대하여 대칭이므로

위의 그림처럼

$x_1<-x_2$, 즉 $x_1+x_2<0$ …㉢

보기 ㄴ의 (*)에 의하여

$\frac{1}{2}<y_1=2^{x_1}$, $\sqrt{2}<y_2=2^{x_2}$

위의 두 부등식을 변변히 곱하면

$\frac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2$

그리고 ㉢에 의하여

$y_1y_2=2^{x_1+x_2}<1$

$\therefore\ \frac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$

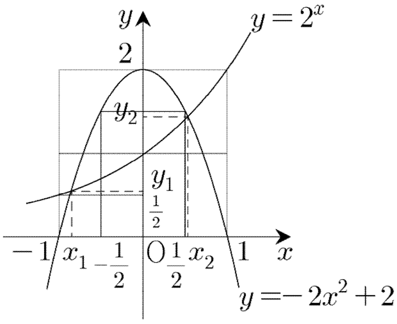
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고1]

보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 증명해도 좋다.

ㄴ. (참)



위의 그림에서

$x_1<-\frac{1}{2}$, $x_2>\frac{1}{2}$이므로 $x_2-x_1>1$

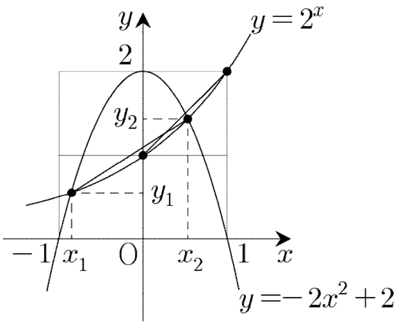
$\frac{1}{2}<y_1$, $y_2<\frac{3}{2}$이므로 $y_2-y_1<1$

$\therefore\ y_2-y_1<x_2-x_1$

[참고2]

보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 증명해도 좋다.

ㄴ. (참)



곡선 $y=2^x$은 아래로 볼록이므로

위의 그림처럼

(두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 잇는 직선의 기울기)

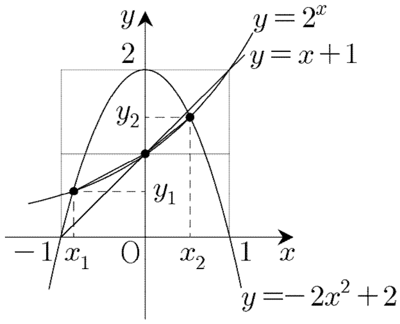
<(두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$를 잇는 직선의 기울기)

즉, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<1\ \therefore\ y_2-y_1<x_2-x_1$

[참고3]

보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 증명해도 좋다.

ㄴ. (참)



위의 그림에서

(두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(0,\ 1)$을 잇는 직선의 기울기)<1

즉, $\frac{y_1-1}{x_1}<1$, $y_1-1>x_1(\because x_1<0)$ $\cdots$㉣

(두 점 $(0,\ 1)$, $(x_2,\ y_2)$를 잇는 직선의 기울기)<1

즉, $\frac{y_2-1}{x_2}<1$, $y_2-1<x_2$ $\cdots$㉤

㉣+㉤: $x_1+y_2-1<x_2+y_1-1$

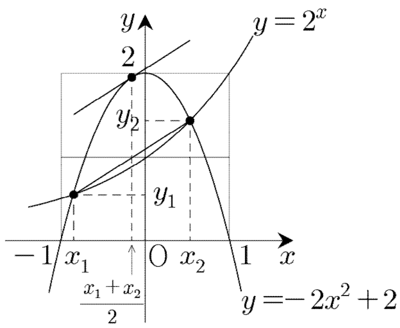
정리하면

$\therefore\ y_2-y_1<x_2-x_1$

[참고4]

보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 증명해도 좋다.

ㄴ. (참)



평균값의 정리에 의하여

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-4\times\frac{x_1+x_2}{2}=-2(x_1+x_2)<1$$

$(\because -1<x_1<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<x_2<1$에서

$-\frac{1}{2}<x_1+x_2<\frac{1}{2},\ -1<-2(x_1+x_2)<1)$

$\therefore\ y_2-y_1<x_2-x_1$

22

[풀이]

실수 전체의 집합에서

$-1\le\cos x\le 1$

이므로

$-4\le 5\cos x+1\le 6$, 즉 $-4\le f(x)\le 6$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 6이다.

답 6

23

[풀이]

$$f(x)=\int f'(x)dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$$

(단, C는 적분상수)

$f(0)=C=3$

$\therefore\ f(2)=6+C=9$

답 9

24

[풀이]

문제에서 주어진 삼차함수의 도함수는

$y'=3x^2-12x,\ y'|_{x=1}=-9$

접선의 방정식은

$y=-9(x-1)+1$, 즉 $y=-9x+10$

이 직선의 y절편은 10이므로

$\therefore\ a=10$

답 10

25

[풀이]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 하자. $(r\ne 0)$

이를 문제에서 주어진 두 번째 등식에 대입하면

$$\frac{(1+r^3)S_3}{S_3}=2a_1r^3-7$$

$(\because S_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$

$=a_1+a_2+a_3+r^3a_1+r^3a_2+r^3a_3$

$=S_3+r^3S_3=(1+r^3)S_3)$

정리하면

$1+r^3=2r^3-7,\ r^3=8$

$\therefore\ a_7=a_1r^6=8^2=64$

답 64

[참고]

만약 $r=0$이면 $a_2=a_3=\cdots=0$이므로

문제에서 주어진 두 번째 등식의

(좌변)$=1$, (우변)$=-7$

이므로 모순이다. 따라서 $r\ne 0$이다.

26

[풀이]

(평균변화율)

$$=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{a^3-3a^2+5a}{a}$$

$=a^2-3a+5$ …㉠

한편 함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-6x+5$

이므로

$f'(2)=5$ …㉡

㉠=㉡: $a^2-3a+5=5$

정리하면

$a^2-3a=0$

$\therefore\ a=3(\because a\ne 0)$

답 3

27

[풀이]

조건 (나)의 부정은 다음과 같다.

‘a, b, c, d는 모두 자연수이다.’

‘조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수($\cdots$(*1))’ 에서 ‘조건 (가)와 조건 (나)의 부정을 모두 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수($\cdots$(*2))’ 를 뺀 값을 구하면 된다.

(*1):

$a+b+c+d=6$

(단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$, $d\geq 0$)

중복조합의 수에 의하여 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

${}_{4}\mathrm{H}_{6}={}_{4+6-1}\mathrm{C}_{6}={}_{9}\mathrm{C}_{6}={}_{9}\mathrm{C}_{3}=84$

(*2):

$a+b+c+d=6$

(단, $a\geq 1$, $b\geq 1$, $c\geq 1$, $d\geq 1$)

$a-1=a'$, $b-1=b'$, $c-1=c'$,

$d-1=d'$로 두고 정리하면

$a'+b'+c'+d'=2$

(단, $a'\geq 0$, $b'\geq 0$, $c'\geq 0$, $d'\geq 0$)

중복조합의 수에 의하여 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

${}_{4}\mathrm{H}_{2}={}_{4+2-1}\mathrm{C}_{2}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$84-10=74$

답 74

28

[풀이]

수열의 합과 일반항의 관계를 적용하여 풀이를 시작하자.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}=2n^2+7n$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4k-3}{a_k}=2(n-1)^2+7(n-1)$$

위의 두 식을 변변히 빼면

$$\frac{4n-3}{a_n}=4n+5,\ \text{즉}\ a_n=\frac{4n-3}{4n+5}$$

$$\frac{q}{p}=a_5\times a_7\times a_9=\frac{17}{25}\times\frac{25}{33}\times\frac{33}{41}=\frac{17}{41}$$

$\therefore\ p+q=58$

답 58

29

[풀이]

$3\times 3\geq 9$, $3\times 4\geq 9$, $4\times 4\geq 9$

이므로 전체를 다음의 세 경우로 구분할 수 있다.

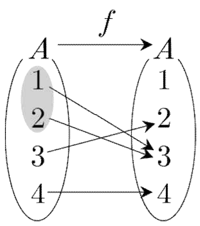
$f(1)=f(2)=3$,

$f(1)=f(2)=4$,

$f(1)=3$, $f(2)=4$ 또는 $f(1)=4$, $f(2)=3$

(1) $f(1)=f(2)=3$인 경우

예를 들어

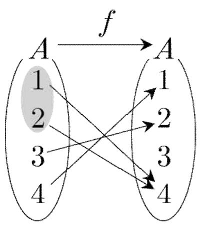


경우의 수는 ${}_{3}\mathrm{P}_{2}=6$이다.

이때, ${}_{3}\mathrm{P}_{2}$는 $\{3, 4\}$에서 $\{1, 2, 4\}$로의 일대일함수의 개수이다.

(2) $f(1)=f(2)=4$인 경우

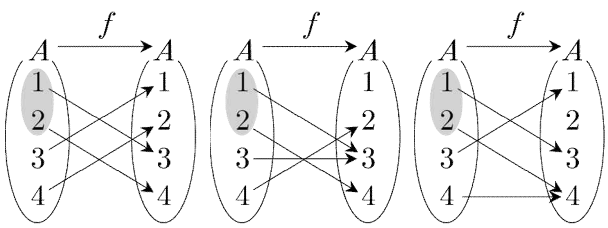
예를 들어



(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수는 ${}_{3}\mathrm{P}_{2}=6$이다.

(3) $f(1)=3$, $f(2)=4$ 또는 $f(1)=4$, $f(2)=3$인 경우

예를 들어



왼쪽부터 차례대로 경우1, 경우2, 경우3이라고 하자.
각각의 경우의 수는

경우1: $2\times2=4$

이때, 2는 $\{1,\ 2\}$에서 $\{3,\ 4\}$로의 일대일대응의 개수이고, 2는 $\{3,\ 4\}$에서 $\{1,\ 2\}$로의 일대일대응의 개수이다.

경우2: $2\times2\times2=8$

이때, 2는 $\{1,\ 2\}$에서 $\{3,\ 4\}$로의 일대일대응의 개수이고, 2는 $f(3)=3$ 또는 $f(3)=4$ 중에서 하나를 택할 경우의 수, 2는 $f(4)=1$ 또는 $f(4)=2$ 중에서 하나를 택할 경우의 수이다.

경우3: $2\times2\times2=8$

이때, 2는 $\{1,\ 2\}$에서 $\{3,\ 4\}$로의 일대일대응의 개수이고, 2는 $f(4)=3$ 또는 $f(4)=4$ 중에서 하나를 택할 경우의 수, 2는 $f(3)=1$ 또는 $f(3)=2$ 중에서 하나를 택할 경우의 수이다.

경우의 수는

$4+8+8=20$

따라서 구하는 확률은

$$p=\frac{6+6+20}{{}_4\Pi_4}=\frac{1}{8}$$

$\therefore\ 120p=15$

답 15

30

[풀이]

조건 (나)에서 함수 $h(x)$의 '최댓값과 최솟값의 차'를 조건을 주었고, 구하는 값이 함수 $h(x)$의 $x=-3,\ x=4$에서의 미분계수의 합(즉, 함숫값의 합×)이므로 함수 $h(x)$의 그래프가 원점을 지난다고 가정해도 된다.

이차함수는 선대칭이고, 삼차함수는 점대칭이므로 다음과 같은 필요충분조건을 얻는다.

이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이다.

$\Leftrightarrow$

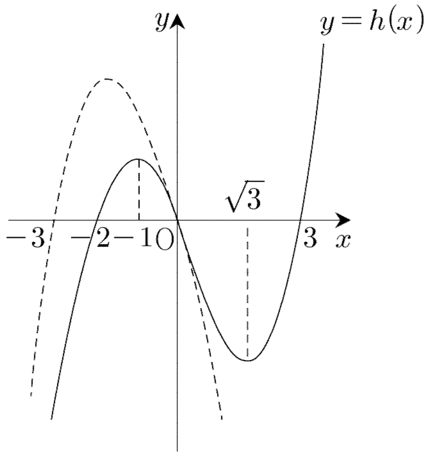
이차함수 $f(x)$의 대칭축은 $x=-1$이고, 최고차항의 계수는 음수이다.

삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다.

$\Leftrightarrow$

삼차함수 $g(x)$는 y절편에 대하여 대칭이다. (그런데 함수 $h(x)$가 원점을 지난다고 가정하였으므로 함수 $g(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.)

함수 $h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이차함수 $f(x)$는 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이므로 $x\le0$일 때, 방정식 $f(x)=0(f(x)=h(0))$의 0이 아닌 또 다른 실근은 -2이다.

왜냐하면 $\dfrac{-2+0}{2}=-1$이기 때문이다.($\because$ 함수 $f(x)$는 $x=-1$에 대하여 대칭이다.)

$x>0$일 때, 방정식 $g(x)=0(g(x)=h(0))$의 실근은 3일 수 밖에 없다.

왜냐하면 $-2+0+3=1$이기 때문이다.

이제 함수 $h(x)$의 방정식을 다음과 같이 둘 수 있다.

$$h(x)=\begin{cases}ax(x+2) & (x\le0)\\ px(x^2-9) & (x>0)\end{cases}$$

(단, $a<0,\ p>0$)

(만약 $p<0$이면 함수 $h(x)$는 최솟값을 갖지 않는다.)

함수 $h(x)$의 도함수는

$$h'(x)=\begin{cases}2a(x+1) & (x<0)\\ 3px^2-9p & (x>0)\end{cases}$$

(단, $a<0,\ p>0$)

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to0-}h(x)=\lim\limits_{x\to0+}h(x)$, 즉 $2a=-9p$ …㉠

조건 (나)에서

$f(-1)-g(\sqrt{3})=-a+6\sqrt{3}p=3+4\sqrt{3}$ …㉡

($\because h'(x)=0$을 풀면 $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}$

이때, 삼차함수의 비율관계 $1:\sqrt{3}=\boxed{\sqrt{3}}:3$을 이용하여 $\sqrt{3}$을 구해도 좋다.)

㉠, ㉡을 연립하면

$\frac{9}{2}p+6\sqrt{3}p=3+4\sqrt{3}$, 즉

$\frac{3(3+4\sqrt{3})}{2}p=3+4\sqrt{3}$, $p=\frac{2}{3}$

이를 ㉠에 대입하면 $a=-3$

$\therefore\ h'(-3)+h'(4)=12+26=38$

답 38

[참고1]

삼차함수 $g(x)$가 y절편에 대하여 대칭임을 다음과 같이 증명할 수 있다.

$g(x)=px^3+qx+r(p>0)$,

$g_0(x)=g(x)-r$로 두자.

$g_0(-x)=-g_0(x)$이므로 함수 $g_0(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

그런데 함수 $g_0(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 r만큼 평행이동하면 함수 $g(x)$의 그래프와 일치하므로 함수 $g(x)$는 점 $(0,\ r)$에 대하여 대칭이다.

[참고2]

함수 $g(x)$가 원점이 아닌 y절편에 대하여 대칭이라고 해도 즉,

$$h(x)=\begin{cases} a(x+1)^2+b & (x\le 0) \\ px(x^2-9)+q & (x>0) \end{cases}$$

로 두어도 동일한 결과를 얻는다.

[참고3]

함수 $h(x)$의 방정식을

$$h(x)=\begin{cases} a(x+1)^2+b & (x\le 0) \\ px(x^2-9) & (x>0) \end{cases}$$

으로 둘 수도 있다.

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$h(0)=\lim_{x\to 0+}h(x)$, 즉 $a+b=0$, $b=-a$

이를 대입하여 정리하면

$$h(x)=\begin{cases} ax(x+2) & (x\le 0) \\ px(x^2-9) & (x>0) \end{cases}$$