* 2021학년도 평가원 6월 수학 가형 30번.

이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대. → $f(x) = a(x+1)^2 - a + f(0)$. $(a<0)$.

삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0 → 방정식 $g(x)=g(0)$의 세 근의 합이 0이다.

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \le 0) \\ g(x) & (x > 0) \end{cases}$$, $h(x)$는 미분가능. $$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & (x<0) \\ g'(x) & (x>0) \end{cases}$$.

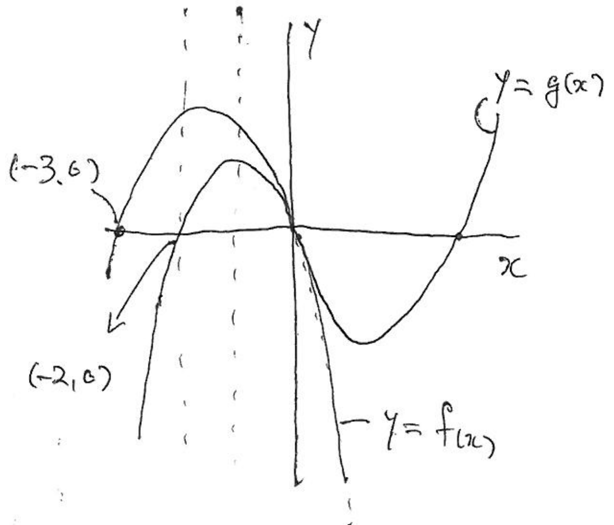
미분가능하므로 $f(0) = g(0+)$, $f'(0-) = g'(0+)$ (∵ 각각 다항함수)

(가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다.

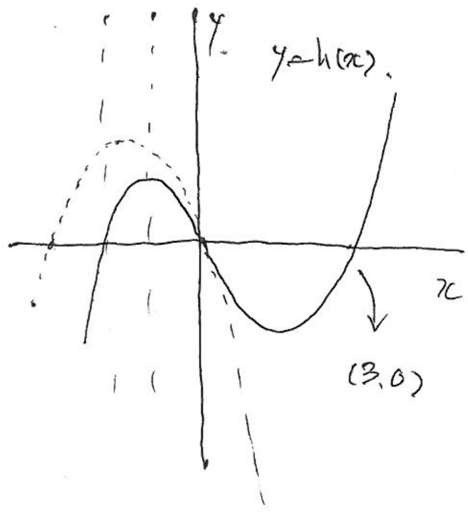
→ $(x \le 0)$, $h(x)=f(x)$ 이므로 $f(x)=h(0)=f(0)$은 $x=-2$, $x=0$을 근으로 가지므로

$(x>0)$, $h(x)=g(x)$ 에서 $g(x)=h(0)$은 $x=3$을 근으로 가진다. 따라서 실수 전체의 집합에서 정의되는 $g(x)$로 보면 방정식 $g(x)=h(0)=f(0)=g(0)$은 $x=0$과 $x=\pm 3$을 근으로 가지므로, $g(x) = bx(x^2-9) + f(0)$ 으로 설정가능하다.

또한 $x=0$ 에서 $h(x)$가 미분가능하려면 $b>0$ 이어야 한다.



→



→ $x=0$에서 $g(x)$와 $f(x)$의 형태는 $y=0$과 $y=x^3$ 같은 3중근의 형태를 띨 수 없고,

예를 들어 $y=0$과 $y=(x+1)\cdot x^2$ 같이 또는 $y=-x^2$과 $y=(x+1)\cdot x^2$ 같이

3차함수가 곁에 붙어있는 형태의 개형이다.

$\therefore f(x) = a(x+1)^2 - a + f(0) \quad (a<0) \qquad f'(x) = 2a(x+1)$

$g(x) = bx(x^2-9) + f(0) \quad (b>0). \qquad g'(x) = 3bx^2 - 9b = 3b(x^2-3).$

(사) 닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$ 이다.

닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 최댓값은 $f(-1)$, 최솟값은 $g(\sqrt{3})$.

따라서 (i) $x=0$ 에서 미분가능하므로 $f'(0-) = g'(0+)$ 에서

$2a = -9b$ - - - - - - - - - - - - - - - - ①

(ii) $f(-1) = -a + f(0)$. $g(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}b + f(0) = -6b\sqrt{3} + f(0)$

$\therefore -a + 6b\sqrt{3} = 3 + 4\sqrt{3}.$

$-2a + 12b\sqrt{3} = 6 + 8\sqrt{3}$ 에서 ① 과 연립하면

$9b + 12b\sqrt{3} = 3(3+4\sqrt{3})\cdot b = 2(3+4\sqrt{3})$ 에서

$b = \frac{2}{3}, \quad a = -3.$

$\therefore h'(-3) = f'(-3) = -4a = 12$

$h'(4) = g'(4) = 3\cdot 13b = 39b = 26$

$\therefore h'(-3) + h'(4) = 38$