Theme. 2

어떤 지식 또는 개념을 엄밀하게, 분석적으로 전달하고자 하는 칼럼시리즈가 아닙니다.
간과할 수 있는 요소들을 짚어주고 실제 문제풀이에 직접적으로 영향을 미칠 수 있는 실질적인 내용을 담고 있는 칼럼시리즈입니다. 가볍게 읽어주세요~

1. 문제상황 인지

이번 6월 평가원 가형 18번/나형 21번으로 출제된 문항입니다. 혹시 안 풀어봤다면, 지금 가볍게 풀어보세요.

21. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[다음 페이지에 답이 나옵니다.]

혹시 본인이 ㄴ 보기에 $y_1 = -2{x_1}^2+2,\ y_2 = -2{x_2}^2+2$를 대입해서 풀었다면, 다른 방향의 풀이도 충분히 생각해보시고 반드시 다른 풀이방향에 대한 결론도 내셔야합니다.

지금부터 그 이유를 알아봅시다.

2. 해제

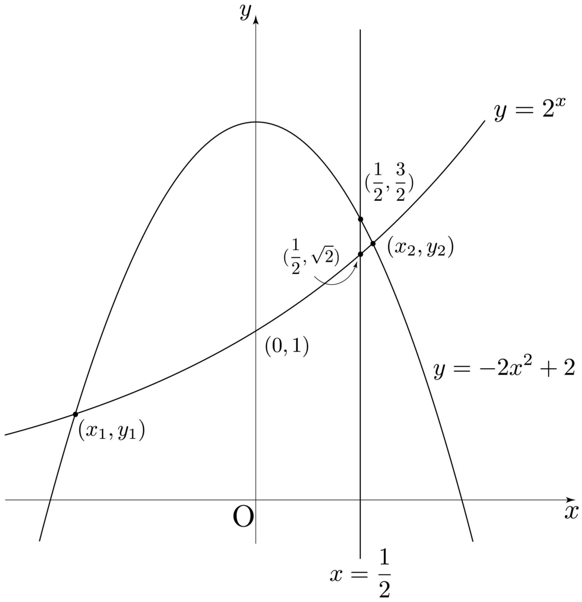
● **보기 ㄱ의 해제**

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

[접근 (1)]

“응 기출 사골ㅋㅋㅋㅋㅋ ez.”

라고 생각하며, 간단하게 풀어낼 수 있는 보기였습니다. 이는 다음 그림으로 설명을 마무리합니다.



만약 이 그림으로도 문제 해설이 충분치 않다면, 필요한 학생이라면...
이 칼럼을 고이 접어 9월에 다시 펴서 보길 추천합니다.

ㄷ

ㄷ

잠깐! 다음 보기 해제로 넘어가기 전에, 다음 보기들을 위해 위의 그림을 그릴 때 다음과 같은 포인트를 짚었는지 체크 해보겠습니다. 다음 포인트가 모두 자연스럽다면 이 칼럼을 읽을 준비가 되었습니다.

--Point

아래에서 선분 l은 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 이은 선분입니다.

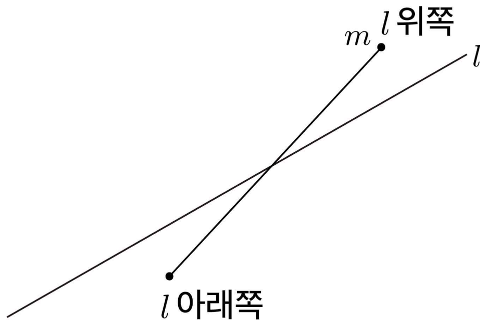
① ㄱ을 풀기 위해 $x=\frac{1}{2}$을 그으면 $y=2^x$와의 교점은 $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$이고 $y=-2x^2+2$와의 교점은 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$임을 관찰했다.

①은 ㄱ을 풀기 위한 포인트구요, ㄴ을 풀기 위한 기본적 포인트를 추가로 소개합니다.

② $y=2^x$ 그래프는 고정점 $(0, 1)$을 지나고 아래로 볼록이므로 구간 (x_1, x_2)에서 선분 l보다 아래쪽에 있다. 또한 $x_1<0<x_2$임이 자명하므로, 따라서 고정점 $(0, 1)$은 선분 l 보다 아래에 있다.

③ $y=-2x^2+2$는 위로 볼록이므로 구간 (x_1, x_2)에서 선분 l보다 위쪽에 있다. 따라서 ①에서 찍은 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$은 선분 l 보다 위쪽에 있다.

④ 기울기가 양수인 직선 l을 기준으로 다른 쪽에 있는 점을 각각 하나씩 잡아서 직선 m을 만들 때, 직선 m의 기울기가 양수이면 이 값은 직선 l의 기울기보다 항상 크다. 예를 들면 다음과 같다.



위의 포인트들 중 작위적인 포인트는 전혀 없다는 것을 알 수 있습니다.[1)]

---

1) ②, ③, ④는 ㄱ에서 떠올리기 힘든 포인트는 맞습니다. ㄴ 보기를 기울기로 해석했고 ㄱ을 풀 때 찍어놓은 $(0, 1)$, $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 점들의 관계성을 따질 때 쯤 떠올려야하는 포인트입니다.

ㄷ ㄷ

● 보기 ㄴ의 해제

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

[접근 (1)]

엌ㅋㅋㅋㅋㅋㅋ평가원 난이도는 아웃 오브 안중? 이것도 기출 사골이잖앜ㅋㅋㅋㅋ

Power 기울기!

라며 $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 1$로 변형해서 기울기 1인 직선을 당차게 찾다가 수 분 이내에..

[접근 (2)]

음... 기울기가 안되넹... 뭐지 내 기출분석은 무엇이 잘못된 것인가..

그냥 $y_1 = -2{x_1}^2 + 2$, $y_2 = -2{x_2}^2 + 2$ 대입해보자.

와 같이 대수적으로 문제풀이를 진행했을 수 있습니다.

현장에서는 매우 좋은 태돕니다. 대수적으로 풀이를 가져가도 ㄱ,ㄴ,ㄷ 유기성을 확실히 체감할 수 있고, 문제를 아예 못푸는 것 보단 100배 1,000배 3,000배 좋기도 하지요.

하지만 시험이 끝난 지금 현재 상태에서도 이 풀이만 알고 있다면, 상당히 위험합니다. 대입해서 대수적으로 진행하는 풀이는 기존 기출문제의 흐름과는 조금 결이 다른 면이 있기도 하고, 기존 기출문제의 흐름대로라면 이런 대수적 풀이가 전혀 불가능한 문제도 충분히 출제가 가능합니다.

이 문제 역시 대수적으로 풀이를 끌고나가지 않더라도, 여러분들이 지금까지 본 기출문제와 정확히 같은 매커니즘으로 풀립니다.

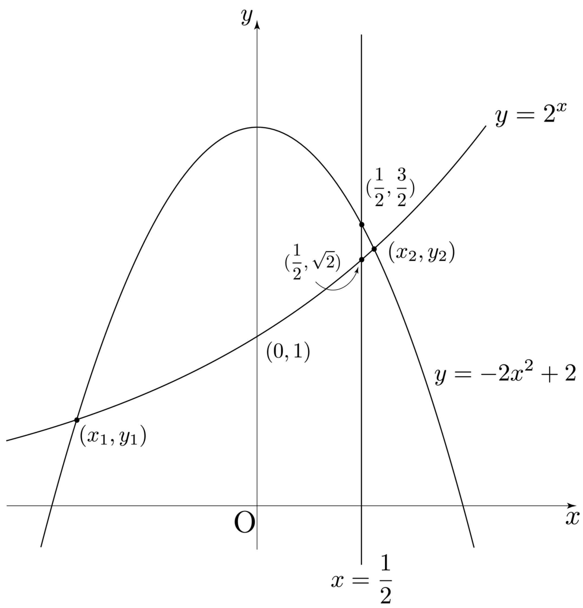
ㄷ ㄷ

다만 그 매커니즘이 체화가 안됐다는 점, 그리고 그 매커니즘을 여러분이 아직 맹신하지 못하고 있다는 점이 제일 큰 문제일 수 있습니다.

이제, 진짜 제대로 ㄴ을 풀어봅시다.

[Real 풀이의 시작]

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<1$로 바꾸면 좌변이 기울기 Form이니까, 기울기가 1인 직선을 찾아보자.



ㄱ을 풀면서 여러 점들을 자연스럽게 찍게 되었습니다.

특히, 반드시 찍혀 있어야 하는 점은 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$입니다.

이제 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, 즉 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$을 잇는 선분의 기울기와 어떤 기울기가 1인 직선을 적절히 비교해야 하므로

‘반드시 찍혀 있어야 하는 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$’을 기준으로,

이었을 때 기울기가 1인 선분이 되도록 하는 두 점을 적절히 잡아봐야 합니다.

결론적으로. 적절하게 생각할만한 두 점은 $(0,1)$과 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ 입니다.

ㄷ ㄷ

두 점 사이의 기울기는 1이고, 이전페이지에 있는

Point ②, ③, ④에 의하여 $(0, 1)$과 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$은 직선 l 기준으로 다른 쪽에 있으므로 ㄴ이 참이 되게 됩니다.

여기서 이걸 어떻게 생각하냐, 혹은 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$은 내 풀이에 찍혀있지 않은 점이다. 라고 할 수 있습니다.

그러나 ㄱ,ㄴ,ㄷ 문제는 ㄱ,ㄴ,ㄷ 각 보기가 제시하고 있는 명제뿐만이 아니라, 그 명제를 풀이하는 과정 속에서 제시하는 내용들도 유기성 있게 연결된다는 사실을 인지한다면

기울기 관점으로 해석해볼 때, ㄱ 보기에서 핵심적으로 사용된 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$이 사용될 것이란 생각을 자연스럽게 해야 옳습니다.

기준점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$을 잡는다면, 이후 이어볼만한 간단한 점 여러 개를 찍어가며 기울기가 1인 직선을 찾는 과정은 크게 어렵지 않지요.

● 보기 ㄷ의 해제

③ $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

이렇게 충실하게 기준점을 잡고 ㄱ, ㄴ을 풀었다면 ㄷ은 공짭니다.

점 (x_2, y_2)는 점 $\left(\frac{1}{2}, 2^{\frac{1}{2}}\right)$보다 위에 있습니다. 또한 점 (x_1, y_1)는 점 $(-1, 2^{-1})$보다 위에 있습니다.

따라서 $\frac{1}{2} < y_1$이고 $\sqrt{2} < y_2$이므로 $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2$입니다.

이제 굳이 함수를 $x=0$에 대칭인 이차함수를 주었다. 라는 점에 착안해서, 이차함수의 대칭성에 집중해봅시다.
이차함수의 대칭성에 의하여 $x_1 < -x_2$임을 쉽게 알 수 있습니다.
그러면 점 (x_1, y_1)은 점 $(-x_2, 2^{-x_2})$보다 아래에 있으므로 $y_1 y_2$의 값은 $2^{x_1} \times 2^{-x_1} = 1$보다 작을 수밖에 없죠.[2]

ㄷ ㄷ

따라서 ㄷ도 참입니다. 정답은 ㄱ, ㄴ, ㄷ.

3. 결론

가형에서의 ㄱㄴㄷ 합답형 문제들은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 각 보기의 명제를 최대한 엮어내야 합니다.
특히 엮어내야 하는 내용은 ㄱ, ㄴ, ㄷ에서 직접적으로 제시하는 명제뿐만 아니라
'명제를 증명하는 과정에서 얻어지는 내용', 즉 간접적으로 제시하는 내용들까지 포함해야 합니다.

앞에서 언급했듯이
이번 시험에서 대수 풀이를 통해 18번 문항을 맞췄다고 칼럼과 같은 풀이를 생각해보지 않는다면
큰 문제가 발생할 수 있습니다.

한 번 모의고사 문항에서 이차함수를 가볍게 지수함수로 바꿔 볼까요?

<6평 변형문제.1>[3]
두 곡선 $y=2^x$와 $y=3\cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right)$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1<x_2$일 때, 다음 <보기> 중 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

ㄱ. $x_2>\frac{1}{2}$
ㄴ. $y_2-y_1<x_2-x_1$
ㄷ. $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}<y_1y_2<1$

대수풀이만 가져가고 시험지 덮었던 친구들, 풀이 안녕하십니까?

2) y_1 값은 그대로 썼고, y_2값은 2^{-x_2}보다 작음을 이용하여 풀었습니다.
3) 정답은 ㄱㄴㄷ, 문제 모양이 6평과 정확히 일치. 해설도 방법 정확히 똑같음

다음 문제입니다.

<6평 변형문제.2>[4)]

두 곡선 $y=2^x$와 $y=3-\left(\frac{1}{3}\right)^x$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1<x_2$일 때, 다음 <보기> 중 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

ㄱ. $x_1<-\frac{1}{2}<x_2<1$

ㄴ. $y_2-y_1<\frac{16-3\sqrt{2}}{9}(x_2-x_1)$

대수적 풀이도 좋지만 (정확히는, 좋을 때 도 있지만), 이번 기회에 기존 기출문제에서 제시했던 합답형 매커니즘을 다시 한번 숙지하시고 가셔야합니다.

편협적인 풀이 저격하는 건 그렇게 어려운 일이 아닙니다.
함수 하나만 바꿨는데 저격되는 건, 엄청난 위험에 노출될 수 있단 뜻입니다.

---

4) 정답은 ㄱㄴ. ㄴ 보기에선 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(1, \frac{8}{3}\right)$을 발견한 후 이어서 푸는 것이 포인트

ㄷ ㄷ

4. Bonus

ㄱㄴㄷ 보기 문제 접근법에 대한 보너스 트랙, 갑니다.[5)]

20. 열린 구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\cos x+2x\sin x$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가진다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha<\beta$) [4점]

<보 기>

ㄱ. $\tan(\alpha+\pi)=-2\alpha$

ㄴ. $g(x)=\tan x$라 할 때, $g'(\alpha+\pi)<g'(\beta)$이다.

ㄷ. $\dfrac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}<\sec^2\alpha$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

재작년 문제이기 때문에, 익숙한 친구들은 수도 없이 봤을 겁니다.
바로 풀이 가볼까요?

● 보기 ㄱ의 해제

$x=a, b$에서 극값 가지니까, $f'(a)=0=f'(b)$을 만족시켜야겠구나.
(혹은 $f'(x)$의 부호변화가 있어야겠구나.)
그래서 미분해서 정리해봤더니 $\tan\alpha=-2\alpha$, $\tan\beta=-2\beta$가 나왔다! 음, 근데 ㄱ은 좀 다른 모양인데...

아, 쉽네. tan 주기가 π니까, $\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha=-2\alpha$tan (a+pi)=tan a=-2a 로 ㄱ 참!

이제 ㄴ 보자 ....

하고!!! 바로 ㄴ으로 넘어가면 안됩니다!!

아직 ㄱ에서, 해야할 것이 남았습니다.

5) 미안하지만 이과만 볼 수 있다.,

평가원은 왜! $\tan\alpha = -2\alpha$가 아니고 $\tan(\alpha+\pi) = -2\alpha$를 물어봤을까요.

단순히 $\tan\alpha = -2\alpha$를 물어보는 것과 비교하여 ㄱ보기가 뭘 더 묻고 있는지 고민하는게 기출분석입니다.

가만히 생각해보면, tan의 주기가 π임을 더 묻는 수준에 그치죠.

그럼, 과연 '이것만' 물어보려고 저렇게 줬을까요?

물론 그럴 수 있습니다. 삼각함수의 주기 또한 중요한 내용이니까요.
하지만 정말 고수들은,

여기서 '의심'을 하고, 계속해서 $\alpha+\pi$를 '의식'하며 ㄴ, ㄷ을 푼다는 겁니다.

우리는 이 의식을 유지한 채로 ㄴ으로 넘어가겠습니다.

● 보기 ㄴ의 해제

쨋!! $\alpha+\pi$ 가 또 나왔습니다.
평가원은 역시나 자비롭습니다. ㄱ에서 한 의심을 슬슬 확신으로 바꿔주고 있거든요.
$\alpha+\pi$로 뭔가를 해야 하는구나 라는 확신.

근데 또 뭔가 이상합니다. 않위, $\tan x$ 미분하면 $\sec^2 x$인거 모르는 가형러 있나요?
그냥 $\sec^2(\alpha+\pi) < \sec^2(\beta)$물어보면 될걸 근데 굳이 표현을 저렇게 한다?

제가 말했죠... 평가원은 자비롭습니다.

계속해서 tan란 함수를 노출시키고 있고 $g'(x)$이라는 기호로 순간변화율=미분계수=접선의 기울기를 강조하고 있거든요.[6)]

이제, 이 문제를 $\sec^2(\alpha+\pi) < \sec^2(\beta)$으로 바꿔 푸는 사람은 없습니다.
tan 그래프 그려놓고, $x=\alpha+\pi$에서의 미분계수와 $x=\beta$에서의 미분계수를 비교하려 할 것이고
이는 tan 그래프의 볼록성을 이용해 (참) 임을 알 수 있게 됩니다.

6) tan가 기울기랑 관련있는거 모르는 흑우 업재?

이제. ㄷ. 으로 넘어가죠.

cf. 이 문제를 $\sec^2(\alpha+\pi)<\sec^2(\beta)$ 방식으로만 푼 학생이 있다면, 문제풀이방식을 교정하셔야 합니다.
이 문제 정답은 이렇게 해도 나올거에요. 하지만 우린 이 문제만 풀려고 공부하는거 아니잖아요.
통용되는 해법을 연마해야 합니다. (앞에서도 엄청나게 강조했었습니다.)

● **보기 ㄷ의 해제**

ㄱ을 풀면서 $y=\tan x$ 그래프와 $y=-2x$ 의 두 교점 $(\alpha, \tan\alpha)$, $(\beta, \tan\beta)$가 자연스럽게 그려져 있을 것이며 ㄴ을 풀면서 점 $(\alpha, \tan\alpha)$을 π만큼 평행이동한 점 $(\alpha+\pi, \tan\alpha)$ 역시 그려져 있을 것입니다.

이를 통해 알 수 있는 건? 두 점 $(\alpha, \tan\alpha)$, $(\alpha+\pi, \tan\alpha)$에서의 미분계수가 서로 같음을 눈으로 확인 가능했겠죠..[7)]

오케이, 그러면 ㄷ.의 우변은 함수 $y=\tan x$의 $x=a$에서의 미분계수도 되지만, $x=\alpha+\pi$에서의 미분계수도 되겠구나란 생각을 계속 유지하실 수 있겠죠. 그럼 ㄷ.의 우변은, 더 이상 $\sec^2$의 함숫값이 아닌 어떤 함수 $(=\tan x)$의 미분계수, 접선의 기울기로 해석이 될 것이고 우변이 기울기이므로 좌변도 기울기로 해석하면 좋겠다는 생각을 하게 됩니다.

이제, 좌변으로 가시죠.
좌변의 분모를 보자마자, 평가원의 자비로움을 한번 더 느끼셔야 합니다.

$a-c+b$가 익숙합니까, $a+b-c$가 익숙합니까.
당연히 후잡니다. 왜냐면 어렸을 때부터 입에 달고 살았거든요.
에이 비 씨 디 이 에프 쥐~ 에이치 아이 제이 케이 쏼라쏼라쏼라살라.

....

또, $a-1-b$가 편안합니까, $a-b-1$이 편안합니까.

---

7) 논리적인 이유라면, tan 주기가 π이기 때문에 똑같은 곡선이 반복되서 그런 겁니다.

네 후잡니다. 위의 두 관점에 의하여, 분모의 $a+\pi-b$는, 원래는 $a-b+\pi$로 적혀야 더 익숙한 식이 됩니다. (π는 우리에게 익숙한 상수라 생각한 것) 그런데도 굳이 $a+\pi-b$라 적어준 것은?

ㄱ, ㄴ에서 계속 노출시켰던 $a+\pi$를 또다시 노출시키기 위함이죠. 분모를 $(a+\pi)-b$로 묶어서, 평균변화율로 해석해달란 겁니다. 그렇게 해서, ㄷ은 부등호 방향이 반대로 되어 틀린 보기가 됨을 알 수 있습니다.

자 어떤가요.
가형에서의 ㄱㄴㄷ 합답형 문제들은 ㄷ에 대한 직접적인 힌트를 ㄱ, ㄴ의 내용 뿐만 아니라 외형적인 형태로도 계속해서 던져주고 있습니다. 그걸, 잘 받아먹는 게 중요해요.