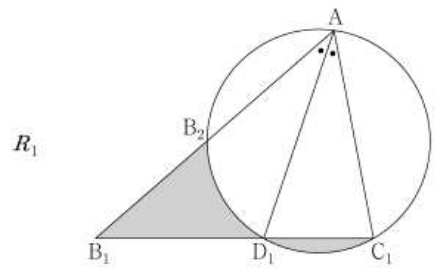
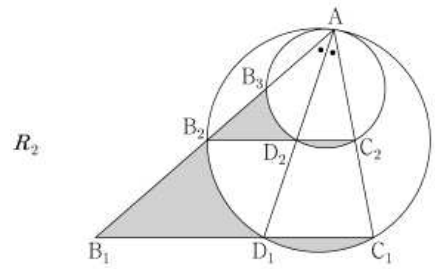
20. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$이고 $\angle B_1AC_1=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 D_1, 세 점 A, D_1, C_1을 지나는 원이 선분 AB_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_2라 할 때, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 B_2D_1로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 호 C_1D_1로 둘러싸인 부분인 ⌓ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1C_1에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1과 만나는 점을 각각 D_2, C_2라 하자. 세 점 A, D_2, C_2를 지나는 원이 선분 AB_2와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_3이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 B_3D_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 호 C_2D_2로 둘러싸인 부분인 ⌓ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]





⋮ ⋮

① $\frac{27\sqrt{3}}{46}$ ② $\frac{15\sqrt{3}}{23}$ ③ $\frac{33\sqrt{3}}{46}$

④ $\frac{18\sqrt{3}}{23}$ ⑤ $\frac{39\sqrt{3}}{46}$

2021학년도 6월 평가원 가형 20번

이 문제를 풀기 위해서 어떤 것을 이용해야할까?

먼저 무한등비급수 공식인 $\frac{a}{1-r}$을 이용할 수 있다.

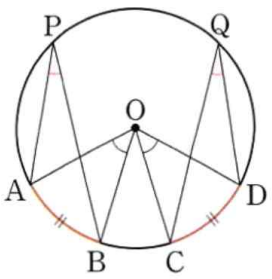
닮은 도형의 넓이의 합을 구하는 문제이므로 무한급수의 식을 쓰는 것은 당연하다.
이제 우리는 첫 번째 도형의 넓이와 닮음비를 구해주면 될 것 같다.

이 문제는 [원주각의 성질을 이해]해야 풀 수 있는 문제였다.
중학교 3학년 마지막 단원인 원에 있는 개념이다.

상식적으로 저 도형의 넓이를 구하기는 굉장히 힘들다.

우리는 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 방법을 거의 모른다.
적분의 개념을 배울 때도 주어진 구간을 수직으로 잘게 잘라서 직사각형의 넓이의 합을 구했었고 그나마 구할 수 있었던 것은 원 혹은 원의 일부인 부채꼴의 넓이이다.
즉, 넓이를 구하려면 부채꼴의 넓이와 삼각형, 혹은 사각형의 넓이를 구하여 빼주거나 더해주어야 한다.

그나마 활꼴인 C_1D_1은 부채꼴에서 삼각형 넓이를 빼어 구할 수 있겠지만, 도형 $B_1B_2D_1$의 넓이는 쉽게 구할 수가 없다.



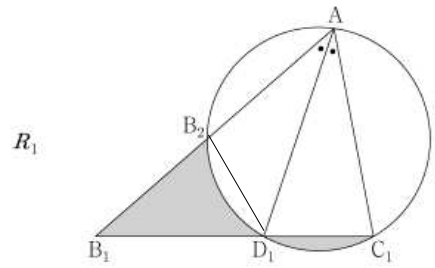
교과서에서는 원주각이 같으면 중심각이 같고, 중심각이 같으면 호의 길이도 같으므로

1) 한 원에서 같은 크기의 원주각에 대한 호의 길이는 같고

2) 한 원에서 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기는 같다.

라고 적혀있다.

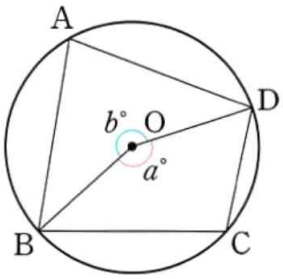
원주각이 같으므로 호의 길이와 현의 길이도 같음을 이해할 수 있다.
즉, 활꼴인 C_1D_1를 그대로 붙여 B_2D_1자리에 옮기면 삼각형 $B_1B_2D_1$가 나오게 된다.



이제 문제가 구하는 것은, 삼각형의 넓이를 구하는 것이다.

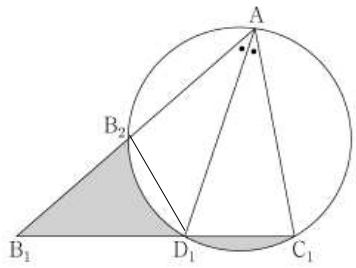
각의 이등분선의 성질에서, $\overline{\mathrm{AB_1}}:\overline{\mathrm{AC_1}}=\overline{\mathrm{B_1D_1}}:\overline{\mathrm{C_1D_1}}$이므로
$3:2=\overline{\mathrm{B_1D_1}}:\overline{\mathrm{C_1D_1}}$에서 $\overline{\mathrm{B_1D_1}}=3k$, $\overline{\mathrm{C_1D_1}}=2k$로 두었을 때, 중심각은 원주각의 2배이므로 원의 중심 O에 대하여 $\angle \mathrm{D_1OC_1}=60^\circ$이다.
$\triangle \mathrm{D_1OC_1}$는 정삼각형이므로 반지름은 $\overline{\mathrm{C_1D_1}}=2k$이다.

원주각 단원에서는 다음과 같은 개념도 설명한다.



[원에 내접하는 사각형의 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.]
그 이유는, 그림의 a°와 b°의 합은 360°이므로, a°의 원주각인 $\angle \mathrm{BAD}$는 a°의 반이고 b°의 원주각인 $\angle \mathrm{BCD}$는 b°의 반이기 때문이다.

R_1



즉 그림에서 $\angle B_2AC_1 + \angle B_2D_1C_1 = 180^\circ$ 이고 $\angle B_2D_1C_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 이므로, $\angle B_1D_1B_2 = 60^\circ$ 이다. 즉, 닮음이 보인다! 구하는 삼각형과 큰 삼각형은 두 개의 각의 크기가 같으므로 닮음이다. 식으로는 $\triangle B_1D_1B_2 \backsim \triangle B_1AC_1$ 이다.

코사인 법칙으로 $\overline{B_1C_1}$의 길이를 구해보면, $\overline{B_1C_1}^2 = 3^2 + 2^2 - 12\cos 60^\circ = 7$이므로

$\overline{B_1C_1} = \sqrt{7} = 5k,\ k = \frac{\sqrt{7}}{5}$

$\triangle B_1D_1B_2 = \frac{1}{2} \times 3k \times 2k \times \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}k^2}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{50}$

닮음비인 $\overline{AB_1}$: $\overline{AB_2}$를 구해보면, $\overline{B_1B_2} = 2k \times \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{7}{5}$이므로,

$\overline{AB_1}$: $\overline{AB_2} = 3 : 3 - \frac{7}{5} = 3 : \frac{8}{5}$, 넓이비는 $r = \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{64}{225}$

$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1 - \frac{64}{225}} = \frac{189\sqrt{3}}{2 \times 161} = \frac{27\sqrt{3}}{46}$으로 답은 1번이다.