* 2022학년도 대수능 예시문항 선택 미적 29번.

$f(x)=e^{x}+x-1$, $(t>0)$. $F(x)=\int_{0}^{x}\{t-f(s)\}ds$. $\therefore F(0)=0$.

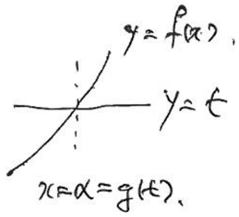
$F(x)$가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가지면 $\alpha=g(t)$.

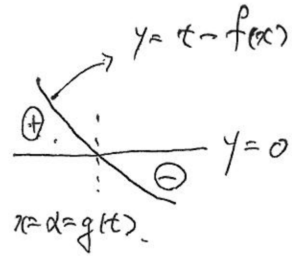
$$\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt=?$$

$f(x)$는 실수 전체의 집합에 대하여 증가함수.

$\therefore F'(x)=t-f(x)=0$ 인 α는 오직 하나만 존재하고,

$F'(x)$의 부호가 ⊕ → ⊖ 바뀌므로 극댓값이자 최댓값이다.





$F'(\alpha)=F'(g(t))=0=t-f(g(t))$

$\therefore f(g(t))=t \qquad \therefore f'(g(t))\cdot g'(t)=1$.

→ V1. $f(x)=e^{x}+x-1$, $f'(x)=e^{x}+1$. $\therefore f'(g(t))=e^{g(t)}+1=\dfrac{1}{g'(t)}$.

$$\therefore \int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt=\int_{f(1)}^{f(5)} g(t)\cdot g'(t)\,dt=\frac{1}{2}\times\Big[\{g(t)\}^{2}\Big]_{f(1)}^{f(5)}=\frac{1}{2}\times(5^{2}-1^{2})=\frac{24}{2}=12_{//}$$

→ V2. $g(t)=k$라 하면, (역함수 관계식을 활용, $f(x)$는 역함수 존재)

$$g'(t)dt=dk=\frac{1}{f'(g(t))}dt=\frac{1}{f'(k)}dt. \qquad \therefore dt=f'(k)dk.$$

$$\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt=\int_{1}^{5}\frac{k\times f'(k)}{1+e^{k}}dk=\int_{1}^{5}k\,dk=\Big[\frac{1}{2}k^{2}\Big]_{1}^{5}=\frac{24}{2}=12_{//}$$

↑ $f'(k)=1+e^{k}$.