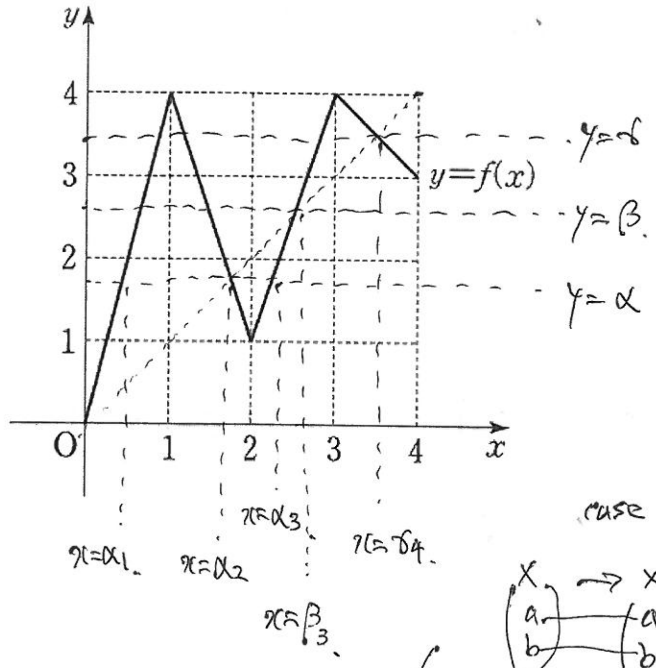
* 2018학년도 대수능 수학 나형 21번.

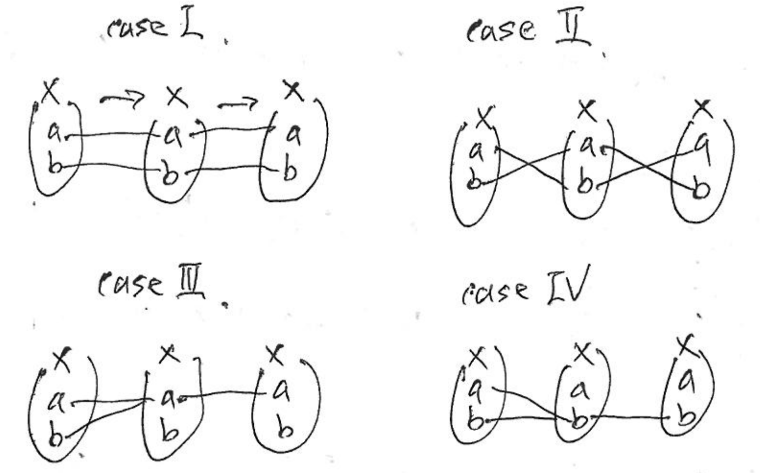


$X=\{a, b\}$ → $n(X)=2$.

(단, $0 \le a < b \le 4$).

X에서 X로의 함수 $g(x)=f(f(x))$ 존재.

$g(a)=f(f(a))=f(a)$, $g(b)=f(f(b))=f(b)$.



X를 정의역으로 하는, $f(x)$의 부분집합을 $f_1(x)$라 하면 오른쪽의 4가지 경우들은 모두 $f_1(x)$와 $f_1(x)$의 합성인 $f_1 \circ f_1(x)$ 함수들이다.

→ 함수 $g(x)=f(f(x))$가 존재하면, 그 가능한 형태가 위의 4가지 경우들 중 하나임.

(i) case I.

$f(a)=a$, $f(b)=b$. 항등함수이므로 $f(x)=x$를 만족시키는 x값들 중에서 a와 b가 가능하다. a와 b의 대소관계는 이미 정해져 있으므로 선택하면 자동 결정된다.

$\{x \mid f(x)=x,\ 0 \le x \le 4\} = \{0,\ \alpha_2(=\alpha),\ \beta_3(=\beta),\ \gamma_4(=\gamma)\}$.

원소의 개수는 4이므로 (i) case I에 해당하는 집합 X의 개수는 ${}_4C_2=6$이다.

→ $\{0, \alpha\}$, $\{0, \beta\}$, $\{0, \gamma\}$, ..., $\{\beta, \gamma\}$. → 6개.

(ii) case II. ($f(a)=a$, $f(b)=a$)

$a=\alpha_2$, $b=\alpha_3$ (ok). → 1개.

주의: $a=\beta_1$, $b=\beta_3$ 라면 case II가 아니고 case III에 해당.

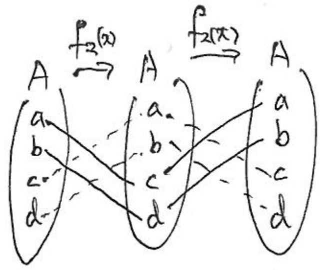
(iii) case Ⅲ. ($f(a)=b$, $f(b)=b$)

$$\left.\begin{array}{l} a=\alpha_1,\ b=\alpha_2 \\ a=\beta_1,\ b=\beta_3 \\ a=\beta_2,\ b=\beta_3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a=\gamma_1,\ b=\gamma_4 \\ a=\gamma_2,\ b=\gamma_4 \\ a=\gamma_3,\ b=\gamma_4 \end{array}\right\} \quad 6\text{개}$$

(iv) case Ⅳ ($f(a)=b$, $f(b)=a$)

$f(a)=b$, $f(a)=g(a)=f(f(a))=f(b)=a$. $\rightarrow a=b$. (X) ⇒ 감소함수 형태 불가.

따라서 구하는 집합 X의 개수는 (i)~(iv)에 의해 $6+1+6+0=13$ //

* 

→ 이런 경우라면 $f_2 \circ f_2(x)$는 $X=\{a,b\}$에서 X로의 함수가 아니고 A에서 A로의 함수다.

따라서 case Ⅳ를 생각할 때, 직접 합성함수를 구하고 (or 그리고), 기울기가 (-1)인 직선과의 교점이 $y=x$ 대칭인 경우를 살펴보는 것은 필수적인 방법은 아니다.