2021학년도 6월 직전 우주설 전승원 모의평가

수학 가형 정답

1	⑤	2	③	3	①	4	④	5	③
6	④	7	②	8	③	9	①	10	④
11	①	12	⑤	13	④	14	③	15	③
16	②	17	③	18	②	19	⑤	20	⑤
21	③	22	35	23	33	24	11	25	9
26	39	27	4	28	53	29	284	30	32

수학 영역

가형 해설

1.

$2^a = 3^b$에서 $(2^a)^{\frac{1}{b}} = (3^b)^{\frac{1}{b}}$

따라서 $2^{\frac{a}{b}} = 3$

2. [출제의도] 초월함수의 미분 이해하기

$f(x) = x + e^{2x}$에서 $f'(x) = 1 + 2e^{2x}$

따라서 $f'(0) = 1 + 2 \times 1 = 3$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x - 1)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x - 1} \times \lim_{x\to}\frac{\cos x - 1}{x^2}$$

$$= 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

4. [출제의도] 사건의 독립 이해하기

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A^C, B^C 역시 독립이다.

따라서

$\mathrm{P}(A^C \cap B^C) = \mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$

(근데 독립은 6평 범위아 아니... 읍!! 읍!!!
미안합니다 ㅠㅠ 우주설 올림)

5.

가운데 색칠할 색을 정하는 경우의 수가 4이고,

나머지 3색을 칠하는 경우의 수는 $\frac{3!}{3} = 2$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $4 \times 2 = 8$

6. [출제의도] 삼각함수의 성질과 삼각함수의 부호 이해하기

$\sin\alpha$와 $\cos\alpha$의 부호가 같으므로

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이거나 $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$이다.

(i) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$인 경우

$\sin\alpha : \cos\alpha = 4 : 3$이므로

$\sin\alpha = 4k, \cos\alpha = 3k$(단, k는 상수)라 할 때,

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$이므로

$25k^2 = 1, k = \frac{1}{5}\ (k > 0)$이고

$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{3}{5}$이다.

$\sin\alpha : \cos\alpha : \tan\beta = 4 : 3 : 5$이므로

$\tan\beta = 1$이고

$\tan\beta > 0$이므로 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$이거나

$\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$인데 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$일 경우

$\tan\alpha = \frac{4}{3} > \tan\beta = 1$이기 때문에 $\alpha > \beta$가

되므로 조건에 어긋난다.

따라서 $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$

(ii) $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$인 경우

$\sin\alpha : \cos\alpha = 4 : 3$이므로

$\sin\alpha = 4k, \cos\alpha = 3k$(단 k는 상수)라 할 때,

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$이므로

$25k^2 = 1, k = -\frac{1}{5}\ (k < 0)$이고

$\sin\alpha = -\frac{4}{5}, \cos\alpha = -\frac{3}{5}$이다.

$\sin\alpha : \cos\alpha : \tan\beta = 4 : 3 : 5$이므로

$\tan\beta = -1$이고 $\tan\beta < 0$이므로

$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$이다. 그런데 이 경우 $\alpha > \beta$가 되므로

조건에 어긋난다.

(i),(ii)에 의하여 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

$\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$이고 $\tan\beta = 1$이므로 $\beta = \frac{5}{4}\pi$

따라서

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \frac{5}{4}\pi) = -\cos(\alpha + \frac{\pi}{4})$이고

삼각함수의 덧셈정리에 의해

$-\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}) = \frac{\sqrt{2}}{10}$

7.

$f'(x)$의 전개식에서 x^2의 계수가 60이면,

$f(x)$의 전개식에서 x^3의 계수는 20이다.

$\left(x^2 + \frac{k}{2x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6\mathrm{C}_r (x^2)^r \left(\frac{k}{2x}\right)^{6-r} = {}_6\mathrm{C}_r \left(\frac{k}{2}\right)^{6-r} x^{3r-6}$$

$(r = 0, 1, 2, \cdots, 6)$이다.

이때, $3r - 6 = 3$에서 $r = 3$

따라서, x^3의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{k}{2}\right)^3 = 20$

$\therefore k = 2$

8. [출제의도] 삼각함수의 부호와 동경 이해하기

$\sin\theta \times \cos\theta \ge 0$이므로 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$이거나

$\pi \le \theta \le \frac{3}{2}\pi$이다.

좌표평면에서 각 θ가 나타내는 동경과 각 7θ가 나타내는 동경이 서로 일치하므로

$7\theta - \theta = 6\theta = 2n\pi$(단, n은 정수),

$\theta = \frac{n}{3}\pi$

따라서 조건에 맞는 θ는 $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4}{3}\pi$이고

그 값들의 합은 $\frac{8}{3}\pi$이다.

9.

점 $\mathrm{A}(k, \log_2 k)$, 점 $\mathrm{B}(k, -\log_2(4-k))$이다.

$\overline{\mathrm{AB}} = |\log_2 k + \log_2(4-k)| = |\log_2(4k - k^2)|$

(i) $\log_2(4k-k^2) = 2$일 때

로그의 정의에 의하여,

$4k - k^2 = 4$, $k^2 - 4k + 4 = 0$

$(k-2)^2 = 0$, $\therefore k = 2$

(ii) $\log_2(4k-k^2) = -2$일 때

로그의 정의에 의하여,

$4k - k^2 = \frac{1}{4}$, $k^2 - 4k + \frac{1}{4} = 0$

판별식을 D라 하면,

$D/4 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} > 0$

즉, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $\frac{1}{4}$이다

따라서, 구하는 값은 $2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

10. [출제의도] 판별식과 삼각함수의 부등식 이해하기

$f(x) = (\sin\theta)x^2 - 2(\cos\theta)x + 3\sin\theta$라 할 때,

(i) $\sin\theta = 0$인 경우 $f(x)$가 일차함수이기에

$f(x) < 0$인 x가 존재하므로 성립하지 않는다.

(ii) $\sin\theta \ne 0$인 경우 $f(x)$는 이차함수이고

$f(x) \ge 0$이기 위해선

$\sin\theta > 0, \frac{D}{4} = \cos^2\theta - 3\sin^2\theta \le 0$이어야 한다.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$이므로 $1 \le 4\sin^2\theta$

$\sin\theta \ge \frac{1}{2}\ (\sin\theta > 0)$이고 $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5}{6}\pi$이다.

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi$이므로 $\alpha + 3\beta = \frac{8}{3}\pi$

11.
$A\cap B$의 원소 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_5C_2$이고, 나머지 원소 3개를 배열하는 경우의 수는 3^3-2^3이다.
따라서, 구하는 경우의 수는
$\therefore {}_5C_2\times(3^3-2^3)=190$

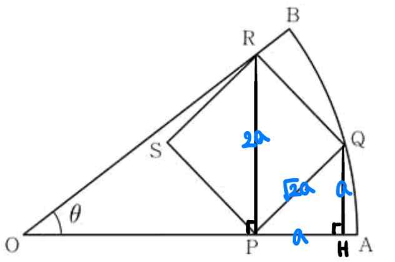
12. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 미분계수 구하기
주어진 극한식에서 $h\to0$이므로
$f(\frac{\pi}{4}+h)+f(a+h)\to0$
$f(x)$는 연속함수이기에 $f(\frac{\pi}{4})+f(a)=0$
따라서 $f(a)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이고 $a=\frac{5}{4}\pi$ 또는
$a=\frac{7}{4}\pi$
그러므로 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(\frac{\pi}{4}+h)+f(a+h)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(\frac{\pi}{4}+h)+f(a+h)-f(\frac{\pi}{4})-f(a)}{h}$
$=f'(\frac{\pi}{4})+f'(a)=\frac{\sqrt{2}}{2}+f'(a)=b$(단, $b\neq0$)

$a=\frac{5}{4}\pi$일 때, $f'(a)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $b=0$
$a=\frac{7}{4}\pi$일 때, $f'(a)=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $b=\sqrt{2}$
따라서 $a+b=\frac{7}{4}\pi+\sqrt{2}$

13.
$\sqrt[n]{\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)}$ 의 실근 개수는 $\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$의 부호, n의 홀, 짝 여부에 따라 다르다.
또한, $\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$은 주기가 6이므로 6번마다 수열 a_n이 반복된다.
(i) $n=6k+1$일 때 ($k\geq1$인 정수)
$\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)>0$ 이므로, $a_n=1$이다.
(ii) $n=6k+2, 6k+3, 6k+4$일 때
($k\geq0$인 정수)
$\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)<0$ 이므로,
$n=6k+2, 6k+4$이면 $a_n=0$
$n=6k+3$이면 $a_n=1$이다.
(iii) $n=6k+5, 6k+6$ ($k\geq0$인 정수)
$\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)>0$이므로,
$n=6k+5$이면 $a_n=1$
$n=6k+6$이면 $a_n=2$이다.
그러므로, $\sum\limits_{n=2}^{m}a_n=16$을 만족시키는 m의 값은 $m=21, 22$이다.

14. [출제의도] 조건에 맞는 수열 찾기
모든 자연수 n에 대하여
$(a_{n+1}-a_n)^2+(a_{n+1}-a_n)-6=0$인데 이를 잘 정리하면 $(a_{n+1}-a_n-2)(a_{n+1}-a_n+3)=0$
모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=2$ 또는 $a_{n+1}-a_n=-3$
$a_1=2$이고 $a_n\geq0$이므로 $a_2=4$
$a_2=4$이므로 $a_3=1$ 또는 $a_3=6$
(i) $a_3=1$인 경우
$a_3=1$이고 $a_n\geq0$이므로 $a_4=3$
조건 (나)에 의해 $a_k=0$을 만족시키는 자연수 k가 닫힌 구간 [1,5]에 적어도 하나 존재해야 하므로 $a_5=0$
(ii) $a_3=6$인 경우
$a_4=3$ 또는 $a_4=8$인데 $a_4=8$일 경우 조건 (나)를 만족시키지 못하므로 $a_4=3$
조건 (나)에 의해 $a_k=0$을 만족시키는 자연수 k가 닫힌 구간 [1,5]에 적어도 하나 존재해야 하므로 $a_5=0$
$a_5=0$이고 $a_n\geq0$이므로 $a_6=2$
$a_6=2$이므로 a_6에서 a_{10}까지는 a_1에서 a_5까지의 패턴과 같은 패턴으로 나타난다.
따라서 $a_7=4$, $a_3=1$인 경우 $a_8=6$, $a_3=6$인 경우 $a_8=1$, $a_9=3$, $a_{10}=0$
그러므로 $\sum\limits_{n=1}^{10}a_n=25$

15.
$\angle SPQ=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle OPS=\angle APQ=\frac{\pi}{4}$
그러므로, 선분 RP는 선분 OA에 수직이다.
점 Q에서 선분 OA에 수선을 내리고 그 점을 H라 하고, $\overline{QH}=a$라 하자.

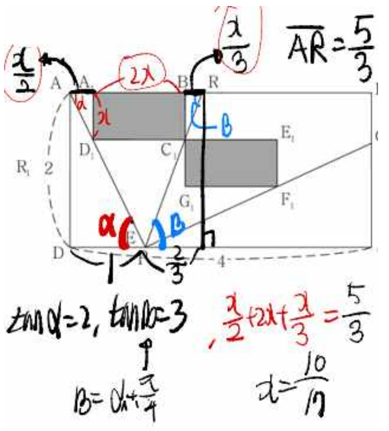


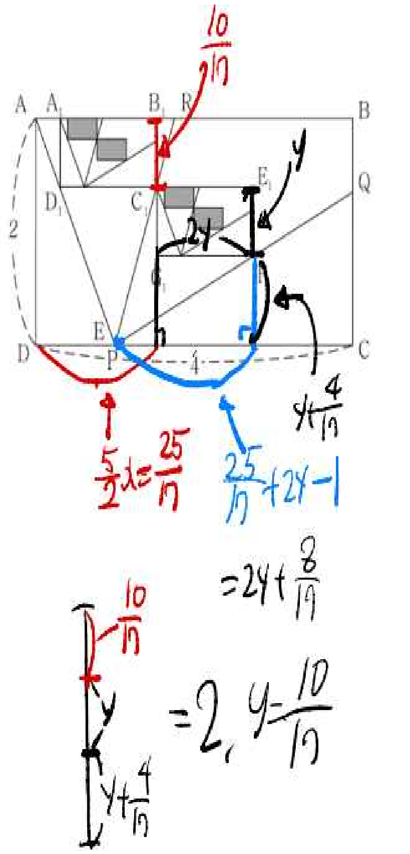
삼각형 OPR에서 $\tan\theta=\frac{\overline{RP}}{\overline{OP}}$ 이므로,
$\overline{OP}=2a\cot\theta$이고, $\overline{OH}=a(1+2\cot\theta)$이다.
삼각형 OQA에서 $\overline{OQ}^2=\overline{OA}^2+\overline{QA}^2$이므로
$1=a^2+a^2(1+2\cot\theta)^2$,
$a^2=\frac{1}{4\cot^2\theta+4\cot\theta+2}=\frac{\tan^2\theta}{2\tan^2\theta+2\tan\theta+2}$
$S(\theta)=2a^2=\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta+2\tan\theta+2}$
$\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\theta}{\theta^n(\tan^2\theta+2\tan\theta+2)}$ 이 0이 아닌 수로 수렴하기 위해서 $n=2$이여야 한다.

$\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\theta}{\theta^2(\tan^2\theta+2\tan\theta+2)}$
$=\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{1}{\tan^2\theta+2\tan\theta+2}$
$=\frac{1}{2}=m$
따라서, $m+n=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

16. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 값 구하기
$\overline{PQ}=c$, $\angle QOR=\theta$라 하자. 조건 (가)와 주어진 함수의 대칭성에 의해
$\overline{QR}=\overline{OP}=\overline{PQ}=c$
각PQO와 각 QOR이 엇각이고 조건 (가)에 의해 $\angle POQ=\angle PQO=\angle QOR=\theta$, $\angle POR=2\theta$
이 때, 주어진 함수의 대칭성에 의해 $\angle QRO=\angle POR=2\theta$인데
조건 (나)에 의해 $3\theta=\frac{\pi}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{6}$

따라서 $c=\overline{RQ}=\overline{OR}\sin\theta=\frac{\pi}{2b}$이고
(점 P의 x좌표)$=\frac{\pi}{2b}-\frac{\pi}{4b}=\frac{\pi}{4b}$
(점 P의 y좌표)$=c\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}\pi}{4b}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$
그러므로 $\frac{ab}{\pi}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

17.




$\frac{400}{17^2}$ / $1-\frac{50}{17^2}$ $S_1 = \frac{400}{17^2}$, 공비$=\left(\frac{5}{17}\right)^2 \times 2 = \frac{50}{17^2}$

$= \frac{400}{239}$

18. [출제의도] 수열의 합을 구하는 과정 추론하기

(가)

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)$이고

$-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k-1}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n-1}\right)$

$=-1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{1}{2n+1}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)-1+\frac{1}{2n+1}$

따라서 $f(n)=1-\frac{1}{2n+1}$

(나)

$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{k}$

따라서 $g(k)=\frac{1}{k}$

(다)

$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2+3k+n}{4k^3+(4n+2)k^2+2kn}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+1-\frac{1}{2n+1}$

인데

$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2+3k+n}{4k^3+(4n+2)k^2+2kn}=1-\frac{1}{2n+1}$이다.

그러므로 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}$인데

$a_{n,k}=\frac{1}{k+n}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}$이므로

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{n,k}-\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)\right)$

따라서 $h(k)=\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}$

(가),(나),(다)에 의하여 $\frac{h(10)}{f(10)\times g(20)}=\frac{1}{20}$

19.

A가 승리하기 위해선, 홀수가 적힌 공을 모두 꺼내야 한다.

(ⅰ) 홀수가 3번 나왔을 때

$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$

(ⅱ) 홀수가 3번, 짝수가 1번 나왔을 때
이 경우, 짝수는 마지막에 나올 수 없다.

${}_3C_1\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{20}$

(ⅲ) 홀수가 3번, 짝수가 2번 나왔을 때
이 경우, 짝수는 마지막에 나올 수 없다.
또한, 짝수는 $(4,6)$이 나올 수 없고, $(2,6)$, $(2,4)$가 나와야 한다.

${}_4C_2\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은 다음과 같다.

$\therefore \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{20}+\frac{3}{20}+\frac{1}{5}}=\frac{1}{2}$

20. [출제의도] 지수함수와 직선의 교점 관찰하기

ㄱ. 직접 그래프를 그려보면 알 수 있다.(참)

ㄴ. $b=a^2$이면 $b^{b_1}=2b_1$에서 $a^{2b_1}=2b_1$,
$b^{b_2}=2b_2$에서 $a^{2b_2}=2b_2$

$a^{a_1}=a_1, a^{a_2}=a_2$이므로 $a_1=2b_1, a_2=2b_2$

따라서 $a_1b_2=a_2b_1$(참)

ㄷ. $b=a^2$일 때, $a_1=2b_1$이므로 $\mathrm{R}(b_1,a_1)$

따라서 선분PR의 기울기는 0이고 $\angle\mathrm{OPR}=\frac{\pi}{4}$

$b>a^2$일 때 점R은 $b=a^2$일 때 점R보다 오른쪽 위에 있으므로 $b=a^2$일 때보다 $\angle\mathrm{OPR}$이 커지게 된다.

따라서 $b>a^2$일 때 $\angle\mathrm{OPR}>\frac{\pi}{4}$(참)

21.

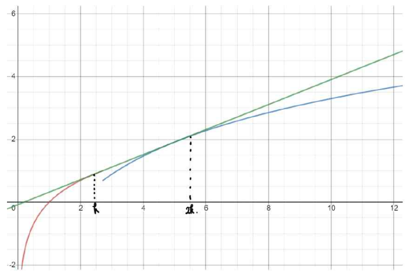
직선 $y=m(x-e)+b$는 점 (e,b)를 정점으로 지나고, 기울기가 m이다.

$f(e)=-a+\ln(2e^2)=-a+2+\ln 2$

인데, $a+b>2+\ln 2$이므로 $b>f(e)$이다.

일반적으로, $g(m)$이 불연속인 지점은 $y=f(x)$와 $y=m(x-e)+b$ 접하는 m이다.

그런데 $g(m)$이 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로, $0<x<e$, $x>e$인 구간에서 직선 $y=m(x-e)+b$이 공통접선을 갖는다.



$(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $(-a+\ln(2x^2))'=\frac{2}{x}$

이므로 접선의 기울기가 동일하기 위해서 접점의 x좌표를 k, $2k$라 하자. ($\frac{e}{2}<k<e$)

$(k,f(k))$에서 그은 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{k}x+\ln k-1$

$(2k,f(2k))$에서 그은 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{k}x+\ln 8k^2-a-2$이다.

두 접선이 동일하기 위해서

$\ln k-1=\ln 8k^2-a-2$

$\therefore a=\ln 8k-1$

$\frac{e}{2}<k<e$에서

$2\ln 2<\ln 8k-1(=a)<3\ln 2$이고,

$2<e<2\sqrt{2}$이므로 $a=2$이다. ($\because a$는 정수)

공통접선을 계산하면

$y = \dfrac{8}{e^3}x + 2 - \ln 8$ 이고, (e, b)를 지나므로

$b = 2 + \dfrac{8}{e^2} - \ln 8$ 이다.

$p = 2,\ q = 8,\ r = 8$
$\therefore p + q + r = 18$

22. [출제의도] 중복조합 계산하기
${}_3\mathrm{H}_4 = {}_6\mathrm{C}_4$, ${}_4\mathrm{H}_3 = {}_6\mathrm{C}_3$이므로 $15 + 20 = 35$

23.
등차 중항의 성질에 의하여,
33

24. [출제의도] 확률의 곱셈정리 이해하기
앞면이 나오는 횟수가 뒷면이 나오는 횟수랑 같으려면 각각의 횟수가 2여야 한다. 앞면이 2번 나올 확률과 뒷면이 2번 나올 확률은 $(\frac{1}{2})^2$이고 앞면과 뒷면이 나오는 순서를 정하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$이다. 따라서 구하는 확률은
${}_4\mathrm{C}_2 \times (\frac{1}{2})^4 = \frac{3}{8}$이고 $p + q = 8 + 3 = 11$

25.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k+1} = n^2 + 1$ 에 $n = 1$을 대입하면,

$\dfrac{S_1}{2} = 1 + 1 \qquad \therefore S_1 = a_1 = 4$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} = 2n - 1\ (n \geq 2)$

$\therefore S_n = 2n^2 + n - 1\ (n \geq 2)$
$S_n - S_{n-1} = 2(2n-1) + 1 = 4n - 1\ (n \geq 3)$
$\therefore a_n = 4n - 1\ (n \geq 3)$
$a_2 = S_2 - S_1 = 9 - 4 = 5$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-1}{n} = 4$

따라서, 구하고자 하는 값은 9이다.

26. [출제의도] 독립의 정의를 활용하여 문제해결하기
두 사건 A, B가 서로 독립이기 위해서는
$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B)$를 만족해야 한다.

(ⅰ) $3n$이 15의 배수인 경우
$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{15}$이므로 100이하의 5의 배수인 모든 n에 대해 두 사건 A와 B가 독립이다. 이를 만족하는 n의 개수는 20

(ⅱ) $3n$이 15의 배수가 아닌 5의 배수인 경우
$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{k}{3n}$라 하자.(단, k는 $0 \leq k \leq 3n$인 정수)
$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$이므로 $3n = 15k$
그런데 이는 $3n$이 15의 배수가 아닌 5의 배수라는 가정에 어긋나므로 조건을 충족시키는 n이 존재하지 않는다.
(ⅲ) $3n$이 5의 배수가 아닌 경우
$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3} \times \frac{l}{3n} = \frac{l}{9n}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{m}{3n}$이라 하자.
(단, l, m은 $0 \leq l \leq 3n, 0 \leq m \leq 3n$인 정수)
$l = 3m$이므로 $3n$이하의 5의 배수의 개수가 15의 배수의 개수의 3배이면 된다.
m의 개수를 변화시키면서 관찰하면 조건을 만족하는 n이 $1 + 5p$ (단, p는 0보다 크거나 같은 정수)라는 것을 알 수 있다. 따라서 이 경우 n의 개수는 20
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 구하는 n의 개수는
$20 + 0 + 20 = 40$

그런데 $\mathrm{P}(B) > 0$에 의해서 $n = 0$일수 없다.
$40 - 1 = 39$

(근데 독립은 6평 범위아 아니... 읍!! 읍!!!
미안합니다 ㅠㅠ 우주설 올림)

27.
$f(x) = \dfrac{kx}{x^2+1}$ 이라 하면,

$f'(x) = \dfrac{k(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ 이므로 $x = 1, -1$에서 극값을 가진다.
(ⅰ) $k > 0$일 때
$f(x)$는 $x = 1$에서 최댓값 $\dfrac{k}{2}$을 가지고,

$x = -1$에서 최솟값 $-\dfrac{k}{2}$을 가진다.
무한등비수열이 수렴하기 위해선
$-1 < f(x) \leq 1$을 성립해야 한다.

$-1 < \dfrac{k}{2} \leq 1,\ -2 < k \leq 2\ \cdots$ ㉠

$-1 < -\dfrac{k}{2} \leq 1,\ -2 \leq k < 2\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $-2 < k < 2$이다.
$\therefore 0 < k < 2$
(ⅱ) $k = 0$일 때
x값에 관계없이 항상 성립한다.
(ⅲ) $k < 0$일 때
$f(x)$는 $x = 1$에서 최솟값 $\dfrac{k}{2}$을 가지고,

$x = -1$에서 최댓값 $-\dfrac{k}{2}$을 가진다.
$-1 < f(x) \leq 1$을 성립해야 한다.

$-1 < \dfrac{k}{2} \leq 1,\ -2 < k \leq 2\ \cdots$ ㉠

$-1 < -\dfrac{k}{2} \leq 1,\ -2 \leq k < 2\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $-2 < k < 2$이다.
이 때, $x = -1$인 경우 k값에 관계없이 무한등비수열이 수렴한다. 그러므로, $-\dfrac{k}{2} = 1$인 경우도 무한등비수열이 수렴할 수 있다.
$\therefore -2 \leq k < 0$
따라서. $-2 \leq k < 2$일 때 수렴한다.
위 조건을 만족하는 정수 k는 4개이다.

28. [출제의도] 코사인 법칙과 삼각형 넓이 공식을 이용하여 문제 해결하기
$\overline{\mathrm{OA}} = a, \overline{\mathrm{OB}} = b, \overline{\mathrm{OC}} = c, \overline{\mathrm{OD}} = d$라 하자.
$S_1 = \frac{1}{2}ab\sin\theta, S_2 = \frac{1}{2}bc\sin\theta, S_3 = \frac{1}{2}cd\sin\theta$
$S_1 : S_2 : S_3 = 2 : 4 : 3$이므로 $ab : bc : cd = 2 : 4 : 3$
따라서 $c = 2a, d = \frac{3}{4}b$
호AB,호BC,호CD에 대한 원주각이 모두 θ로 같으므로 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{CD}} = k$로 같다.
코사인 법칙에 의해 $k = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$
$= 4a^2 + b^2 - 4ab\cos\theta = 4a^2 + \frac{9}{16}b^2 - 3ab\cos\theta$
$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = 4a^2 + b^2 - 4ab\cos\theta$에서
$2ab\cos\theta = 3a^2 \quad \cos\theta = \frac{3a}{2b}$ ...... ㉠
$4a^2 + b^2 - 4ab\cos\theta = 4a^2 + \frac{9}{16}b^2 - 3ab\cos\theta$
에서 $ab\cos\theta = \frac{7}{16}b^2 \quad \cos\theta = \frac{7b}{16a}$ ...... ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $\frac{3a}{2b} = \frac{7b}{16a} \quad 14b^2 = 48a^2$
$\frac{7}{24} = \frac{a^2}{b^2}$ ...... ㉢
㉠, ㉢에 의하여 $\cos^2\theta = \frac{9a^2}{4b^2} = \frac{9}{4} \times \frac{7}{24} = \frac{21}{32}$
따라서 $p + q = 32 + 21 = 53$

29.
(ⅰ) 치역의 원소가 1개인 경우
이 경우, 항상 조건을 만족한다.
$\therefore {}_8\mathrm{C}_1 = 8$
(ⅱ) 치역의 원소가 2개인 경우
치역 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_2 = 28$
$a - b = 2$를 만족하는 순서쌍 (a, b)는
$(3,1), (4,2), (5,3), (6,4), (7,5), (8,6)$
총 6개가 존재한다. 그러므로, 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는 $28 - 6 = 22$이다.
$\therefore 22 \times (2^3 - 2) = 132$
(ⅲ) 치역의 원소가 3개인 경우
치역 3개를 선택하는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_3 = 56$
$a - b = 2$를 만족하는 치역 2개를 선택하고, 나머지 치역 1개를 남은 공역 6개에서 선택하는

경우의 수는 $6\times6=36$이다. 이 때. 선택한 치역 1개가 다시 $a-b=2$ 만족시킬 수 있기 때문에 중복되는 경우가 생긴다. $(1,3,5)$, $(2,4,6)$, $(3,5,7)$, $(4,6,8)$의 경우 중복되었기 때문에 조건을 만족하는 치역의 개수는
$56-6\times6+4=24$이다.
$\therefore 24\times3!=144$
조건을 만족하는 함수의 개수는
$\therefore 8+132+144=284$

30. [출제의도]음함수의 미분법을 활용하여 미분계수 구하기

(가) 조건에 의하여 $h(x)=f(x)$ 또는
$h(x)=f(x-g(t))-t$
또한 $f''(4)=0$이므로 $y=f(x)$는 점$(4,8)$에 대해 점대칭이다.
$y=f(x-g(t))-t$ 그래프는 $y=f(x)$ 그래프를 x축 방향으로 $g(t)$만큼, y축 방향으로 $-t$만큼 평행이동한 것과 같다.
$y=f(x)$에서 미분계수가 동일한 점은 변곡점을 제외하고 두 점이다. 조건(나)에 의해

$$h(x)=\begin{cases} f(x)\ (x<k) \\ f(x-g(t))-t\ (x\ge k)\end{cases}$$

$h(x)$는 미분가능한 함수이므로
$y=f(x-g(t))-t$와 $y=f(x)$의 교점에서의 각각의 미분 계수는 같다. 그러려면 점$(4,8)$에 대하여 교점과 대칭인 점이 교점과 일치하기 위해 평행이동한 만큼 $y=f(x)$가 평행이동했을 때 $y=f(x-g(t))-t$과 일치하면 된다.
점$(4,8)$에 대하여 교점과 대칭인 점의 좌표를 $(\alpha,f(\alpha))$라고 했을 때 교점의 좌표는 $(8-\alpha,16-f(\alpha))$이고 교점과 대칭인 점이 교점과 일치하기 위해서는 x축 방향으로 $8-2\alpha$만큼, y축 방향으로 $16-2f(\alpha)$만큼 평행이동해야 한다.
따라서 $g(t)=8-2\alpha \qquad t=2f(\alpha)-16$
각각의 식의 양변을 t에 대해 미분하면

$g'(t)=-2\times\dfrac{d\alpha}{dt}$ …… ㉠

$1=2f'(\alpha)\times\dfrac{d\alpha}{dt}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $g'(t)=-\dfrac{1}{f'(\alpha)}$

$t=\dfrac{7}{8}$일 때, $\dfrac{7}{8}=2f(\alpha)-16$이므로

$f(\alpha)=\dfrac{135}{16}$

$\dfrac{1}{16}\alpha^2(12-\alpha)=\dfrac{135}{16} \quad \alpha=-3$

따라서 $t=\dfrac{7}{8}$일 때 $f'(\alpha)=f'(-3)=-\dfrac{99}{16}$

$g'\left(\dfrac{7}{8}\right)=-\dfrac{1}{f'(-3)}=\dfrac{16}{99}$

방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3개일 때, $k=16$이고 $g(k)=16$
이는 그래프를 직접 그려보면 알 수 있다.

그러므로 $k+99g'\left(\dfrac{7}{8}\right)=16+99\times\dfrac{16}{99}=32$

해설작성
송성진(서울대학교 수학교육과)
00년 응애