Theme. 1

어떤 지식 또는 개념을 엄밀하게, 분석적으로 전달하고자 하는 칼럼시리즈가 아닙니다.
간과할 수 있는 요소들을 짚어주고 실제 문제풀이에 직접적으로 영향을 미칠 수 있는 실질적인 내용을 담고 있는 칼럼시리즈입니다. 가볍게 읽어주세요~

1. 문제상황 인지

어렵지 않은 문항입니다. 가볍게 풀어보세요.

① 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$일 때, $f(2)$의 값은?

② 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 있다.
$x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)f(x)=g(x)$일 때, $g(2)$의 값은?

③ 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 있다.
$x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)f(x)=g(x)$이고 $f(2)=1$일 때, $g(2)$의 값은?

④ 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $g(x)$ 가 있다.
$x<2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $(x-2)f(x)=g(x)$ 이고 $g(2)=0$, $f(2)=1$ 일 때, $g(0)$ 의 값은?

⑤ 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $g(x)$ 가 있다.
모든 실수 x 에 대하여 $(x-2)f(x)=g(x)$ 이고 $f(2)=1$ 일 때, $g(0)$ 의 값은?

[다음 페이지에 답이 나옵니다.]

①의 답은 ‘알 수 없다.’입니다.
②의 답은 ‘전혀 알 수 없다.’입니다.
③의 답은 ‘죽어도 알 수 없다.’입니다.
④의 답은 ‘이것도 알 수 없다.’입니다.
⑤의 답은 ‘아쉽지만 이것도 알 수 없다.’입니다.

①, ②, ③, ④, ⑤의 답을 맞추시고 왜 이런 문제를 세팅했는지, ①, ②, ③, ④, ⑤의 상황이 어떻게 다른지 단번에 이해되신 분들은 이번 칼럼의 주인공이 아니십니다. 문을 열고 나가주세요.ㅠㅠ

2. 해제

①의 해제

① 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$일 때, $f(2)$의 값은? : **‘알 수 없다.’**

[생각박스 (0)]
“분모가 0으로 가니까 분자도 0으로 가고, 뭐야 그냥 $f(2)=0$이네 극한값 2는 왜 준거야 ㅋㅋ”

라고 생각한다면, 완벽히 틀린 풀이입니다.

$f(x)$의 $x=2$에서의 ‘연속성’이 보장되지 않았기 때문에 $f(2)$의 값은 알 수 없습니다.
‘분모가 0으로 가니까 분자도 0으로 가서’ 알 수 있는 사실은 $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$이라는 사실 뿐입니다.
$f(2)$의 값을 얻을 수는 없습니다.

만약 $f(x)$의 $x=2$에서의 연속성이 보장된 상태였다면 $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 0$이 되어 $f(2)=0$입니다.

②의 해제

② 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 있다.
$x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)f(x)=g(x)$일 때, $g(2)$의 값은? : **'전혀 알 수 없다.'**

[생각박스 (1)]

"$g(x)$가 연속함수니까,

(연속함수) $\times f(x)$ = (연속함수)

에서 $f(x)$는 반드시 연속함수가 되고, 따라서 연속함수들로만 이루어진 항등식이므로
뭔가 $\lim\limits_{x\to2}$일 때나 $x=2$를 대입할 때나 같은 상황이 연출되지 않을까?
오케이 $x=2$ 대입하면 $g(2)=0$ 개꿀"

이런 생각을 할 수도 있고 위 생각을 좀 더 구체화해서

[생각박스 (2)]

"$g(x)$가 연속함수니까,

$$g(2)=\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2-}(x-2)f(x)=0$$

이므로 $g(2)=0$이네!"

하고 좀 더 그럴듯한 생각을 할 수도 있습니다.

그러나 극한식을

$$\lim_{x\to2-}(x-2)f(x)=\lim_{x\to2-}(x-2)\times\lim_{x\to2-}f(x)$$

와 같이 쪼개기 위해선 반드시 쪼개지는 두 극한 $\lim\limits_{x\to2-}(x-2)$, $\lim\limits_{x\to2-}f(x)$이 모두 수렴해야 합니다.
이 경우 극한 $\lim\limits_{x\to2-}(x-2)$은 수렴하지만 극한 $\lim\limits_{x\to2-}f(x)$이 수렴하지 않는 경우에는 저런 식으로
극한식을 쪼갤 수 없습니다.[1)]

1) 예를 들어, $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$라 하면 극한 $\lim\limits_{x\to2-}(x-2)f(x)$의 값은 0이 아닌 1입니다.

ㄷ ㄷ

따라서 ‘ $\lim_{x \to 2-} f(x)$ 이 어떤 값으로 수렴한다면’ $g(2)=0$ 이지만

이 문제에서는 $\lim_{x \to 2-} f(x)$ 의 수렴 여부를 알 수 없으므로 $g(2)$ 의 값 또한 알 수 없습니다.

③의 해제

③ 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 가 있다.
$x<2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $(x-2)f(x)=g(x)$ 이고 $f(2)=1$ 일 때, $g(2)$ 의 값은?

: **‘죽어도 알 수 없다.’**

②의 상황에서 $f(2)=1$ 의 조건이 추가되었습니다.

[생각박스 (3)]

“오케이 그럼 이제 $f(2)=1$ 니까 $f(x)$ 가 발산은 안하겠네~ 이제야 $g(2)=0$ 이네“

그러나 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속성이 보장되지 않았기 때문에 $f(2)$ 의 값은 $\lim_{x \to 2-} f(x)$ 의 값과 완전히 별개입니다. 따라서 $\lim_{x \to 2-} f(x)$ 의 정보가 전혀 추가되지 않은, ②와 달라진 조건이 없는 동일한 상황입니다.

따라서 동일하게 $\lim_{x \to 2-} f(x)$ 의 수렴여부를 알 수 없으므로, $g(2)$ 의 값은 알 수 없습니다.

④의 해제

④ 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 가 있다.
$x<2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $(x-2)f(x)=g(x)$ 이고 $g(2)=0$, $f(2)=1$ 일 때, $g(0)$ 의 값은?

: **‘이것도 알 수 없다.’**

이번엔 $g(2)=0$ 을 그냥 줘버렸고, $f(2)=1$ 이 주어졌습니다.

ㄷ ㄷ

[생각박스 (3)]

“오케이.. 그럼 $g(x)=(x-2)(x-k)$로 작성하고 $f(2)$의 값을 구해야 하니까

$f(2)=\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$에서 $g'(2)=1$이군! k의 값이 정해지겠어“

앞과 동일한 맥락으로 틀린 생각입니다. $f(2)$의 값은 $\lim_{x\to 2-}f(x)$의 값과 완전히 별개입니다.

예를 들어 임의의 실수 p에 대하여 $f(x)=\begin{cases} x+p & (x<2) \\ 1 & (x=2)\end{cases}$일 때를 생각해보면, 문제 조건을 모두 만족시키지만 $g(0)=-2f(0)$의 값이 특정되지 않습니다.

[생각박스 (4)]

“오케이.. 그럼 $g(x)=(x-2)(x-k)$로 작성하고 양변 미분하면 $f(x)+(x-2)f'(x)=g'(x)$니까 $x=2$대입하면 $f(2)=g'(2)=1$이겠네. 따라서 k의 값이 정해지겠군“

항등식의 우변이 미분가능한 함수이므로 $x<2$에서 양변을 미분할 수 있습니다.[2)]

그러나 이 때에도 $x=2$를 대입할 수 없고, 당연히 극한 $\lim_{x\to 2-}$에 대한 정보로 $f(2)$의 값을 유추할 수도 없습니다.

종합하면 $f(2)=1$이란 조건은 $g(x)$의 식 결정에 어떠한 영향도 미칠 수 없습니다.

2) 하지만 그 미분식을 항상 $f(x)+(x-2)f'(x)$로 쓸 수 있는 것은 아닙니다. 아직 $f(x)$의 미분가능성이 보장되지 않았기 때문입니다.
예를 들어 $h_1(x)=x^3$의 역함수 $h_2(x)=\sqrt[3]{x}$에 대하여 이 둘은 항상 $h_1(h_2(x))=x$가 성립합니다.
x는 미분가능한 함수이므로 양변을 미분하면 $h_1'(h_2(x))\times h'_2(x)=1$을 얻습니다. (문과 친구들은 모르는 합성함수 미분법입니다. 그냥 ‘그렇구나’ 하고 받아들이면 됩니다.) 그리고 이 식 좌변에 $x=0$을 넣어보면 . . .

⑤의 해제

⑤ 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 있다.
모든 실수 x에 대하여 $(x-2)f(x)=g(x)$이고 $f(2)=1$일 때, $g(0)$의 값은?

: **'아쉽지만 이것도 알 수 없다.'**

$x<2$인 모든 실수 x가 아니라, 모든 실수 x에 대하여 항등식이 성립하므로 이제는 $x=2$를 대입할 수 있습니다. 따라서 $g(2)=0$이지만, ④와 마찬가지로 $f(2)=1$이란 조건은 $g(x)$의 식 결정에 어떠한 영향도 미칠 수 없으므로 $g(0)$의 값을 확정지을 수 없습니다.

3. 결론

“연속성이 보장되어 있지 않을 때, 연속성이 보장되어 있는 것처럼 문제풀이를 진행하면 큰일난다.”
가 결론입니다.

연속성이 보장되어 있을 때에는

> 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=2$일 때, $f(2)$의 값은?

의 답이 당연하게도 $f(2)=0$이고 ($\because$ 다항함수는 연속함수입니다.)

> 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 있다.
> $x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)f(x)=g(x)$일 때, $g(2)$의 값은?

의 답이 당연하게도 $g(2)=0$입니다.

사실,
$x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)f(x)=g(x)$이다. 라는 조건은
$x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\frac{g(x)}{x-2}$이다. 와 완벽한 동치이기 때문에
정말 $x<2$에서의 정보만을 담고 있습니다. $x=2$로 침범해 들어갈 수가 없습니다.

동일하게, $f(2)$의 값이 주어진다고 해서 $g(x)$에는 아무런 영향도 줄 수 없습니다.
$x<2$인 모든 실수 x에 대하여만 $(x-2)f(x)=g(x)$로 $f(x)$와 $g(x)$가 연결되어 있으니까요.

마찬가지로,
모든 실수 x에 대하여 $(x-2)f(x)=g(x)$이다. 라는 조건은
$x\neq 2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\frac{g(x)}{x-2}$이고, $g(2)=0$이다. 와 완벽한 동치이기 때문에
$x\neq 2$에서의 정보만을 담고 있습니다.

$f(x)$가 $x=2$에서 연속일 때만 연속성을 활용해 비로소 $x=2$로 침투해 들어갈 수가 있는 겁니다.

30. $x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.
(단, a는 상수이다.)

(가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여
$(x-a)f(x)=g(x)$이다.

평가원 뚝배기 브레이커 1대장과 싸우다가도
"(가)에서 $g(a)=0$ 아닌가?" 로 피 보신 분들이 꽤 있었습니다. ㅜㅜ
$f(x)$가 $x=a$에서 발산하면 $\lim_{x\to a+} g(x)$ $(=g(a))$ 가 0이 아닌 값으로 수렴할 수 있습니다 뇌절 조심!

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다.
(나) $g(0)=1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은? [4점]

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{5}{17}$

나형 수능 21번인데, $g(x)$가 연속이므로 별다른 특이사항 없이 풀이를 진행해도 괜찮았던 문제입니다.
$g(x)$가 불연속이게 되면 결국 $g(x)$의 정체는 분수함수 느낌이라 나형 범위에서는 풀이를 진행하기 힘들기도 하죠.

하지만 가형 범위로 확장되면서 $g(x)$의 연속성이 보장되지 않거나 부분보장 된다면 정말 재미있는 일이 일어나겠죠? ^-^

어떤 정리된 내용이 머릿속에 남아있지 않아도 괜찮습니다.
아~ 앞으로 이런 느낌의 문제들은 연속성 관련해서 조심해야겠네! 정도의 느낌만 가져가셔도
이 칼럼의 목적은 달성된 겁니다.

4. 적용과 응용

관련 문항들과 응용소재들을 야무지게 풀고 싶지만 당장 출판물들에 실리게 될 문항, 소재들이라 손발 부들부들 떨면서 참아냈습니다. ㅜㅜ 출판물이 빛을 보게 되면 칼럼에 문제들을 추가로 실어볼게요.
가벼운 유제 두 개 싣고 마치겠습니다. 내용을 되새기면서 간단하게 풀어보세요.

*두 문항 모두 문과도 풀 수 있는 문항입니다. ^^

ㄷ ㄷ

유제

1. 함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ x^2-x & (x\geq 1) \end{cases}$$

가 $x=1$에서 연속일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

2. $x<2$인 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-5)$의 값을 구하시오.

(가) $x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=x^3-1$ (단, a는 상수) 이다. (나) $f'(1)=-3$

(1) 정답 : 모름[3]

이런 생김새의 기출문제 정말 많이 봤죠..?

근데 이건.. 정답이.. 모른다입니다..
$\lim_{x \to 1-} f(x) = 0$ 까지만 알 수 있죠?

이 칼럼을 읽고 나서는 이런 문제에서 더 이상 낚이시면
안됩니다..틀렸다면 다시 칼럼 정독!

만약 기출문제에서 이런 생김새의 문제를 풀이할 때
그냥 윗함수와 아랫함수에 $x=0$ '일단 넣고' 생각하셨다면,
오늘이 반성의 기회입니다..

(2) 정답 : 18

$a=1$ 인 경우, 양변을 미분하면
$f(x)+(x-1)f'(x)=3x^2$ 이므로 $f(1)=3$ 이고
$x \neq 1$ 이고 $x<2$ 일 때, $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1$ 이므로
결국 $f(x)=x^2+x+1$ 이다. 따라서 $f'(1)=3$ 이므로 (나)를 만족
시키지 못한다.

$a \neq 1$ 인 경우
$x<2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $(x-a)f(x)=x^3-1$ 이고
$x<2$ 일 때 방정식 $x^3-1=0$ 의 실근은 $x=1$ 뿐이므로
$x<2$ 일 때 방정식 $(x-a)f(x)=0$ 의 실근은 $x=1$ 뿐이다.
따라서 $f(1)=0$ 이고 $a \geq 2$ 이다.
양변을 미분하면 $f(x)+(x-a)f'(x)=3x^2$ 에서
$f(1)+(1-a)f'(1)=(1-a)f'(1)=3$ 이므로 $f'(1)=\dfrac{3}{1-a}$ 이고
$f'(1)=-3$ 이므로 $a=2$ 이다.

따라서 $x<2$ 일 때,
$(x-2)f(x)=x^3-1$ 이므로 $f(-5)=18$ 이다.[4]

3) 물론 이런 대놓고 낚시 문제는 수능에 절대로 안 나옵니다! 하지만 위 평가원문항 예시 (171130)처럼 문항에 교묘히 섞어 잔잔하게 뚝배기를 때릴 수는 있죠.

4) 항등식 양변에 2넣으면 $0=1$ 인데요? 하지는 않겠죠? ㅜㅜ