

수열

1. 등차수열과 등비수열
2. 수열의 합
3. 수학적 귀납법

1 등차수열

유형 1 등차수열과 공차

358 ●○○○○ 2015(A) 6월/평가원 4

공차가 7인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_{13} - a_{11}$ 의 값은? [3점]

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

359 ●○○○○ 2016(A) 수능 22

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_8 - a_4 = 28$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 구하시오. [3점]

유형 2 등차수열의 일반항 - 첫째항 이용

360 ●○○○○ 2014(A) 6월/평가원 6

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 2$, $a_3 = 10$ 일 때, a_5 의 값은? [3점]

- ① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

361 ●○○○○ 2012(나) 9월/평가원 3

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 1$, $a_4 = 7$ 일 때, $a_2 + a_3$ 의 값은? [2점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

362 ●○○○○ 2015(B) 6월/평가원 23

첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 $a_7 + a_{11} = 20$ 을 만족시킬 때, a_{10} 의 값을 구하시오. [3점]

363 ●○○○○

2016(B) 수능 22

첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 대하여 $2(a_2 + a_3) = a_9$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 구하시오. [3점]

364 ●○○○○

2018(나) 9월/평가원 13

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = -15$, $|a_3| - a_4 = 0$ 일 때, a_7 의 값은? [3점]

- ① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

유형 3**등차수열의 일반항 - 공차 이용****365** ●○○○○

2019학년(나) 수능 5

첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_{10} - a_7 = 6$ 일 때, a_4 의 값은? [3점]

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

366 ●○○○○

2010(나) 9월/평가원 18

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 5$, $a_6 - a_4 = 4$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하시오. [3점]

367 ●○○○○

2013(A) 6월/평가원 22

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 8$, $a_6 - a_4 = 12$ 일 때, a_6 의 값을 구하시오. [3점]

368 ●○○○○

2006(나) 9월/평가원 18

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_3 = 6$, $a_4 - a_2 = 6$ 이 성립할 때, a_6 의 값을 구하시오. [3점]

369 ●○○○○

2012(나) 6월/평가원 24

등차수열 $\{a_n\}$ 이 $a_{10} + a_6 = 6$, $a_{10} - a_6 = -12$ 를 만족시킬 때, a_2 의 값을 구하시오. [3점]

370 ●○○○○

2016(나) 6월/평가원 12

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_8 = a_2 + 12$, $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ 일 때, a_{10} 의 값은? [3점]

- ① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

371 ●○○○○

2009(나) 수능 19

공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_5 + a_9 = 45$ 일 때, $a_1 + a_{10}$ 의 값을 구하시오. [3점]

유형 4

등차수열의 일반항 - 특정 항 이용

372 ●○○○○

2010(나) 수능 18

등차수열 $\{a_n\}$ 이 $a_2 + a_4 = 8$, $a_7 = 52$ 를 만족시킬 때, 공차를 구하시오. [3점]

373 ●○○○○

2008(나) 수능(후) 18

등차수열 $\{a_n\}$ 이 $a_2 = 3$, $a_5 = 24$ 일 때, a_7 의 값을 구하시오. [3점]

374 ●○○○○

2018(나) 6월/평가원 24

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 = 5$, $a_{15} = 25$ 일 때, a_{20} 의 값을 구하시오. [3점]

375 ●○○○○

2017(나) 9월/평가원 25

첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$ 이 $a_2 + a_4 = 24$ 를 만족시킬 때, a_5 의 값을 구하시오. [3점]

376 ●○○○○

2011(나) 9월/평가원 23

등차수열 $\{a_n\}$ 이 $a_2 = 1$ 이고, $a_1 + a_6 = 8$ 일 때, a_{21} 의 값을 구하시오. [3점]

377 ●○○○○

2013(B) 6월/평가원 22

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 10$, $a_2 + a_5 = 24$ 일 때, a_6 의 값을 구하시오. [3점]

378 ●○○○○

2005(나) 수능(총) 3

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_2 = 10$, $a_3 + a_4 + a_5 = 45$ 가 성립할 때, a_{10} 의 값은? [2점]

- ① 47 ② 45 ③ 43 ④ 41 ⑤ 39

유형 5**조건을 만족시키는 등차수열의 항****379** ●○○○○

2013(나) 수능 23

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = 16$, $a_5 = 10$ 일 때, $a_k = 0$ 을 만족시키는 k 의 값을 구하시오. [3점]

380 ●○○○○

2006(나) 수능(총) 3

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$ 가 성립할 때, a_6 의 값은? [2점]

- ① 5 ② 8 ③ 11 ④ 13 ⑤ 16

381 ●○○○○

2014(B) 수능 4

첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_9 = 3a_3$ 일 때, a_5 의 값은? [3점]

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

382 ●●○○○

2019(나) 9월/평가원 7

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = a_3 + 8, 2a_4 - 3a_6 = 3$$

일 때, $a_k < 0$ 을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은? [3점]

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

383 ●○○○○

2017(나) 수능 15

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2 의 값은?

[4점]

(가) $a_6 + a_8 = 0$

(나) $|a_6| = |a_7| + 3$

- ① -15 ② -13 ③ -11
④ -9 ⑤ -7

384 ●●○○○

2011(나) 6월/평가원 6

공차가 6인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $|a_2 - 3| = |a_3 - 3|$ 일 때,

a_5 의 값은? [3점]

- ① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

유형 6

등차중항

385 ●○○○○

2009(나) 6월/평가원 19

네 수 1, x , y , z 가 이 순서대로 등차수열을 이루고 $6x + z = 5y$ 를 만족시킨다. $x + y + z$ 의 값을 구하시오. [3점]

386 ●●○○○

2019(나) 6월/평가원 13

자연수 n 에 대하여 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - nx + 4(n-4) = 0$ 이 서로 다른 두 실근 α , β ($\alpha < \beta$)를 갖고, 세 수 1, α , β 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, n 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 8 ③ 11 ④ 14 ⑤ 17

유형 8 등차수열의 변형

387 ●○○○○

2009(가) 9월/평가원 14

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 k 에 대하여

$$b_{2k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{a_1+a_3+\dots+a_{2k-1}}$$

$$b_{2k} = 2^{a_2+a_4+\dots+a_{2k}}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고,

$$b_1 \times b_2 \times b_3 \times \dots \times b_{10} = 8$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 공차는? [4점]

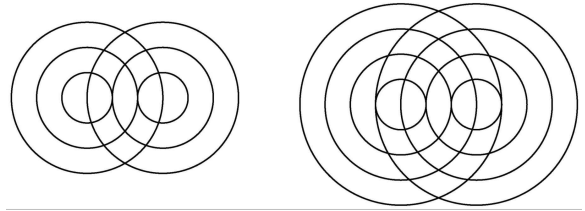
- ① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

유형 9 등차수열의 활용

388 ●●○○○

2007(가) 9월/평가원 16

거리가 3인 두 점 O , O' 이 있다. 점 O 를 중심으로 반지름의 길이가 각각 $1, 2, \dots, n$ 인 n 개의 원과 점 O' 을 중심으로 반지름의 길이가 각각 $1, 2, \dots, n$ 인 n 개의 원이 있다. 이 $2n$ 개 원의 모든 교점의 개수를 a_n 이라 하자. 예를 들어, 그림에서와 같이 $a_3 = 14$, $a_4 = 26$ 이다. a_{20} 의 값은? [4점]

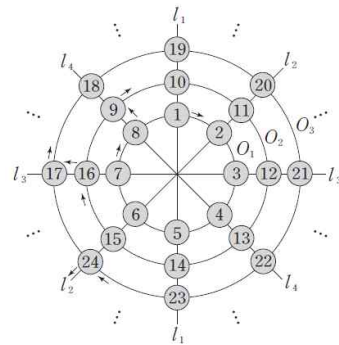


- ① 214 ② 218 ③ 222
④ 226 ⑤ 230

389 ●●●●○

2007(나) 6월/평가원 23

다음 그림은 동심원 $O_1, O_2, O_3, \dots$ 과 직선 l_1, l_2, l_3, l_4 의 교점 위에 자연수를 1부터 차례로 적은 것이다.

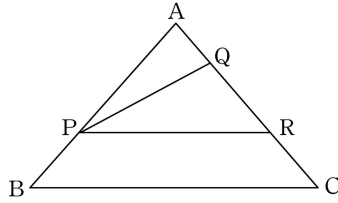


이미 채워진 수들의 규칙에 따라 계속하여 적어 나가면 475는 원 O_m 과 직선 l_n 의 교점 위에 있다. $m+n$ 의 값을 구하시오. [4점]

390

2005(나) 6월/평가원 11

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 변 AB를 2:1로 내분하는 내분점을 P로 잡고, 변 AC 위에 두 점 Q, R를 잡자. 삼각형 APQ, PRQ와 사각형 PBCR의 넓이가 차례로



첫째항이 a 이고 공차가 d 인 등차수열을 이룰 때, 다음은 $\frac{\overline{CQ}}{\overline{AR}}$ 의 값을 a 와 d 로 나타내는 과정이다.

삼각형 APQ의 넓이는 a 이므로 삼각형 APR의 넓이는 $2a + d$ 가 되어
 $a : 2a + d = \Delta APQ : \Delta APR$

$$= \frac{1}{2} \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \sin A : \frac{1}{2} \overline{AP} \cdot \overline{AR} \sin A$$

가 성립한다. 따라서

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} = \frac{a}{2a+d} \quad \cdots \cdots \textcircled{가}$$

같은 방법으로, 삼각형 ABC의 넓이는 $\textcircled{가}$ 이므로

$$a : \textcircled{가} = \Delta APQ : \Delta ABC$$

$$= \frac{1}{2} \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \sin A : \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \sin A$$

또한 점 P는 변 AB를 2:1로 내분하는 내분점이므로

$$\overline{AP} = \frac{2}{3} \overline{AB}$$

따라서

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}} = \textcircled{나}$$

그러므로

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{AC} - \overline{AQ}}{\overline{AQ}} = \textcircled{다} \quad \cdots \cdots \textcircled{L}$$

①, ㉔에 의해

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} = \frac{a+2d}{2a+d}$$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$a + 2d$	$\frac{a}{3(a+d)}$	$\frac{2a+3d}{a}$
②	$a + 2d$	$\frac{a+d}{2a+3d}$	$\frac{a+2d}{a+d}$
③	$3(a+d)$	$\frac{a}{2(a+d)}$	$\frac{a+d}{a+2d}$
④	$3(a+d)$	$\frac{a}{2(a+d)}$	$\frac{a}{2a+3d}$
⑤	$3(a+d)$	$\frac{a}{3(a+d)}$	$\frac{2a+3d}{a}$

유형 10 등차수열의 합

391

2012예비(A) 5월/평가원 24

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 까지의 합 S_n 이 $S_n = 2^{n-1} + 5$ 일 때, $a_1 + a_5$ 의 값을 구하시오. [3점]

392

2014(A) 수능 6

첫째항이 6이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $\frac{a_8 - a_6}{S_8 - S_6} = 2$ 가 성립한다. d 의 값은? [3점]

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

393

2012(나) 수능 11

첫째항이 -5이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=11}^{20} a_k$ 의 값은? [3점]

- ① 260 ② 255 ③ 250 ④ 245 ⑤ 240

394 ●○○○○

2010(나) 6월/평가원 6

1과 2 사이에 n 개의 수를 넣어 만든 등차수열

$$1, a_1, a_2, \dots, a_n, 2$$

의 합이 24일 때, n 의 값은? [3점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

395 ●○○○○

2005(나) 9월/평가원 18

첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{n=1}^{10} a_n = 200$ 일 때, a_{11} 의 값을 구하시오. [3점]

396 ●●○○○

2011(나) 6월 평가원 23

첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_4 - a_2 = 4$ 일 때, $\sum_{k=11}^{20} a_k$ 의 값을 구하시오. [3점]

397 ●○○○○

2014(A) 9월/평가원 24

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_{10} = 22$ 일 때, $\sum_{k=2}^9 a_k$ 의 값을

구하시오. [3점]

398 ●●○○○

2017(나) 6월/평가원 15

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 이차방정식

$x^2 - 14x + 24 = 0$ 의 두 근이 a_3, a_8 이다. $\sum_{n=3}^8 a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

399

1994(2차) 수능(A) 4

첫째항이 m , 공차가 1인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 50일 때, $m+n$ 의 값은? (단, $m \leq 10$ 인 자연수)

- ① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

400 ●●●○○○

2007(가) 수능(홀) 22

첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$

이 $a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 를 만족시킬 때, b_{27} 의 값을 구하시오. [4점]

401 ●●○○○

2004(가) 6월/평가원 7

등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 6$, $a_{10} = -12$ 일 때,
 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$ 의 값은? [3점]

- ① 280 ② 284 ③ 288 ④ 292 ⑤ 296

유형 11

등차수열의 합과 일반항의 관계

402 ●○○○○

2006(나) 6월/평가원 18

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n$ 일 때,
 a_{100} 의 값을 구하시오. [3점]

403 ●○○○○

2013(A) 6월/평가원 12

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 10n$ 일 때,
 $a_n < 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 개수는? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

404 ●○○○

2015(A) 수능 9

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = \frac{n}{n+1}$ 일 때, a_4 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{22}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{18}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{1}{14}$

405 ●○○○

2009(나) 9월/평가원 5

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2^n$ 일 때, $a_1 + a_5$ 의 값은? [3점]

- ① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

406 ●●○○

2010(나) 수능 30

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 수열 $\{S_{2n-1}\}$ 은 공차가 -3 인 등차수열이고, 수열 $\{S_{2n}\}$ 은 공차가 2 인 등차수열이다. $a_2 = 1$ 일 때, a_8 의 값을 구하시오. [4점]

407 ●●●○

2008(가) 6월/평가원 16

공차가 d_1, d_2 인 두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 S_n, T_n 이라 하자.

$$S_n T_n = n^2(n^2 - 1)$$

일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $a_n = n$ 이면 $b_n = 4n - 4$ 이다.

ㄴ. $d_1 d_2 = 4$

ㄷ. $a_1 \neq 0$ 이면 $a_n = n$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2 등비수열

유형 1 등비수열의 일반항 - 첫째항 또는 공비 이용

408 ●○○○○ 2014(A) 9월/평가원 5

공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 12$ 일 때, a_5 의 값은? [3점]

- ① 24 ② 36 ③ 48 ④ 60 ⑤ 72

409 ●○○○○ 2016(나) 9월/평가원 6

첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\frac{a_7}{a_5} = 4$ 일 때, a_4 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

410 ●○○○○ 2014(B) 9월/평가원 22

공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_2 + a_4 = 55$ 일 때, a_3 의 값을 구하시오 [3점]

411 ●○○○○ 2015(A) 9월/평가원 22

공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 4, 3a_5 = a_7$ 일 때, a_3 의 값을 구하시오. [3점]

412 ●○○○○ 2016(나) 6월/평가원 25

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 3, \frac{a_4 a_5}{a_2 a_3} = 16$ 일 때, a_6 의 값을 구하시오. [3점]

413 ●○○○○ 2017(나) 6월/평가원 26

첫째항이 3인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\frac{a_3}{a_2} - \frac{a_6}{a_4} = \frac{1}{4}$ 일 때, $a_5 = \frac{q}{p}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

414 ●○○○○ 2020학년(나) 수능 23

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\frac{a_{16}}{a_{14}} + \frac{a_8}{a_7} = 12$ 일 때,

$\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_6}{a_3}$ 의 값을 구하시오. [3점]

유형 2

등비수열의 일반항 - 특정 항 이용

415 ●●○○○

2007(나) 수능(홍) 18

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 2$, $a_6 = 16$ 일 때, a_9 의 값을 구하시오. [3점]

416 ●●○○○

2016(A) 수능 7

첫째항의 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 4a_1$, $a_7 = (a_6)^2$ 일 때, 첫째항 a_1 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

417 ●○○○○

2010(나) 6월/평가원 18

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2a_4 = 16$, $a_3a_5 = 64$ 일 때, a_7 의 값을 구하시오. [3점]

418 ●○○○○

2013(B) 6월/평가원 4

공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 + a_2 = 12$, $\frac{a_3 + a_7}{a_1 + a_5} = 4$ 를 만족시킬 때, a_4 의 값은? [3점]

- ① 24 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 40

419 ●●○○○

2013(나) 수능 6

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\frac{a_1a_2}{a_3} = 2, \quad \frac{2a_2}{a_1} + \frac{a_4}{a_2} = 8$$

일 때, a_3 의 값은? [3점]

- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

420 ●○○○○

2013(A) 6월/평가원 7

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1a_9 = 4$ 일 때, $a_2a_8 + a_4a_6$ 의 값은? [3점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

421 ●●○○○

2012(나) 9월/평가원 11

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1a_5 = 9$, $a_2a_6 = 36$ 일 때, $8(a_1a_2 + a_3a_4)$ 의 값은? [3점]

- ① 153 ② 157 ③ 161 ④ 165 ⑤ 169

422 ●●○○○

2009(나) 수능 5

네 수 $1, a, b, c$ 는 이 순서대로 공비가 r 인 등비수열을 이루고 $\log_8 c = \log_a b$ 를 만족시킨다. 공비 r 의 값은? (단, $r > 1$) [3점]

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

423 ●●●○○

2005(나) 수능(舊) 21

공비가 r 이고 $a_2 = 1$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 10 항까지의 곱을 $\omega = a_1a_2a_3 \cdots a_{10}$ 이라 할 때, $\log_r \omega$ 의 값을 구하시오. (단, $r > 0$ 이고 $r \neq 1$ 이다.) [3점]

유형 3 등비중항

424 ●○○○○

2015(A) 수능 5

공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 3$, $a_5 = 48$ 일 때, a_3 의 값은? [3점]

- ① 18 ② 16 ③ 14 ④ 12 ⑤ 10

425 ●○○○○

2011(나) 6월/평가원 8

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = \sqrt{5}$ 일 때, $a_1 \times a_2 \times a_4 \times a_5$ 의 값은? [3점]

- ① $\sqrt{5}$ ② 5 ③ $5\sqrt{5}$
④ 25 ⑤ $25\sqrt{5}$

426 ●○○○○

2017(나) 수능 5

세 수 $\frac{9}{4}, a, 4$ 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 양수 a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

427 ●●○○○

2007(나) 9월/평가원 23

이차방정식 $x^2 - kx + 125 = 0$ 의 두 근 α, β ($\alpha < \beta$)에 대하여 $\alpha, \beta - \alpha, \beta$ 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 양수 k 의 값을 구하시오. [4점]

428 ●●●●○

2010(나) 수능 24

두 자연수 a 와 b 에 대하여 세 수 $a^n, 2^4 \times 3^6, b^n$ 이 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, ab 의 최솟값을 구하시오. (단, n 은 자연수이다.) [4점]

유형 4

등비수열의 활용 - 수열의 변형

429 ●●○○○

2012(나) 6월/평가원 8

첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$b_n = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2$ 일 때, $\frac{b_6}{b_3}$ 의 값은? [3점]

① 56

② 58

③ 60

④ 62

⑤ 64

430 ●●○○○

2006(나) 수능(홍) 19

수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 10$ 이고, 수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 은 등비수열일 때, a_5 의 값을 구하시오. [3점]

431 ●●●●○

2004(나) 6월/평가원 11

다섯 개의 실수 a, b, c, d, e 를 적당히 배열하여 공비가 1보다 큰 등비수열을 만들었다. a, b, c, d, e 가 다음 조건을 만족시킬 때 b 가 이 수열의 제 n 항이라면, n 의 값은? [4점]

(가) $e = \sqrt{cd}$ (나) $\frac{a}{e} = \frac{c}{d}$ (다) $a < b$

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

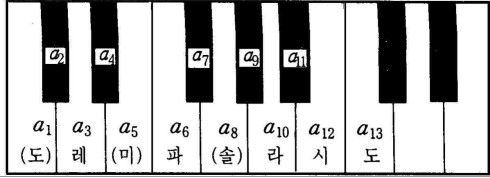
유형 5 등비수열의 활용 - 그래프와 도형

432 ●●●○

1999(인) 수능(홀) 23

서양음악의 12음계에서 음의 주파수는 반음 올라갈 때마다 일정 비율로 높아져 12반음 올라가면 2배가 되는 등비수열을 이룬다. 아래 피아노 건반에 표시된 도, 미, 솔의 주파수비 $a_1 : a_5 : a_8$ 에 가장 가까운 정수비는? [3점]

(단, $2^{\frac{1}{3}} = \frac{5}{4}$, $2^{\frac{5}{12}} = \frac{4}{3}$, $2^{\frac{7}{12}} = \frac{3}{2}$ 으로 근사하여 계산한다.)

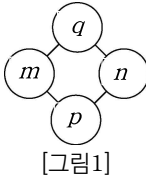


- ① 2 : 3 : 4 ② 3 : 4 : 5 ③ 4 : 5 : 6
④ 5 : 6 : 8 ⑤ 6 : 8 : 9

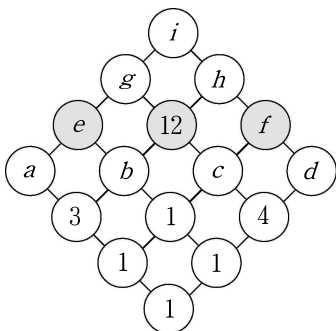
433 ●●●●

2005(나) 9월/평가원 21

두 자연수 m 과 n 의 최대공약수를 p , 최소공배수를 q 라 할 때, 이런 관계를 만족시키는 수를 [그림 1]과 같이 나타내기로 하자. [그림 2]는 [그림 1]의 관계를 만족시키도록 수를 연결하여 나타낸 것이다. 세 자연수 e , 12, f 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $e + f$ 의 값을 구하시오. [4점]



[그림1]



[그림2]

유형 6 등비수열의 합

434 ●●○○○

2019(나) 6월/평가원 24

공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 2$, $\frac{a_5}{a_3} = 9$ 일 때, $\sum_{k=1}^4 a_k$ 의 값을 구하시오. [3점]

435 ●●○○○

2018(나) 9월/평가원 26

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$S_4 - S_3 = 2, S_6 - S_5 = 50$$

일 때, a_5 의 값을 구하시오. [4점]

436 ●●○○○

2019학년(나) 수능 24

첫째항이 7인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$\frac{S_9 - S_5}{S_6 - S_2} = 3$ 일 때, a_7 의 값을 구하시오. [3점]

437 ●○○○○

2011(나) 9월/평가원 8

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 에 대하여 $\frac{S_4}{S_2} = 9$ 일

때, $\frac{a_4}{a_2}$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

438 ●●○○○

2005(나) 9월/평가원 4

수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 2^n + (-1)^n$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 의 값은? [3점]

- ① $2^{10} - 3$ ② $2^{10} - 1$ ③ 2^{10}
 ④ $2^{10} + 1$ ⑤ $2^{10} + 3$

439 ●●●●●

2019학년(나) 수능 29

첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_7 + b_7$ 의 값을 구하시오. [4점]

$$(가) \sum_{n=1}^5 (a_n + b_n) = 27$$

$$(나) \sum_{n=1}^5 (a_n + |b_n|) = 67$$

$$(다) \sum_{n=1}^5 (|a_n| + |b_n|) = 81$$

유형 8 등비수열의 합과 일반항의 관계

440 ●○○○ 2008(나) 9월/평가원 18 |
수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2^n - 1$ 일 때, a_9 의 값을 구하시오. [3점]

441 ●○○○ 2012예비(A) 5월/평가원 24 |
수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2^{n-1} + 5$ 일 때, $a_1 + a_5$ 의 값을 구하시오. [3점]

442 ●●●○ 2004(가) 9월/평가원 14 |
일반항이 $a_n = 2^{1-n}$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

〈 보 기 〉

- ㄱ. 수열 $\{\log a_n\}$ 은 등차수열이다.
- ㄴ. 수열 $\{S_n + a_n\}$ 은 등비수열이다.
- ㄷ. $S_n = \frac{1}{2}a_{n+1} + 2$ 가 성립한다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 9 등차중항과 등비중항

443 ●●○○ 2011(나) 수능 22 |
공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 의 세 항 a_2, a_4, a_9 가 이 순서대로 공비 r 인 등비수열을 이룰 때, $6r$ 의 값을 구하시오. [4점]

444 ●●○○ 2007(나) 수능(홀) 6 |
세 수 $a, 0, b$ 가 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 $2b, a, -70$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a 의 값은? [3점]

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

445 ●○○○○

2012(가) 수능 25

세 수 $a, a+b, 2a-b$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $1, a-1, 3b+1$ 은 이 순서대로 공비가 양수인 등비수열을 이룬다. $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

446 ●●○○○

2015(A) 6월/평가원 16

공차가 6인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 세 항 a_2, a_k, a_8 은 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 a_1, a_2, a_k 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. $k + a_1$ 의 값은? [4점]

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

3 등비수열의 합의 활용

유형 1 일정한 비율로 증가(감소)

447 ●●●○○

2007(나) 6월/평가원 28

다음 표는 어느 학교에서 한 달 전에 구입한 휴대용 저장 장치의 용량에 따른 1개당 가격과 개수의 현황을 나타낸 것이다.

용량	128 MB	256 MB	512 MB	1 GB	2 GB
1개당 가격	a	$\frac{3}{2}a$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 a$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 a$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 a$
개수	$16b$	$8b$	$4b$	$2b$	b

현재 모든 휴대용 저장 장치의 가격이 한 달 전보다 모두 40%씩 하락하였다. 이 학교에서 휴대용 저장 장치의 용량과 개수를 위 표와 동일하게 현재의 가격으로 구입한다면 지불해야 하는 금액은? (단, $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이다.) [4점]

- ① $\frac{128}{5}ab \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$ ② $32ab \left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5\right\}$
 ③ $32ab \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$ ④ $\frac{192}{5}ab \left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5\right\}$
 ⑤ $\frac{192}{5}ab \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$

448

2001(인) 수능(홍) 24

다음은 세계 석유 소비 증가 추세에 관한 글들이다.

…… 매년 석유 소비량을 조사한 결과, 최근 10년 동안 소비된 석유의 양은 그 이전까지 소비된 석유의 양과 같다.
 예를 들어 1981년부터 1990년까지 소비된 석유의 양은 1980년까지 소비된 석유 전체의 양과 같다. ……

이와 같은 석유 소비 추세가 계속된다고 가정하고, 현재까지 소비된 석유의 양을 a , 현재의 석유의 매장량을 b 라 할 때, 앞으로 몇 년 동안 석유를 사용할 수 있겠는가? [3점]

- ① $10\log_2\left(\frac{b}{2a} + 1\right)$ ② $10\log_2\left(\frac{b}{a} + 1\right)$ ③ $10\log_2\left(\frac{2b}{a} + 1\right)$
 ④ $10\log_2\left(\frac{b}{a} + 2\right)$ ⑤ $10\log_2\left(\frac{2b}{a} + 2\right)$

449 ●●●●○

2006(가) 6월/평가원 14

다음은 어느 회사의 연봉에 관한 규정이다.

- (가) 입사 첫째 해 연봉은 a 원이고, 입사 19년째 해까지의 연봉은 해마다 직전 연봉에서 8%씩 인상된다.
 (나) 입사 20년째 해부터의 연봉은 입사 19년째 해 연봉의 $\frac{2}{3}$ 로 한다.

이 회사에 입사한 사람이 28년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은?

(단, $1.08^{18} = 4$ 로 계산한다.) [4점]

- ① $\frac{101}{2}a$ ② $\frac{111}{2}a$ ③ $\frac{121}{2}a$
 ④ $\frac{131}{2}a$ ⑤ $\frac{141}{2}a$

유형 2 원리합계

450

1999(인) 수능(홍) 30

은행의 예금 상품은 연이율로 제시된다.

1년에 이자 계산을 n 번하는 복리 예금의 경우 매년 $\frac{(\text{이자율})}{n}$ 의

이율로 이자를 계산한다. 이때, 실효수익률은

$$\frac{(\text{1년 후의 이자 총액})}{(\text{원 금})} \times 100 (\%)$$

로 정의된다. 6개월마다 복리로 이자를 계산하는 연이율 10%인 예금 상품의 실효수익률(%)을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오. [3점]

451

1998(인) 수능(홍) 23

정부가 통일 이후 필요한 통일비용을 마련하기 위해 예산의 일부를 2001년부터 매년 1월 1일 적립한다고 하자. 적립할 금액은 경제성장을 감안하여 매년 전년도보다 6%씩 증액한다. 2001년 1월 1일부터 10조 원을 적립하기 시작한다면, 2010년 12월 31일까지 적립된 금액의 원리합계는 몇 조원인가? (단, 연이율 6%, 1년마다의 복리로 계산하고, $(1.06)^{10}$ 은 1.8로 계산한다.) [4점]

- ① 160 ② 162 ③ 180 ④ 198 ⑤ 220

452 ●●●○

2003예비(나) 12월/평가원 16

한 은행은 고객으로부터 100만원을 연이율 5%의 5년 만기 정기예금으로 받으면, 그 중에서 90만원을 연이율 $r\%$ 로 5년 동안 대출하고 나머지 10만원은 예비비로 보관한다. 5년 후 은행은 대출금을 이자와 함께 회수하고 고객에게 정기예금을 이자와 함께 지불하여 20만원의 수익을 얻으려고 한다. 이때, 대출 이율 r 를 구하는 식은? (단, 모든 이자는 1년마다의 복리로 계산한다.) [4점]

- ① $10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 - 9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 10^5$
 ② $10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 - 9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 2 \times 10^5$
 ③ $10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 - 9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 3 \times 10^5$
 ④ $9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 - 10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 = 10^5$
 ⑤ $9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 - 10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 = 2 \times 10^5$

유형 3

등비수열의 합의 여러 가지 활용

453 ●●●●

2006(나) 9월/평가원 16

자연수 n 에 대하여 점 P_n 을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1 의 좌표는 $(1, 1)$ 이다.

(나) 점 P_n 의 좌표가 (a, b) 일 때,

$b < 2^a$ 이면 점 P_{n+1} 의 좌표는 $(a, b+1)$ 이고

$b = 2^a$ 이면 점 P_{n+1} 의 좌표는 $(a+1, 1)$ 이다.

점 P_n 의 좌표가 $(10, 2^{10})$ 일 때, n 의 값은? [4점]

- ① $2^{10} - 2$ ② $2^{10} + 2$ ③ $2^{11} - 2$
 ④ 2^{11} ⑤ $2^{11} + 2$

1 Σ 의 계산유형 1 Σ 의 기본성질

454 ●○○○○

2015(A) 6월/평가원 8

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{11} a_k = 4, \sum_{k=1}^{11} b_k = 24$ 일 때,

$\sum_{k=1}^{11} (5a_k + b_k)$ 의 값은? [3점]

- ① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

455 ●○○○○

2018(나) 6월/평가원 7

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 3, \sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 7$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (2a_k^2 - a_k)$ 의 값은? [3점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

456 ●○○○○

2017(나) 9월/평가원 11

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n + b_n = 10$ 을 만족

시킨다. $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k) = 160$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값은? [3점]

- ① 60 ② 70 ③ 80 ④ 90 ⑤ 100

457 ●●○○○

2018학년(나) 수능 27

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^2 = 28, \sum_{k=1}^{10} a_k (a_k + 1) = 16$ 일 때,

$\sum_{k=1}^{10} (a_k)^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

458

2001(인) 수능(홀) 29

함수 $f(x)$ 가 $f(10) = 50, f(1) = 3$ 을 만족시킬 때,

$\sum_{k=1}^9 f(k+1) - \sum_{k=2}^{10} f(k-1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

459 ●○○○○

2016(나) 9월/평가원 9

수열 $\{a_n\}$ 이 $\sum_{k=1}^7 a_k = \sum_{k=1}^6 (a_k + 1)$ 을 만족시킬 때, a_7 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

460 ●●○○○

2014(A) 6월/평가원 26

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=150$ 이고, $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = 2n + 1 (n \geq 1)$ 을 만족시킨다. a_{10} 의 값을 구하시오. [4점]

유형 2

자연수의 거듭제곱의 합

461 ●○○○○

2004(나) 9월/평가원 18

$\sum_{k=1}^{10} (k-1)(k+2)$ 의 값을 구하시오. [2점]

462 ●○○○○

2007(나) 9월/평가원 18

$\sum_{k=1}^{10} (k+2)(k-2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

463 ●○○○○

2015(A) 6월/평가원 24

$\sum_{k=1}^{10} (2k+a) = 300$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오. [3점]

464 ●○○○○

2019(나) 9월/평가원 12

$\sum_{k=1}^9 (k+1)^2 - \sum_{k=1}^{10} (k-1)^2$ 의 값은? [3점]

- ① 91 ② 93 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99

유형 3 자연수의 거듭제곱의 합의 활용

465 ●○○○

2017(나) 수능 25

함수 $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{15} f(2k)$ 의 값을 구하시오. [3점]

467 ●●●○

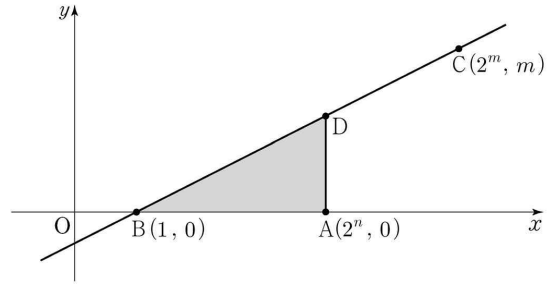
2015(B) 수능 21

자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 m 을 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은? [4점]

(가) 점 A의 좌표는 $(2^n, 0)$ 이다.

(나) 두 점 B(1, 0)과 C(2^m , m)을 지나는 직선 위의 점 중 x 좌표가

2^n 인 점을 D라 할 때, 삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{m}{2}$ 보다 작거나 같다.



- ① 109 ② 111 ③ 113 ④ 115 ⑤ 117

466 ●●●○

2020학년(나) 수능 25

자연수 n 에 대하여 다항식 $2x^2 - 3x + 1$ 을 $x - n$ 으로 나누었을 때의 나머지를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^7 (a_n - n^2 + n)$ 의 값을 구하시오. [3점]

유형 4

등차수열의 합과 Σ 의 활용

468 ●●○○○

2011(가) 6월/평가원 23

첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_4 - a_2 = 4$ 일 때, $\sum_{k=11}^{20} a_k$ 의 값을 구하시오. [3점]

469 ●○○○○

2013(B) 9월/평가원 24

등차수열 $\{a_n\}$ 이 $a_2 = -2$, $a_5 = 7$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 의 값을 구하시오. [3점]

470 ●●○○○

2015(A) 수능 17

등차수열 $\{a_n\}$ 이 $\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = 3n^2 + n$ 을 만족시킬 때, a_8 의 값은? [4점]

- ① 16 ② 19 ③ 22 ④ 25 ⑤ 28

471 ●●○○○

2018학년(나) 수능 14

등차수열 $\{a_n\}$ 이 $a_5 + a_{13} = 3a_9$, $\sum_{k=1}^{18} a_k = \frac{9}{2}$ 를 만족시킬 때, a_{13} 의 값은? [4점]

- ① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

472 ●●●●●

2020학년(나) 수능 15

첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$ 의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m 의 값은? [4점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

유형 5 등비수열의 합과 Σ 의 활용

473

2003예비(가) 12월/평가원 18

다음 식의 값을 구하시오. [3점]

$$\sum_{n=1}^9 2^{n-1}$$

474

2018(나) 6월/평가원 15

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 4(a_2 - a_1)$, $\sum_{k=1}^6 a_k = 15$ 일 때,

$a_1 + a_3 + a_5$ 의 값은? [4점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

475

2009(나) 6월/평가원 26

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = 6$, $a_5 = 162$ 일 때,

$\sum_{k=1}^n a_k \geq 1000$ 을 만족시키는 n 의 최솟값은? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

476

2019(나) 6월/평가원 28

첫째항이 2이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$ 과 자연수 m 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_m 의 값을 구하시오. [4점]

(가) $4 < a_2 + a_3 \leq 12$

(나) $\sum_{k=1}^m a_k = 122$

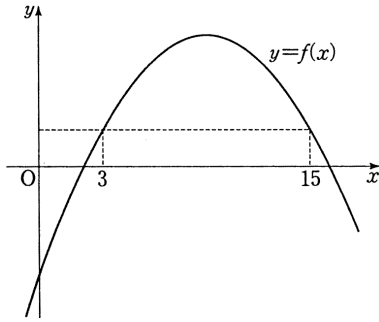
2 여러 가지 수열의 합

유형 1 Σ 를 이용한 여러 가지 수열의 합

477 ●●●○ 2009(가) 6월/평가원 22

함수 $y=f(x)$ 는 $f(3)=f(15)$ 를 만족하고, 그 그래프는 그림과 같

다. 모든 자연수 n 에 대하여 $f(n)=\sum_{k=1}^n a_k$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 있다. m 이 15보다 작은 자연수일 때, $a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{15}<0$ 을 만족시키는 m 의 최솟값을 구하시오. [4점]



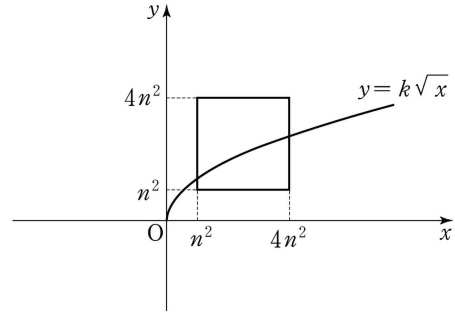
478 ●●●○ 2008(가) 9월/평가원 22

수열 $\{a_n\}$ 의 제 n 항 a_n 을 자연수 k 의 양의 제곱근 $\sqrt{k}$ 를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하여 n 이 되는 k 의 개수라 하자. $\sum_{i=1}^{10} a_i$ 의 값을 구하시오. [4점]

479 ●●●○

2007(가) 수능(홀) 16

좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 A_n 을 4개의 점 (n^2, n^2) , $(4n^2, n^2)$, $(4n^2, 4n^2)$, $(n^2, 4n^2)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형이라 하자.



정사각형 A_n 과 함수 $y=k\sqrt{x}$ 의 그래프가 만나도록 하는 자연수 k 의 개수를 a_n 이라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

< 보기 >

- ㉠. $a_5 = 15$
- ㉡. $a_{n+2} - a_n = 7$
- ㉢. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 200$

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉠, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

유형 3 로그가 포함된 수열의 합

480 ●○○○

2004(가) 6월/평가원 20

수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_{2n-1} = 2^n$ 이고 $a_{2n} = 5^n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \log a_n$ 의 값을 구하시오. [3점]

481 ●●●○

2011(나) 수능 30

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = \log \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} a_{2k} = p$ 라 할 때, 10^p 의 값을 구하시오. [4점]

482 ●●○○

2007(나) 9월/평가원 25

음성 신호를 크게 하는 장치를 증폭기라고 한다. 전압 이득이 V 인 증폭기의 데시벨 전압 이득 D 는

$$D = 20 \log V$$

라고 한다. 전압 이득이 V_k ($k = 1, 2, \dots, 9$)인 증폭기의 데시벨 전압 이득 D_k ($k = 1, 2, \dots, 9$)는

$$D_k = 20 \log V_k \quad (k = 1, 2, \dots, 9)$$

이다. 증폭기의 전압 이득 V_k 가

$$V_k = \frac{k+1}{k} \quad (k = 1, 2, \dots, 9)$$

인 9개의 증폭기를 연결하여 얻은 전체 데시벨 전압 이득 S_9 가

$$S_9 = \sum_{k=1}^9 D_k$$

라 할 때, S_9 의 값을 구하시오. [4점]

유형 4 부분분수의 합

483 ●●○○○

2011(나) 6월/평가원 25 |

$\sum_{k=1}^{14} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로 소인 자연수이다.) [3점]

484 ●○○○○

2014(A) 6월/평가원 10 |

$\sum_{k=1}^n \frac{4}{k(k+1)} = \frac{15}{4}$ 일 때, n 의 값은? [3점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

485 ●○○○○

2012(가) 6월/평가원 11 |

첫째항이 2이고, 각 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지

의 합을 S_n 이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{3}$ 일 때, S_{11} 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

486 ●●●●●

2013(A) 9월/평가원 30 |

자연수 n 에 대하여 부등식 $4^k - (2^n + 4^n)2^k + 8^n \leq 1$ 을 만족시키는

모든 자연수 k 의 합을 a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을

구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

유형 5 근호가 포함된 수열의 합

487 ●●○○○

2016(나) 9월/평가원 14

첫째항이 40이고 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} \text{의 값은? [4점]}$$

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

유형 6 근과 계수의 관계와 Σ

488 ●●○○○

2012(나) 6월/평가원 16

이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때,

$$\sum_{k=1}^{10} (k - \alpha)(k - \beta) \text{의 값은? [4점]}$$

- ① 255 ② 265 ③ 275 ④ 285 ⑤ 295

489 ●●●○○

2019(나) 9월/평가원 26

n 이 자연수일 때, x 에 대한 이차방정식

$$x^2 - (2n-1)x + n(n-1) = 0 \text{의 두 근을 } \alpha_n, \beta_n \text{이라 하자.}$$

$$\sum_{n=1}^{81} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\beta_n}} \text{의 값을 구하시오. [4점]}$$

유형 7 Σ 로 표현된 수열의 합과 일반항**490**

2002(인) 수능 12

수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sqrt{17}-4=\frac{1}{8+a_1}=\frac{1}{8+\frac{1}{8+a_2}}=\frac{1}{8+\frac{1}{8+\frac{1}{8+a_3}}}=\dots$$

을 만족시킬 때, a_{2002} 의 값은? [3점]

- ① $\sqrt{17}-4$ ② $3-\sqrt{17}$ ③ $5-\sqrt{17}$
 ④ $\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{17}+4$

491

2007(나) 6월/평가원 18

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n$ 일 때, a_{47} 의 값을 구하시오. [3점]**492**

2014(B) 6월/평가원 13

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 - n$ ($n \geq 1$)일 때, $\sum_{k=1}^{10} ka_{4k+1}$ 의 값은? [3점]

- ① 2960 ② 3000 ③ 3040
 ④ 3080 ⑤ 3120

3 발견적 추론**유형 1** Σ 의 활용 - 새롭게 정의된 수열**493**

2009(가) 수능 23

자연수 n ($n \geq 2$)으로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수를 모두 더한 값을 a_n 이라 하자. 예를 들어 4로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수는 5, 10, 15이므로 $a_4 = 5 + 10 + 15 = 30$ 이다. $a_n > 500$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오. [4점]

494

2011(가) 수능 23

2 이상의 자연수 n 에 대하여 집합

$$\{3^{2k-1} \mid k \text{는 자연수}, 1 \leq k \leq n\}$$

의 서로 다른 두 원소를 곱하여 나올 수 있는 모든 값만을 원소로 하는 집합을 S 라 하고, S 의 원소의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어,

$f(4)=5$ 이다. 이때, $\sum_{n=2}^{11} f(n)$ 의 값을 구하시오. [4점]

495 ●●●○

2020학년(나) 수능 17

자연수 n 의 양의 약수의 개수를 $f(n)$ 이라 하고, 36의 모든 양의 약수를 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 라 하자. $\sum_{k=1}^9 \{(-1)^{f(a_k)} \times \log a_k\}$ 의 값은? [4점]

- ① $\log 2 + \log 3$ ② $2\log 2 + \log 3$
 ③ $\log 2 + 2\log 3$ ④ $2\log 2 + 2\log 3$
 ⑤ $3\log 2 + 2\log 3$

496 ●●●○

2012(가) 6월/평가원 30

3보다 큰 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 을 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a 라 하자.

(가) $a \geq 3$

(나) 두 점 $(2, 0), (a, \log_n a)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 보다 작거나 같다.

예를 들어 $f(5) = 4$ 이다. $\sum_{n=4}^{30} f(n)$ 의 값을 구하시오. [4점]

497 ●●●○

2009(가) 9월/평가원 22

수열 $\{a_n\}$ 의 제 n 항 a_n 을 $\frac{n}{3^k}$ 이 자연수가 되게 하는 음이 아닌 정수 k 의 최댓값이라 하자. 예를 들어 $a_1 = 0$ 이고 $a_6 = 1$ 이다.

$a_m = 3$ 일 때, $a_m + a_{2m} + a_{3m} + \dots + a_{9m}$ 의 값을 구하시오. [4점]

유형 2
Σ의 활용 - 대입을 통한 추론
498

2009(가) 6월/평가원 8

수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 일 때, $\sum_{n=1}^{2010} na_n$ 의 값은? [4점]

- ① -2011 ② -2010 ③ 0
 ④ 2010 ⑤ 2011

499

2008(나) 6월/평가원 28

자연수 n 의 모든 양의 약수를 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 라 할 때,

$$x_n = (-1)^{a_1} + (-1)^{a_2} + \dots + (-1)^{a_k}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

- ㄱ. $x_8 = 2$
 ㄴ. $n = 3^m$ 이면 $x_n = -m + 1$ 이다.
 ㄷ. $n = 10^m$ 이면 $x_n = m^2 - 1$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

500

2004(나) 9월/평가원 30

방정식 $x^3 + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 하자. 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 을 ω^n

의 실수 부분으로 정의할 때, $\sum_{k=1}^{999} \left\{ f(k) + \frac{1}{3} \right\}$ 의 값을 구하시오. [3점]

유형 3 □의 활용 - 좌표평면

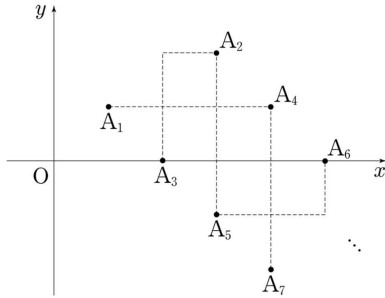
501 ●○○○

2011(가) 6월/평가원 17

자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n 을 다음 규칙에 따라 정한다.

- (가) 점 A_1 의 좌표는 $(1, 1)$ 이다.
 (나) n 이 짝수이면 점 A_n 은 점 A_{n-1} 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점이다.
 (다) n 이 3 이상의 홀수이면 점 A_n 은 점 A_{n-1} 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 점이다.

위의 규칙에 따라 정해진 점 A_k 의 좌표가 $(7, -2)$ 이고 점 A_l 의 좌표가 $(9, -7)$ 일 때, $k+l$ 의 값은? [4점]

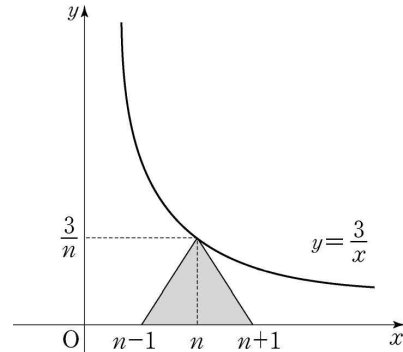


- ① 27 ② 29 ③ 31 ④ 33 ⑤ 35

503 ●○○○

2016(나) 9월/평가원 17

자연수 n 에 대하여 곡선 $y = \frac{3}{x}$ ($x > 0$) 위의 점 $(n, \frac{3}{n})$ 과 두 점 $(n-1, 0)$, $(n+1, 0)$ 을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{9}{a_n a_{n+1}}$ 의 값은? [4점]



- ① 410 ② 420 ③ 430
 ④ 440 ⑤ 450

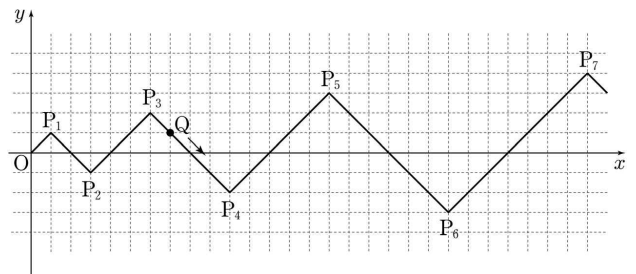
504 ●●●●

2013(A) 6월/평가원 16

자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 $P_n(x_n, y_n)$ 을 다음 규칙에 따라 정한다.

- (가) $x_1 = y_1 = 1$
 (나) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + (n+1) \\ y_{n+1} = y_n + (-1)^n \times (n+1) \end{cases} \quad (n \geq 1)$

점 Q는 원점 O를 출발하여 $\overline{OP_1}$ 을 따라 점 P_1 에 도착한다. 자연수 n 에 대하여 점 P_n 에 도착한 점 Q는 점 P_{n+1} 을 향하여 $\overline{P_n P_{n+1}}$ 을 따라 이동한다. 점 Q는 한 번에 $\sqrt{2}$ 만큼 이동한다. 예를 들어, 원점에서 출발하여 7번 이동한 점 Q의 좌표는 $(7, 1)$ 이다. 원점에서 출발하여 55번 이동한 점 Q의 y 좌표는? [4점]



- ① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

502 ●○○○

2014(A) 6월/평가원 28

자연수 n 에 대하여 순서쌍 (x_n, y_n) 을 다음 규칙에 따라 정한다.

- (가) $(x_1, y_1) = (1, 1)$
 (나) n 이 홀수이면 $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, (y_n - 3)^2)$ 이고,
 n 이 짝수이면 $(x_{n+1}, y_{n+1}) = ((x_n - 3)^2, y_n)$ 이다.

순서쌍 (x_{2015}, y_{2015}) 에서 $x_{2015} + y_{2015}$ 의 값을 구하시오. [4점]

505 ●●●○

2013(가) 수능 27

자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n 을 다음 규칙에 따라 정한다.

- (가) 세 점 P_1, P_2, P_3 의 좌표는 각각 $(-1, 0), (1, 0), (-1, 2)$ 이다.
 (나) 선분 $P_n P_{n+1}$ 의 중점과 선분 $P_{n+2} P_{n+3}$ 의 중점은 같다.

예를 들어, 점 P_4 의 좌표는 $(1, -2)$ 이다. 점 P_{25} 의 좌표가 (a, b) 일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오. [4점]

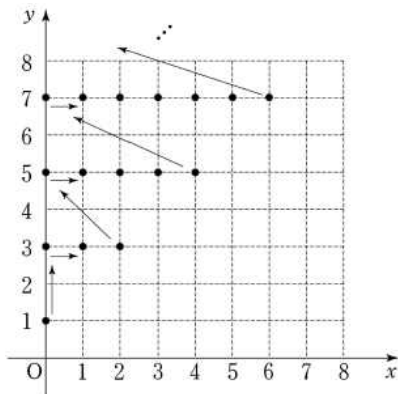
506 ●●●○

2008(나) 수능(홍) 28

좌표평면 위에 다음 [단계]와 같은 순서로 점을 찍는다.

- [단계 1] $(0, 1)$ 에 점을 찍는다.
 [단계 2] $(0, 3), (1, 3), (2, 3)$ 에 이 순서대로 3개의 점을 찍는다.
 $\vdots$
 [단계 k] $(0, 2k-1), (1, 2k-1), (2, 2k-1), \dots, (2k-2, 2k-1)$ 에 이 순서대로 $(2k-1)$ 개의 점을 찍는다. (단, k 는 자연수이다.)
 $\vdots$

이와 같은 과정으로 [단계 1]부터 시작하여 점을 찍어 나갈 때, 100번째 찍히는 점의 좌표는 (p, q) 이다. $p + q$ 의 값은? [4점]

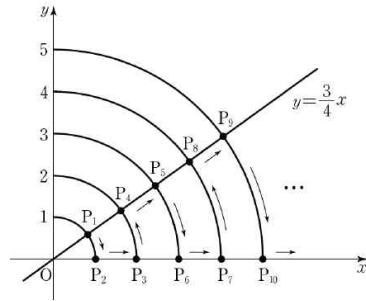


- ① 46 ② 43 ③ 40 ④ 37 ⑤ 34

507 ●●●○

2009(나) 9월/평가원 7

다음 그림은 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1부터 1씩 증가하는 원들이 두 직선 $y = \frac{3}{4}x$, $y = 0$ 과 각각 만나는 점들의 일부를 P_1 부터 시작하여 화살표 방향을 따라 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 으로 나타낸 것이다.



점 P_{25} 의 x 좌표는? [3점]

- ① $\frac{52}{5}$ ② 11 ③ $\frac{56}{5}$ ④ 12 ⑤ $\frac{64}{5}$

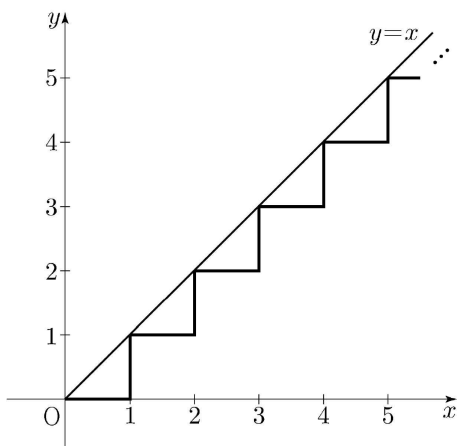
508 ●●●●○

2018(나) 9월/평가원 29

좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n 을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

- (i) A_0 은 원점이다.
 (ii) n 이 자연수일 때, A_n 은 점 A_{n-1} 에서 점 P가 경로를 따라 $\frac{2n-1}{25}$ 만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 점 A_2 와 A_6 의 좌표는 각각 $(\frac{4}{25}, 0)$, $(1, \frac{11}{25})$ 이다. 자연수 n 에 대하여 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점의 x 좌표를 a 라 하자. a 의 값을 구하시오. [4점]



유형 4 **Σ의 활용 - 부분을 묶어 규칙 찾기**

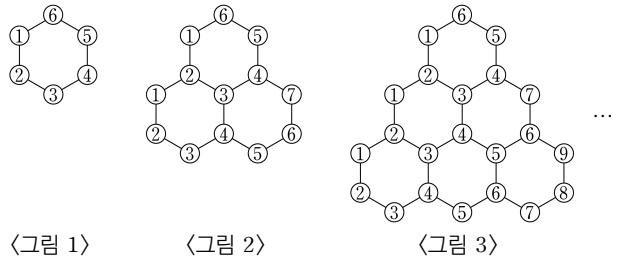
509 ●○○○○

2012(나) 9월/평가원 14

다음 [단계]에 따라 정육각형이 인접해 있는 모양의 도형에 자연수를 적는다.

- [단계 1] <그림 1>과 같이 한 개의 정육각형을 그리고, 각 꼭짓점에 자연수를 1부터 차례로 적는다.
 [단계 2] <그림 1>의 아래에 2개의 정육각형을 그리고, 새로 생긴 각 꼭짓점에 자연수를 1부터 차례로 적어서 <그림 2>를 얻는다.
 ⋮
 [단계 n] <그림 $n-1$ >의 아래에 n 개의 정육각형을 그리고, 새로 생긴 각 꼭짓점에 자연수를 1부터 차례로 적어서 <그림 n >을 얻는다.

<그림 6>에 적혀있는 모든 수의 합은? [4점]



- ① 338 ② 349 ③ 360 ④ 371 ⑤ 382

510

1998(인) 수능(흥) 19

다음과 같이 1부터 연속된 자연수가 규칙적으로 나열되어 있다.

1행	1				
2행	2	3			
3행	4	5	6		
4행	7	8	9	10	
5행	11	12	13	14	15
					
10행	·	·	·		□

10행의 마지막에 들어갈 수는? [3점]

- ① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

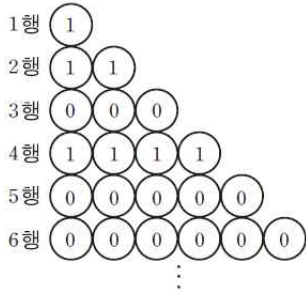
511 ●●○○○

2010(나) 9월/평가원 25

그림과 같이 1행에는 1개, 2행에는 2개, ..., n 행에는 n 개의 원을 나열하고 그 안에 다음 규칙에 따라 0 또는 1을 써 넣는다.

(가) 1행의 원 안에는 1을 써 넣는다.

(나) $n \geq 2$ 일 때, 1행부터 $(n-1)$ 행까지 나열된 모든 원 안의 수의 합이 n 이상이면 n 행에 나열된 모든 원 안에 0을 써 넣고, n 미만이면 n 행에 나열된 모든 원 안에 1을 써 넣는다.



1행부터 32행까지 나열된 원 안에 써 넣은 모든 수의 합을 구하시오. [4점]

512 ●●●○○

2003예비(나) 12월/평가원 24

2 이상의 자연수 n 에 대하여 분모는 2^n 꼴이고, 분자는 분모보다 작은 홀수인 모든 분수로 이루어진 다음 수열에서 첫째 항부터 제 126항까지의 합을 구하시오. [4점]

$$\frac{1}{2^2}, \frac{3}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{3}{2^3}, \frac{5}{2^3}, \frac{7}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{3}{2^4}, \dots$$

유형 5

Σ의 활용 - 기타 발견적 추론

513 ●●○○○

2005(가) 6월/평가원 14

한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 검은 타일과 흰 타일이 있다.

(가) [그림1]과 같이 검은 타일 3개와 흰 타일 1개를 붙여 한 변의 길이가 2인 정사각형이 되도록 한다.

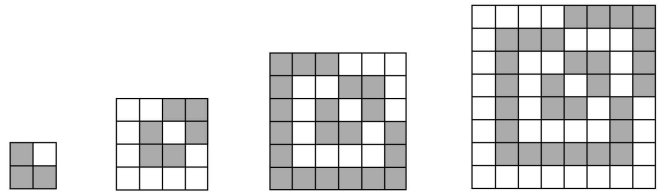
(나) [그림2]와 같이 [그림1]의 정사각형의 바깥쪽에 타일을 붙여 한 변의 길이가 4인 정사각형이 되도록 한다.

이때 [그림1]에 있는 흰 타일의 둘레에는 검은 타일을, 검은 타일의 둘레에는 흰 타일을 붙인다.

(다) [그림3]과 같이 [그림2]의 정사각형의 바깥쪽에 타일을 붙여 한 변의 길이가 6인 정사각형이 되도록 한다.

이때 [그림2]에 있는 흰 타일의 둘레에는 검은 타일을, 검은 타일의 둘레에는 흰 타일을 붙인다.

이와 같은 과정을 계속하여 전체 타일의 개수가 400개가 되었을 때, 검은 타일의 개수와 흰 타일의 개수 사이의 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점]



[그림1]

[그림2]

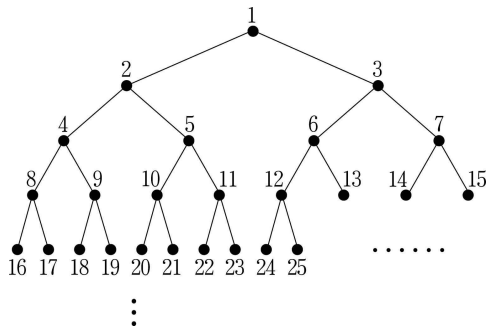
[그림3]

- ① 검은 타일과 흰 타일의 개수가 같다.
- ② 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 18개 많다.
- ③ 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 20개 많다.
- ④ 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 18개 많다.
- ⑤ 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 20개 많다.

514

2004(인) 수능 15

아래 그림과 같이 각각의 점에 1부터 연속된 자연수를 규칙적으로 대응시키고 이 점들을 선분으로 연결한다.



서로 다른 두 자연수 a 와 b 에 대응되는 두 점을 연결하는 선분들의 최소 개수를 $N(a, b)$ 라 하자.

예를 들면, $N(4, 6) = 40$ 이고 $N(12, 27) = 30$ 이다.

$N(32, 33) + N(32, 34) + N(32, 35) + \cdots + N(32, 63)$ 의 값은? [3점]

- ① 196 ② 258 ③ 270 ④ 312 ⑤ 344

515

●●●●○

2017(나) 수능 21

좌표평면에서 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x + 10 & (x < 10) \\ (x - 10)^2 & (x \geq 10) \end{cases}$$

과 자연수 n 에 대하여 점 $(n, f(n))$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_n 이 있다. x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점 중에서 원 O_n 의 내부에 있고 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 아랫부분에 있는 모든 점의 개수를 A_n , 원 O_n 의 내부에 있고 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 윗부분에

있는 모든 점의 개수를 B_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{20} (A_n - B_n)$ 의 값은? [4점]

- ① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

516 ●●○○○

2005(가) 수능(홀) 11

아래 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 n 개의 항

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$$

이 n 행에 1열부터 n 열까지 차례로 나열되어 있다.

(단, $\lfloor x \rfloor$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

	1열	2열	3열	4열	5열	...	n 열	...
1행	1							
2행	2	1						
3행	3	1	1					
4행	4	2	1	1				
5행	5	2	1	1	1			
⋮								
n 행	$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$		...		$\left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$	
⋮								

〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

〈 보기 〉

- ㄱ. n 행에서 그 값이 1인 항은 $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ 개이다.
 ㄴ. 100행에서 그 값이 3인 항은 8개이다.
 ㄷ. 3열에서 그 값이 5인 항은 5개이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 6 2의 활용 - 빈칸 추론

517 ●●●○

2006(나) 6월/평가원 17

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n}{1 + 2 + \dots + n} \quad (n \geq 1)$$

이 성립한다. 다음은 $\{a_n\}$ 이 등차수열이기 위한 필요충분조건은 $\{b_n\}$ 이 등차수열임을 증명하는 과정이다.

수열 $\{a_n\}$ 을 첫째항 a , 공차 d 인 등차수열이라 하면,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a + 2(a+d) + 3(a+2d) + \dots + n\{a + (n-1)d\}}{1 + 2 + \dots + n} \\ &= \frac{a(1+2+\dots+n) + d\{2+3+2+\dots+n \cdot (n-1)\}}{1 + 2 + \dots + n} \\ &= a + \frac{2d \left\{ \text{㉞} - \frac{n(n+1)}{2} \right\}}{n(n+1)} \\ &= a + \text{㉞} \cdot (n-1) \end{aligned}$$

이므로 $\{b_n\}$ 은 공차가 ㉞ 인 등차수열이다.

역으로 $\{b_n\}$ 을 등차수열이라 하면,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n}{1 + 2 + \dots + (n+1)} + \frac{(n+1)a_{n+1}}{1 + 2 + \dots + (n+1)} \\ &= \text{㉞} \cdot b_n + \frac{2}{n+2} a_{n+1} \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{n}{n+2}$
②	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{n-1}{n+2}$
③	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$	$\frac{3}{2}d$	$\frac{n}{n+2}$
④	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{n}{n+2}$
⑤	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$	$\frac{3}{2}d$	$\frac{n+1}{n+2}$

518 ●●○○○

2013(A) 6월/평가원 19

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 20$ 이고,

$$n^2 a_{n+1} = (n^2 - 1)a_n + n(n+1)2^n \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} a_n + \frac{n+1}{n} 2^n$$

이다. $b_n = \frac{n-1}{n} a_n$ 이라 하면

$$b_{n+1} = b_n + \boxed{\text{가}} \quad (n \geq 1)$$

이고, $b_1 = 0$ 이므로

$$b_n = \boxed{\text{나}} \quad (n \geq 1)$$

이다. 그러므로

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ \frac{n}{n-1} \times \boxed{\text{다}} & (n>1) \end{cases}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때,
 $f(5) + g(10)$ 의 값은? [4점]

- ① 1014 ② 1024 ③ 1034
 ④ 1044 ⑤ 1054

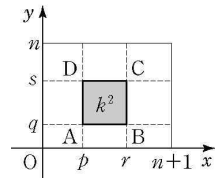
519 ●●●○○

2008(나) 6월/평가원 12

자연수 n 과 $0 \leq p < r \leq n+1$, $0 \leq q < s \leq n$ 을 만족시키는 네
 정수 p, q, r, s 에 대하여 좌표평면에서 네 점 $A(p, q)$, $B(r, q)$,
 $C(r, s)$, $D(p, s)$ 를 꼭짓점으로 하고 넓이가 k^2 인 정사각형의 개수를

a_k 라고 하자. 다음은 $\sum_{k=1}^n a_k$ 의 값을 구하는 과정이다. (단, k 는 n 이하
 의 자연수이다.)

그림과 같이 넓이가 k^2 인 정사각형 ABCD
 를 만들 때, 두 점 A, B의 y 좌표가 주어지
 면 x 좌표의 차가 $r-p=k$ 인 변 AB를 택
 하는 경우의 수는 $\boxed{\text{가}}$ 이다. 또 두 점 A,
 D의 x 좌표가 주어지면 y 좌표의 차가
 $s-q=k$ 인 변 AD를 택하는 경우의 수는
 $\boxed{\text{나}}$ 이다. 따라서



$$a_k = (n+1)(n+2) - (2n+3)k + k^2$$

이다. 그러므로

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \{(n+1)(n+2) - (2n+3)k + k^2\} \\ = \boxed{\text{다}}$$

(가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$n-k+1$	$n-k+2$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
②	$n-k+2$	$n-k+1$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
③	$n-k+1$	$n-k+2$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
④	$n-k+2$	$n-k+1$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
⑤	$n-k+1$	$n-k+2$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$

1 수열의 귀납적 정의

유형 1 등차수열의 귀납적 정의

520 ●○○○

2011(나) 수능 26

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 를 만족시킨다. $a_2 = -1$, $a_3 = 2$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합은? [3점]

- ① 95 ② 90 ③ 85 ④ 80 ⑤ 75

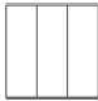
521 ●○○○

2008(가) 수능(올) 14

다음과 같이 정사각형을 가로 방향으로 3등분하여 [도형1]을 만들고, 세로 방향으로 3등분하여 [도형2]를 만든다.

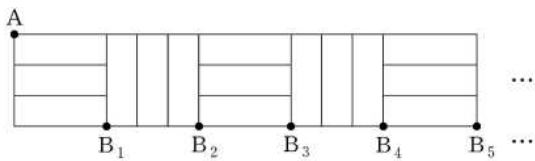


[도형1]



[도형2]

[도형1]과 [도형2]를 번갈아가며 계속 붙여 아래와 같은 도형을 만든다. 그림과 같이 첫 번째 붙여진 [도형1]의 왼쪽 맨 위 꼭짓점을 A라 하고, [도형1]의 개수와 [도형2]의 개수를 합하여 n 개 붙여 만든 도형의 오른쪽 맨 아래 꼭짓점을 B_n 이라 하자.



꼭짓점 A에서 꼭짓점 B_n 까지 선을 따라 최단거리로 가는 경로의 수를 a_n 이라 할 때, $a_3 + a_7$ 의 값은? [4점]

- ① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

522 ●●○○

2005(나) 9월/평가원 14

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

(단, $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$ 이다.)

$$a_1 = 1, a_2 = 3$$

$$(S_{n+1} - S_{n-1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

일 때, a_{20} 의 값은? [3점]

- ① 39 ② 43 ③ 47 ④ 51 ⑤ 55

유형 2 등비수열의 귀납적 정의

523 ●●○○○

2014(A) 수능 24

수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $a_1 = a_2 + 3$
 (나) $a_{n+1} = -2a_n \ (n \geq 1)$

a_9 의 값을 구하시오. [3점]

524 ●○○○○

2013(A) 9월/평가원 8

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$ 이고,

$$\log_2 a_{n+1} = 1 + \log_2 a_n \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_8 = 2^k$ 일 때 상수 k 의 값은?

[3점]

- ① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

유형 3 $a_{n+1} = a_n + f(x)$ 꼴 귀납적 정의

2015 개정 교육과정(2021학년 수능 적용)에선 특정 유형의 일반항을 공식화해서 구하는 내용이 빠졌습니다. 귀납적으로 정의된 수열에서 항의 값을 구할 때는 순차적으로 반복 대입을 통해 규칙성을 발견하는 것이 핵심입니다.

525 ●●○○○

2007(나) 6월/평가원 21

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 3$ 이고 $a_{n+1} - a_n = 4n - 3$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하시오. [3점]

526 ●●○○○

2010(나) 수능 26

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_{n+1} - a_n = 2n$ 을 만족시킨다. $a_{10} = 94$ 일 때, a_1 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

527 ●●○○○

2010(가) 9월/평가원 23

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 2$ 이고,

$$a_{n+1} = a_n + (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. $a_{20} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

유형 4 $a_{n+1} = f(n)a_n$ 꼴 귀납적 정의**528** ●○○○

2012(나) 수능 5

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = \frac{2n}{n+1}a_n$ 을 만족시킬 때, a_4 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

유형 5 $a_{n+1} = pa_n + q$ 꼴 귀납적 정의**529** ●●○○

2007(나) 수능(홀) 26

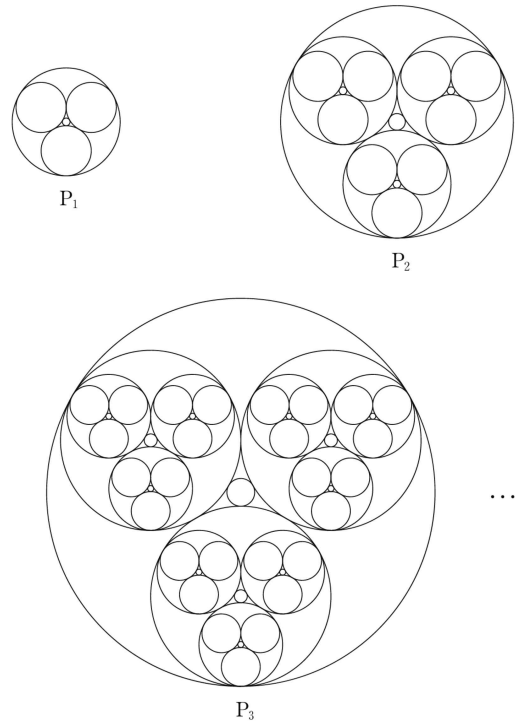
수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 2$ 이고 $a_{n+1} = 2a_n + 2$ 일 때, a_{10} 의 값은?

[3점]

- ① 1022 ② 1024 ③ 2021
④ 2046 ⑤ 2082

530

2009(가) 9월/평가원 38

아래 그림에서 P_1 은 합동인 세 원을 서로 외접하게 그린 후, 이 세 원에 동시에 접하는 원 2개를 그린 도형이다. P_2 는 P_1 과 같은 모양의 도형 3개를 서로 외접하게 그린 후, 이 세 도형에 동시에 접하는 원 2개를 그린 도형이다.이와 같은 방법으로 계속하여 n 번째 얻은 도형 P_n 에 있는 원의 개수를 a_n 이라 하자. 예를 들어 $a_1 = 5$ 이고, $a_2 = 17$ 이다. a_6 의 값은? [3점]

- ① 1712 ② 1457 ③ 1202
④ 972 ⑤ 722

유형 6 여러 가지 수열의 귀납적 정의

531 ●○○○ 2019(나) 9월/평가원 24

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} + a_n = 3n - 1$$

을 만족시킨다. $a_3 = 4$ 일 때, $a_1 + a_5$ 의 값을 구하시오. [3점]

532 ●○○○ 2018(나) 9월/평가원 11

수열 a_n 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n a_{n+1} = 2n$ 이고 $a_3 = 1$ 일 때,

$a_2 + a_5$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{13}{3}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{19}{3}$ ④ $\frac{22}{3}$ ⑤ $\frac{25}{3}$

533 2008(가) 수능(홍) 39

자연수 n 에 대하여 세 문자 A, B, C를 중복을 허용하여 만든 n 자리 문자열 중에서 다음 두 조건을 만족시키는 문자열의 개수를 a_n 이라 하자.

- (가) 같은 문자가 연속하여 나올 수 없다.
(나) A의 바로 뒤에 B는 나올 수 없다.

수열 $\{a_n\}$ 은 점화 관계 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 을 만족시킨다. a_6 의 값은? [4점]

- ① 22 ② 26 ③ 30 ④ 34 ⑤ 38

534 ●○○○ 2019(나) 6월/평가원 9

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} + (-1)^n \times a_n = 2^n$$

을 만족시킨다. a_5 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

535 ●○○○ 2012(나) 6월/평가원 28

수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 2$ 이고, $n \geq 1$ 일 때, a_{n+1} 은

$$\frac{1}{n+2} < \frac{a_n}{k} < \frac{1}{n}$$

을 만족시키는 자연수 k 의 개수이다. a_{10} 의 값을 구하시오. [4점]

536 ●●●○○

2017(나) 9월/평가원 19

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = k$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2, \quad b_{n+1} = a_n - b_n + n$$

을 만족시킨다. $b_{20} = 14$ 일 때, k 의 값은? [4점]

- ① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

537 ●●●●○

2011(가) 수능 40

중복을 허용하여 a , b , c 로 만든 n 자리 문자열 중에서 다음 조건을 만족시키는 문자열의 개수를 a_n 이라 하자.

- (가) 첫 문자와 끝 문자는 모두 a 이다.
(나) b 와 c 바로 뒤에는 a 만 올 수 있다.

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$, $a_2 = 10$ 이고, 점화 관계

$$a_{n+2} = a_{n+1} + pa_n \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. $a_7 = q$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. [4점]

유형 7

수열의 귀납적 정의 - 경우 나누기

538

2010(가) 9월/평가원 36

수열 $\{a_n\}$ 이 점화 관계

$$\begin{cases} a_1 = 2, a_2 = 3 \\ a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = n+1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{14} a_k$ 의 값은? [3점]

- ① 37 ② 38 ③ 39 ④ 40 ⑤ 41

539 ●○○○○

2018학년(나) 수능 13

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 20$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1 & (a_n \text{이 짝수인 경우}) \\ a_n + n & (a_n \text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. a_7 의 값은? [3점]

- ① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

540 ●●●○

2016(나) 6월/평가원 20

첫째항이 a 인 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + (-1)^n \times 2 & (n \text{ 이 } 3 \text{ 의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n + 1 & (n \text{ 이 } 3 \text{ 의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15} = 43$ 일 때, a 의 값은? [4점]

- ① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

541 ●●●○

2017(나) 6월/평가원 29

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 이 있다. 수열 $\{b_n\}$ 은

$$b_1 = a_1$$

이고, 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} + a_n & (n \text{ 이 } 3 \text{ 의 배수가 아닌 경우}) \\ b_{n-1} - a_n & (n \text{ 이 } 3 \text{ 의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10} = a_{10}$ 일 때, $\frac{b_8}{b_{10}} = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

542 ●●●●

2020학년(나) 수능 21

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \ a_{2n} = a_n - 1$$

$$(나) \ a_{2n+1} = 2a_n + 1$$

$a_{20} = 1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 704 ② 712 ③ 720 ④ 728 ⑤ 736

543

2010(가) 수능 36

수열 $\{a_n\}$ 이

$$\begin{cases} a_1 = 2, a_2 = 5 \\ a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, a_5 의 값은? [3점]

- ① 70 ② 72 ③ 74 ④ 76 ⑤ 78

유형 8 수열의 귀납적 정의 - 주기성을 갖는 수열

544 ●●●○

2006(나) 6월/평가원 26

수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & (a_n \geq 2) \\ \sqrt[3]{2}a_n & (a_n < 2) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, a_{112} 의 값은? [3점]

- ① 1 ② $\sqrt[3]{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt[3]{4}$ ⑤ 2

545 ●●●○

2019학년(나) 수능 13

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 2$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2-3a_n} & (n \text{이 홀수인 경우}) \\ 1+a_n & (n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{40} a_n$ 의 값은? [3점]

- ① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

546 ●●○○

2013(A) 6월/평가원 28

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 7$ 이고, 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $a_{n+2} = a_n - 4$ ($n = 1, 2, 3, 4$)
 (나) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+6} = a_n$ 이다.

 $\sum_{k=1}^{50} a_k = 258$ 일 때, a_2 의 값을 구하시오. [4점]

547 ●●●○

2006(나) 수능(홀) 29

 $p \geq 2$ 인 자연수 p 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 세 조건을 만족시킨다.

- (가) $a_1 = 0$
 (나) $a_{k+1} = a_k + 1$ ($1 \leq k \leq p-1$)
 (다) $a_{k+p} = a_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)

〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

- ㄱ. $a_{2k} = 2a_k$
 ㄴ. $a_1 + a_2 + \dots + a_p = \frac{p(p-1)}{2}$
 ㄷ. $a_p + a_{2p} + \dots + a_{kp} = k(p-1)$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 9 수열의 귀납적 정의의 활용

548 ●●○○○

2010(가) 수능 22

자연수 n 에 대하여 점 A_n 이 x 축 위의 점일 때, 점 A_{n+1} 을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1 의 좌표는 $(2, 0)$ 이다.

(나) (1) 점 A_n 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선

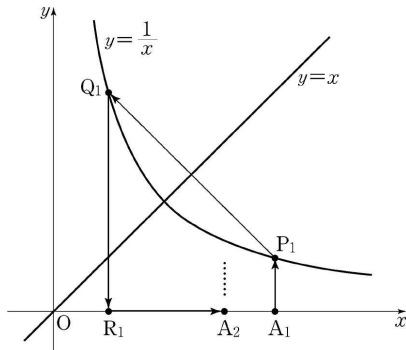
$$y = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$
과 만나는 점을 P_n 이라 한다.

(2) 점 P_n 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 Q_n 이라 한다.

(3) 점 Q_n 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 x 축과 만나는 점을 R_n 이라 한다.

(4) 점 R_n 을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 A_{n+1} 이라 한다.

점 A_n 의 x 좌표를 x_n 이라 하자. $x_5 = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]



549 ●●○○○

2007(가) 6월/평가원 16

다음은 19세기 초 조선의 유학자 홍길주가 소개한 제곱근을 구하는 계산법의 일부를 재구성한 것이다.

1보다 큰 자연수 p 에서 1을 뺀 수를 p_1 이라 한다.

p_1 이 2보다 크면 p_1 에서 2를 뺀 수를 p_2 라 한다.

p_2 가 3보다 크면 p_2 에서 3을 뺀 수를 p_3 이라 한다.

⋮

p_{k-1} 이 k 보다 크면 p_{k-1} 에서 k 를 뺀 수를 p_k 라 한다.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 수 p_n 이 $(n+1)$ 보다 작으면 이 과정을 멈춘다.

이때, $2p_n$ 이 $(n+1)$ 과 같으면 p 는 **(가)**이다.

(가)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [4점]

- ① $n+1$ ② $\frac{(n+1)^2}{2}$ ③ $\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$
 ④ 2^{n+1} ⑤ $(n+1)!$

550 ●●○○○

2006(나) 9월/평가원 28

다음은 어느 시력검사표에 표시된 시력과 그에 해당되는 문자의 크기를 나타낸 것의 일부이다.

시력	0.1	0.2	0.3	0.4	...	1.0
문자의 크기	a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_{10}

문자의 크기 a_n 은 다음 관계식을 만족시킨다.

$$a_1 = 10A, a_{n+1} = \frac{10A \cdot a_n}{10A + a_n}$$

(단, A 는 상수이고 $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ 이다.)

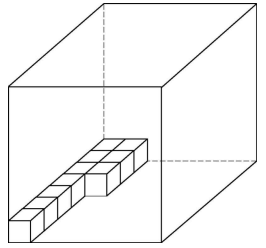
이 시력검사표에서 시력 0.8에 해당되는 문자의 크기는? [4점]

- ① $2A$ ② $\frac{3}{2}A$ ③ $\frac{4}{3}A$
 ④ $\frac{5}{4}A$ ⑤ $\frac{6}{5}A$

551 ●●○○○

2005(가) 9월/평가원 24

한 변의 길이가 70cm인 정육면체 모양의 상자에 한 변의 길이가 10cm인 정육면체 모양의 나무 블록을 다음 규칙에 따라 빈틈없이 가득 채우려고 한다.



n 번째에 넣는 나무 블록의 개수를 a_n 이라 할 때,

(가) $a_1 = 10$

(나) $a_{n+1} = \left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor + 3, n = 1, 2, 3, \dots$

(단, $\lfloor x \rfloor$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

(다) 상자를 가득 채우면 나무 블록 넣기를 멈춘다.

k 번째에 상자를 가득 채웠다고 할 때, k 의 값을 구하십시오. (단, 상자의 두께는 무시한다.) [4점]

552 ●●●○

2013(A) 9월/평가원 29

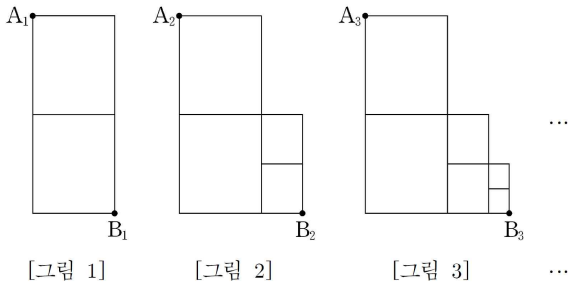
그림과 같이 직사각형에서 세로를 각각 이등분하는 점 2개를 연결하는 선분을 그린 그림을 [그림 1]이라 하자.

[그림 1]을 $\frac{1}{2}$ 만큼 축소시킨 도형을 [그림 1]의 오른쪽 맨 아래 꼭짓점을 하나의 꼭짓점으로 하여 오른쪽에 이어 붙인 그림을 [그림 2]라 하자.

이와 같이 3이상의 자연수 k 에 대하여 [그림 1]을 $\frac{1}{2^{k-1}}$ 만큼 축소시킨 도형을 [그림 $k-1$]의 오른쪽 맨 아래 꼭짓점을 하나의 꼭짓점으로 하여 오른쪽에 이어 붙인 그림을 [그림 k]라 하자.

자연수 n 에 대하여 [그림 n]에서 왼쪽 맨 위 꼭짓점을 A_n , 오른쪽 맨 아래 꼭짓점을 B_n 이라 할 때, 점 A_n 에서 점 B_n 까지 선을 따라 최단거리로 가는 경로의 수를 a_n 이라 하자.

a_7 의 값을 구하시오. [4점]



유형 10 피보나치 수열

553 ●●○○

1997(인) 수능(홍) 22

어떤 원자의 전자들은 에너지의 증감에 따라 세 가지 상태 a , b , c 로 바뀐다. 이 때, 다음 규칙이 적용된다고 하자.

규칙 1 : 에너지가 증가하면 b 상태의 전자는 c 상태로 올라가고, a 상태의 전자 중 일부는 b 상태로, 나머지는 c 상태로 올라간다.

규칙 2 : 에너지가 감소하면 b 상태의 전자는 a 상태로 내려가고, c 상태의 전자 중 일부는 b 상태로, 나머지는 a 상태로 내려간다.

<단계 1>에서 전자는 a 상태에 있다. 에너지가 증가하여 <단계 2>가 되면 이 전자는 b 상태 또는 c 상태가 된다. 이때, 이 전자가 취할 수 있는 변화의 경로는 $a \rightarrow b$ 와 $a \rightarrow c$ 의 2가지이다. 다시 에너지가 감소하여 <단계 3>이 되면, 이때까지의 가능한 변화 경로는 $a \rightarrow b \rightarrow a$, $a \rightarrow c \rightarrow b$, $a \rightarrow c \rightarrow a$ 의 3가지이다. 이와 같이 에너지의 증가와 감소가 교대로 계속될 때, <단계 1>부터 <단계 7>까지 이 전자의 가능한 변화 경로의 수는? [3점]

- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

유형 11 귀납적으로 정의된 수열의 빈칸 추론

554 ●●○○○

2013(가) 수능 17

 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 40$ 이고,

$$a_{n+1} = n \cdot 2^n + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} \quad (n \geq 1)$$

 을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여

$$a_n = (n-1) \cdot 2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k} \quad (n \geq 2) \text{이다.}$$

 따라서 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = \boxed{(가)} + \frac{a_n}{n} \text{이므로}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)a_n}{n} + \boxed{(가)} \text{이다.}$$

$$b_n = \frac{a_n}{n} \text{이라 하면}$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\boxed{(가)}}{n+1} \quad (n \geq 2) \text{이고}$$

$$b_2 = 30 \text{이므로 } b_n = \boxed{(나)} \quad (n \geq 2) \text{이다.}$$

$$\text{그러므로 } a_n = \begin{cases} 4 & (n=1) \\ n \times \boxed{(나)} & (n \geq 2) \end{cases} \text{이다.}$$

 위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때,
 $f(4) + g(7)$ 의 값은? [4점]

- ① 90 ② 95 ③ 100 ④ 105 ⑤ 110

555 ●●●○

2010(나) 9월/평가원 17

 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 10$ 이고, $a_n = n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)a_k \quad (n \geq 2)$ 를 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정의 일부이다.

 주어진 식으로부터 $a_2 = 70$ 이다.

 자연수 $n \quad (n \geq 3)$ 에 대하여

$$a_n = n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)a_k = n^2 + \sum_{k=1}^{n-2} (2k+1)a_k + (2n-1)a_{n-1}$$

$$= n^2 + a_{n-1} - \boxed{(가)} + (2n-1)a_{n-1} \text{이므로,}$$

 $a_n + 1 = 2n(a_{n-1} + 1)$ 이 성립한다. 따라서

$$a_n + 1 = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times \boxed{(나)} \times (a_2 + 1)$$

$$= 4 \times n! \times \boxed{(나)} \text{이다.}$$

 위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$ 이라 할 때,
 $f(9) \times g(9)$ 의 값은? [4점]

- ①
- 2^{13}
- ②
- 2^{14}
- ③
- 2^{15}
- ④
- 2^{16}
- ⑤
- 2^{17}

556 ●●○○○

2014(A) 수능 16

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 10$ 이고

$$(a_{n+1})^n = 10(a_n)^{n+1} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$n \log a_{n+1} = (n+1) \log a_n + 1$$

이다. 양변을 $n(n+1)$ 로 나누면

$$\frac{\log a_{n+1}}{n+1} = \frac{\log a_n}{n} + \boxed{(\text{가})}$$

이다. $b_n = \frac{\log a_n}{n}$ 이라 하면 $b_1 = 1$ 이고

$$b_{n+1} = b_n + \boxed{(\text{가})}$$

이다. 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하면

$$b_n = \boxed{(\text{나})}$$

이므로

$$\log a_n = n \times \boxed{(\text{나})}$$

이다. 그러므로 $a_n = 10^{n \times \boxed{(\text{나})}}$ 이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$ 과 $g(n)$ 이라 할 때, $\frac{g(10)}{f(4)}$

의 값은? [4점]

- ① 38 ② 40 ③ 42 ④ 44 ⑤ 46

557 ●●○○○

2015(A) 9월/평가원 17

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 10$ 이고

$$(a_{n+1})^{n+1} = \frac{a_1 + (a_2)^2 + (a_3)^3 + \dots + (a_n)^n}{n} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정의 일부이다.

$b_n = (a_n)^n$ 이라 하면 $b_1 = 10$ 이고 주어진 식으로부터

$$b_{n+1} = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \quad (n \geq 1)$$

이다. $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$ 라 하면

$$S_{n+1} = \boxed{(\text{가})} \times S_n$$

이다.

$$S_1 = 10,$$

$$S_n = S_1 \times \frac{S_2}{S_1} \times \frac{S_3}{S_2} \times \dots \times \frac{S_n}{S_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

를 이용하여 S_n 을 구하면

$$S_n = \boxed{(\text{나})} \quad (n \geq 1)$$

이다.

⋮

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때,

$f(5) \times g(6)$ 의 값은? [4점]

- ① 72 ② 76 ③ 80 ④ 84 ⑤ 88

558 ●●○○○

2011(가) 9월 평가원 19

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고,

$$a_{n+1} = \frac{3a_n - 1}{4a_n - 1} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정의 일부이다.모든 자연수 n 에 대하여

$$4a_{n+1} - 1 = 4 \times \frac{3a_n - 1}{4a_n - 1} - 1 = 2 - \frac{1}{4a_n - 1}$$

이다. 수열 $\{b_n\}$ 을

$$b_1 = 1, b_{n+1} = (4a_n - 1)b_n \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots (*)$$

이라 하면,

:

$$b_{n+2} - b_{n+1} = b_{n+1} - b_n \text{ 이다.}$$

즉, $\{b_n\}$ 은 등차수열이므로 (*) 에 의하여

$$b_n = \boxed{(\text{가})} \text{ 이고, } a_n = \boxed{(\text{나})} \text{ 이다.}$$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때,
 $f(14) \times g(5)$ 의 값은? [4점]

- ① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

559 ●○○○○

2014(A) 6월/평가원 17

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 3$ 이고,

$$2a_{n+1} = 3a_n - \frac{6n+2}{(n+1)!} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여

$$2a_{n+1} = 3a_n - \frac{6(n+1)-4}{(n+1)!}$$

이다.

$$2a_{n+1} - \frac{4}{(n+1)!} = 3a_n - 3 \times \boxed{(\text{가})}$$

이므로, $b_n = a_n - \boxed{(\text{가})}$ 라 하면

$$2b_{n+1} = 3b_n$$

이다. $b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n$ 이고 $b_1 = 1$ 이므로

$$b_n = \boxed{(\text{나})}$$

이다. 그러므로 $a_n = \boxed{(\text{가})} + \boxed{(\text{나})}$ 이다.위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때,
 $f(3) \times g(3)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

560 ●●○○○

2011(가) 6월/평가원 10

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^n 2^{n-k} a_k \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식으로부터 $a_2 = \boxed{(가)}$ 이다.

자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \sum_{k=1}^{n+1} 2^{n+1-k} a_k \\ &= \sum_{k=1}^n 2^{n+1-k} a_k + a_{n+1} \\ &= \boxed{(나)} \sum_{k=1}^n 2^{n-k} a_k + a_{n+1} \\ &= \boxed{(다)} a_{n+1} \end{aligned}$$

이다.

따라서 $a_1 = 1$ 이고, $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = \boxed{(다)}^{n-2} \text{ 이다.}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 라 할 때,
 $p+q+r$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

561 ●●○○○

2014(A) 9월/평가원 16

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때,

$$\frac{S_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^n S_k \quad (n \geq 1) \dots\dots (*)$$

이 성립한다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식 (*) 에 의하여

$$\frac{S_n}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \quad (n \geq 2) \dots\dots \textcircled{1}$$

이다. (*) 에서 $\textcircled{1}$ 을 빼서 정리하면

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{\boxed{(가)}}{n} \quad (n \geq 2)$$

이다. $\textcircled{1}$ 으로부터 $S_2 = 2$ 이고,

$$S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \times \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \times \dots \times \frac{S_3}{S_2} \times S_2 \quad (n \geq 3)$$

이므로

$$S_n = n! \times \boxed{(나)} \quad (n \geq 3)$$

이다. 그러므로 a_n 은

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1, 2) \\ \frac{n^2 - n + 1}{2} \times (n-1)! & (n \geq 3) \end{cases}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 할 때,
 $f(4) \times g(20)$ 의 값은? [4점]

- ① 225 ② 250 ③ 275 ④ 300 ⑤ 325

562 ●○○○

2015(B) 수능 17

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때,

$$a_{n+1} = (n+1)S_n + n! \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 이므로 주어진 식에 의하여

$$S_{n+1} = (n+2)S_n + n! \quad (n \geq 1)$$

이다. 양변을 $(n+2)!$ 로 나누면

$$\frac{S_{n+1}}{(n+2)!} = \frac{S_n}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

이다. $b_n = \frac{S_n}{(n+1)!}$ 이라 하면 $b_1 = \frac{1}{2}$ 이고

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

이다. 수열 $b_n = \frac{\boxed{가}}{n+1}$

이므로

$$S_n = \boxed{가} \times n!$$

이다. 그러므로

$$a_n = \boxed{나} \times (n-1)! \quad (n \geq 1)$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때,
 $f(7) + g(6)$ 의 값은? [4점]

- ① 44 ② 41 ③ 38 ④ 35 ⑤ 32

563 ●●○○

2016(A) 수능 19

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = a_2 = 1$ 이고, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때,

$$a_{n+1} = \frac{S_n^2}{S_{n-1}} + (2n-1)S_n \quad (n \geq 2)$$

를 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 이므로 주어진 식으로부터

$$S_{n+1} = \frac{S_n^2}{S_{n-1}} + 2nS_n \quad (n \geq 2)$$

이다. 양변을 S_n 으로 나누면

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{S_n}{S_{n-1}} + 2n$$

이다. $b_n = \frac{S_{n+1}}{S_n}$ 이라 하면 $b_1 = 2$ 이고

$$b_n = b_{n-1} + 2n \quad (n \geq 2)$$

이다. 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하면

$$b_n = \boxed{가} \times (n+1) \quad (n \geq 1)$$

이므로

$$S_n = \boxed{가} \times \{(n-1)!\}^2 \quad (n \geq 1)$$

이다. 따라서 $a_1 = 1$ 이고, $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \boxed{나} \times \{(n-2)!\}^2 \end{aligned}$$

이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때,
 $f(10) + g(6)$ 의 값은? [4점]

- ① 110 ② 125 ③ 140 ④ 155 ⑤ 170

564 ●●●○

2012(가) 수능 17

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때,

$$n S_{n+1} = (n+2)S_n + (n+1)^3 \quad (n \geq 1)$$

이 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

자연수 n 에 대하여 $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ 이므로

$$n a_{n+1} = 2S_n + (n+1)^3 \dots\dots \textcircled{1}$$

이다. 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$(n-1)a_n = 2S_{n-1} + n^3 \dots\dots \textcircled{2}$$

이고, $\textcircled{1}$ 에서 $\textcircled{2}$ 을 뺀 식으로부터

$$n a_{n+1} = (n+1)a_n + \boxed{\textcircled{가}}$$

를 얻는다. 양변을 $n(n+1)$ 로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{\boxed{\textcircled{가}}}{n(n+1)}$$

이다. $b_n = \frac{a_n}{n}$ 이라 하면,

$$b_{n+1} = b_n + 3 + \boxed{\textcircled{나}} \quad (n \geq 2)$$

이므로 $b_n = b_2 + \boxed{\textcircled{다}} \quad (n \geq 3)$ 이다.

⋮

위의 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이라 할 때,

$\frac{f(3)}{g(3)h(6)}$ 의 값은? [4점]

- ① 30 ② 36 ③ 42 ④ 48 ⑤ 54

565 ●●●○

2012(가) 9월/평가원 17

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = -\frac{4}{9}$ 이고,

$$2^n a_{n+1} - 2^{n+1} a_n = n \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식 $2^n a_{n+1} - 2^{n+1} a_n = n$ 의 양변을 2^{2n+1} 으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{n}{2^{2n+1}} \quad (n \geq 1)$$

이므로 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k+1}} \dots\dots (*)$$

이다. 한편

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k+1}} &= \frac{2}{3} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k}} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{2k}} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \dots + \frac{n-1}{4^{n-1}} \right) - \left(\frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^3} + \dots + \frac{n-1}{4^n} \right) \right\} \\ &= \frac{2}{3} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k} - \frac{\boxed{\textcircled{가}}}{4^n} \right) \end{aligned}$$

이므로 (*)에 의하여

$$\begin{aligned} a_n &= \boxed{\textcircled{나}} + \frac{2^{n+1}}{3} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k} - \frac{\boxed{\textcircled{가}}}{4^n} \right) \\ &= -\frac{3n+1}{9 \cdot 2^{n-1}} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때,

$f(10) \times g(5)$ 의 값은? [4점]

- ① -64 ② -56 ③ -48 ④ -40 ⑤ -32

566 ●●○○○

2015(A) 6월/평가원 19

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때,

$$a_{n+1} = (2^n - 1)(S_n + 1) \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots (*)$$

이 성립한다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

식(*)의 양변에 S_n 을 더하여 정리하면

$$S_{n+1} + 1 = 2^n(S_n + 1)$$

이다. $b_n = \log_2(S_n + 1)$ 이라 하면 $b_1 = 1$ 이고

$$b_{n+1} = \boxed{(\text{가})} + b_n$$

이다. 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하면

$$b_n = \frac{n^2 - n + 2}{2} \quad (n \geq 1)$$

이므로

$$S_n = 2^{\frac{n^2 - n + 2}{2}} - 1 \quad (n \geq 1)$$

이다, 그러므로 $a_1 = 1$ 이고 $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2^{\frac{n^2 - n + 2}{2}} - 2^{\boxed{(\text{나})}} \\ &= 2^{\boxed{(\text{다})}} \times (2^{n-1} - 1) \end{aligned}$$

이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때,
 $f(12) - g(5)$ 의 값은? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

567 ●●○○○

2012(가) 6월/평가원 15

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 2$ 이고, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때, $a_{n+1} = \frac{S_n}{a_n} \quad (n \geq 1)$

을 만족시킨다. 다음은 S_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식으로부터 $a_2 = \frac{S_1}{a_1} = 1$ 이다.

$n \geq 3$ 일 때,

$$a_n = \frac{S_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{S_{n-2} + a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-2}a_{n-1} + a_{n-1}}{a_{n-1}}$$

이므로 $a_n = a_{n-2} + 1$ 이다.

따라서 일반항 a_n 을 구하면, 자연수 k 에 대하여

$$n = 2k - 1 \text{ 일 때, } a_{2k-1} = k + 1$$

$$n = 2k \text{ 일 때, } a_{2k} = \boxed{(\text{가})}$$

이다. 한편, $S_n = a_n a_{n+1}$ 이므로

$$S_n = \begin{cases} (k+1) \times \boxed{(\text{가})} & (n = 2k - 1) \\ \boxed{(\text{나})} & (n = 2k) \end{cases}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라 할 때, $f(6) + g(7)$ 의 값은? [4점]

- ① 65 ② 67 ③ 69 ④ 71 ⑤ 73

568 ●●●●○

2011(가) 수능 15

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 10$ 이고,

$$a_{n+1} = n + 1 + \frac{(n-1)!}{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정의 일부이다.

모든 자연수 n 에 대하여

$$a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n \times (n+1) + (n-1)!$$

이다. $b_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!}$ 이라 하면, $b_1 = 1$ 이고

$$b_{n+1} = b_n + \boxed{(가)}$$

이다. 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하면

$$b_n = \boxed{(나)} \text{ 이므로 } \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!} = \boxed{(나)} \text{ 이다.}$$

⋮

따라서 $a_1 = 10$ 이고, $a_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{2n-3} \quad (n \geq 2)$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$ 이라 할 때, $f(13) \times g(7)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{70}$ ② $\frac{1}{77}$ ③ $\frac{1}{84}$ ④ $\frac{1}{91}$ ⑤ $\frac{1}{98}$

2 수학적 귀납법

유형 1 수학적 귀납법 - 등식의 증명

569 ●○○○○

2013(A) 9월/평가원 12

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 3$ 이고

$$n a_{n+1} - 2n a_n + \frac{n+2}{n+1} = 0 \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 이

$$a_n = 2^n + \frac{1}{n} \quad \cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) $= a_1 = 3$, (우변) $= 2^1 + \frac{1}{1} = 3$ 이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$$a_k = 2^k + \frac{1}{k} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} k a_{k+1} &= 2k a_k - \frac{k+2}{k+1} \\ &= \boxed{(가)} - \frac{k+2}{k+1} \\ &= k 2^{k+1} + \boxed{(나)} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $a_{k+1} = 2^{k+1} + \frac{1}{k+1}$ 이므로

$n = k+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = 2^n + \frac{1}{n} \text{ 이다.}$$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라 할 때, $f(3) \times g(4)$ 의 값은? [3점]

- ① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

570 ●●○○○

2004(나) 9월/평가원 16

다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1 \\ = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = 1 이므로 주어진 식은 성립한다.(ii) $n = k$ 일 때 성립한다고 가정하면

$$1 \cdot k + 2 \cdot (k-1) + 3 \cdot (k-2) + \cdots + k \cdot 1 \\ = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$

이다. $n = k+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$1 \cdot (k+1) + 2 \cdot k + 3 \cdot (k-1) + \cdots + (k+1) \cdot 1 \\ = 1 \cdot k + 2 \cdot (k-1) + 3 \cdot (k-2) + \cdots + k \cdot 1 \\ + (1+2+3+\cdots+k) + \boxed{\text{(가)}} \\ = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \boxed{\text{(나)}} \\ = \boxed{\text{(다)}}$$

그러므로 $n = k+1$ 일 때도 성립한다.따라서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	k	$\frac{k(k+1)}{2}$	$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$
②	k	$\frac{k(k+3)}{2}$	$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$
③	k	$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$	$\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$
④	$k+1$	$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$	$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$
⑤	$k+1$	$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$	$\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$

571 ●●○○○

2009(가) 수능 10

수열 $\{a_n\}$ 이

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ (n+1)(n+2)a_{n+1} = n^2 a_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

일 때, 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{n}{n+1} \quad \cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

$$(1) \quad n = 1 \text{ 일 때, (좌변)} = \frac{1}{2},$$

$$(\text{우변}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } (*) \text{이 성립한다.}$$

(2) $n = m$ 일 때, $(*)$ 이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} \text{ 이다.}$$

 $n = m+1$ 일 때, $(*)$ 이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} a_k &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + a_{m+1} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \boxed{\text{(가)}} a_m \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} \\ &\quad + \frac{m^2}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{(m-1)^2}{m(m+1)} \cdots \frac{1^2}{2 \cdot 3} a_1 \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \boxed{\text{(나)}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} - \boxed{\text{(다)}} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} - \frac{m+1}{m+2} \end{aligned}$$

그러므로 $n = m+1$ 일 때도 $(*)$ 이 성립한다.따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $(*)$ 이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{m}{(m+1)(m+2)}$	$\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$	$\frac{1}{(m+1)(m+2)^2}$
②	$\frac{m}{(m+1)(m+2)}$	$\frac{m}{(m+1)^2(m+2)}$	$\frac{1}{(m+1)(m+2)}$
③	$\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}$	$\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$	$\frac{1}{(m+1)(m+2)^2}$
④	$\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}$	$\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$	$\frac{1}{(m+1)(m+2)}$
⑤	$\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}$	$\frac{m}{(m+1)^2(m+2)}$	$\frac{1}{(m+1)(m+2)^2}$

572 ●●○○○

2008(나) 수능(홀) 11

다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$(1^2 + 1) \cdot 1! + (2^2 + 1) \cdot 2! + \cdots + (n^2 + 1) \cdot n! = n \cdot (n+1)!$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(1) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 2, (우변) = 2이므로
주어진 등식은 성립한다.

(2) $n = k$ 일 때 성립한다고 가정하면

$$(1^2 + 1) \cdot 1! + (2^2 + 1) \cdot 2! + \cdots + (k^2 + 1) \cdot k! = k \cdot (k+1)!$$

이다. $n = k+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} & (1^2 + 1) \cdot 1! + (2^2 + 1) \cdot 2! + \cdots \\ & + (k^2 + 1) \cdot k! + \{(k+1)^2 + 1\} \cdot (k+1)! \\ & = \boxed{(\text{가})} + \{(k+1)^2 + 1\} \cdot (k+1)! \\ & = \boxed{(\text{나})} \cdot (k+1)! = (k+1) \cdot \boxed{(\text{다})} \end{aligned}$$

그러므로 $n = k+1$ 일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$k \cdot (k+1)!$	$k^2 + 2k + 1$	$(k+1)!$
②	$k \cdot (k+1)!$	$k^2 + 3k + 2$	$(k+2)!$
③	$k \cdot (k+1)!$	$k^2 + 3k + 2$	$(k+1)!$
④	$(k+1) \cdot (k+1)!$	$k^2 + 3k + 2$	$(k+2)!$
⑤	$(k+1) \cdot (k+1)!$	$k^2 + 2k + 1$	$(k+1)!$

573 ●●●○○

2006(나) 수능(홀) 16

다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (5k-3) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = \frac{n(5n+3)}{4}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(1) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 2, (우변) = 2이므로
주어진 등식은 성립한다.

(2) $n = m$ 일 때 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m (5k-3) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{m} \right) = \frac{m(5m+3)}{4}$$

이다. $n = m+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{m+1} (5k-3) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{m+1} \right) \\ & = \sum_{k=1}^m (5k-3) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{m+1} \right) + \frac{\boxed{(\text{가})}}{m+1} \\ & = \sum_{k=1}^m (5k-3) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{\boxed{(\text{나})}} \right) \\ & \quad + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m (5k-3) + \frac{\boxed{(\text{가})}}{m+1} \\ & = \frac{m(5m+3)}{4} + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} \boxed{(\text{다})} \\ & = \frac{(m+1)(5m+8)}{4} \end{aligned}$$

그러므로 $n = m+1$ 일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$5m-3$	m	$5k+2$
②	$5m-3$	$m+1$	$5k+2$
③	$5m+2$	m	$5k-3$
④	$5m+2$	m	$5k+2$
⑤	$5m+2$	$m+1$	$5k-3$

574 ●○○○

2007(가) 6월/평가원 14

다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$\frac{1! + 2! + 3! + \cdots + n!}{(n+1)!} < \frac{2}{n+1}$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

자연수 n 에 대하여

$$a_n = \frac{1! + 2! + 3! + \cdots + n!}{(n+1)!}$$

이러 할 때, $a_n < \frac{2}{n+1}$ 임을 보이면 된다.

$$(1) \ n = 1 \text{일 때, } a_1 = \frac{1!}{2!} = \frac{1}{2} < 1 \text{이므로}$$

주어진 부등식은 성립한다.

$$(2) \ n = k \text{일 때, } a_k < \frac{2}{k+1} \text{라고 가정하면}$$

 $n = k+1$ 일 때,

$$a_{k+1} = \frac{1! + 2! + 3! + \cdots + (k+1)!}{(k+2)!}$$

$$= \boxed{(가)} (1 + a_k)$$

$$< \boxed{(가)} \left(1 + \frac{2}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{k+2} + \boxed{(나)}$$

이다.

$$\text{자연수 } k \text{에 대하여 } \frac{2}{k+1} \leq 1 \text{이므로}$$

$$\boxed{(나)} \leq \frac{1}{k+2} \text{이고 } a_{k+1} < \frac{2}{k+2} \text{이다.}$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 주어진 부등식은 성립한다.그러므로 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)
①	$\frac{1}{k+2}$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$
②	$\frac{1}{k+2}$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)}$
③	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$
④	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)}$
⑤	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{2}{(k+1)^2}$

575 ●○○○

2010(가) 6월/평가원 13

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = \alpha (\alpha \neq 0)$ 이고, 모든 $n (n \geq 2)$ 에 대하여

$$(n-1)a_n + \sum_{m=1}^{n-1} ma_m = 0 \text{을 만족시킨다. 다음은}$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \alpha \ (n \geq 1)$$

임을 수학적귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

$$(1) \ n = 1 \text{일 때, } a_1 = \alpha = \frac{(-1)^{1-1}}{(1-1)!} \alpha \text{이다.}$$

$$(2) \text{ i) } n = 2 \text{일 때, } a_2 + a_1 = 0 \text{이므로}$$

$$a_2 = -a_1 = \frac{(-1)^{2-1}}{(2-1)!} \alpha \text{이다.}$$

따라서 주어진 식이 성립한다.

$$\text{ii) } n = k \ (k \geq 2) \text{일 때 성립한다고 가정하고,}$$

 $n = k+1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$0 = ka_{k+1} + \sum_{m=1}^k ma_m$$

$$= ka_{k+1} + \sum_{m=1}^{k-1} ma_m + ka_k$$

$$= ka_{k+1} + \boxed{(가)} \times a_k + ka_k \text{이므로}$$

$$a_{k+1} = \boxed{(나)} \times a_k = \frac{(-1)^k}{k!} \alpha \text{이다.}$$

$$\text{따라서 모든 자연수 } n \text{에 대하여 } a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \alpha \text{이다.}$$

위의 (가), (나)에 알맞은 식의 곱을 $f(k)$ 라 할 때, $f(10)$ 의 값은? [4점]

$$\textcircled{1} \ \frac{1}{10} \quad \textcircled{2} \ \frac{3}{10} \quad \textcircled{3} \ \frac{1}{2} \quad \textcircled{4} \ \frac{7}{10} \quad \textcircled{5} \ \frac{9}{10}$$

유형 2 수학적 귀납법 - 부등식의 증명

576 ●●○○○

2007(나) 6월/평가원 14

다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$\frac{1! + 2! + 3! + \cdots + n!}{(n+1)!} < \frac{2}{n+1}$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

자연수 n 에 대하여

$$a_n = \frac{1! + 2! + 3! + \cdots + n!}{(n+1)!}$$

이라 할 때, $a_n < \frac{2}{n+1}$ 임을 보이면 된다.

(1) $n = 1$ 일 때, $a_1 = \frac{1!}{2!} = \frac{1}{2} < 1$ 이므로

주어진 부등식은 성립한다.

(2) $n = k$ 일 때, $a_k < \frac{2}{k+1}$ 라고 가정하면

$n = k+1$ 일 때,

$$a_{k+1} = \frac{1! + 2! + 3! + \cdots + (k+1)!}{(k+2)!}$$

$$= \boxed{(가)} (1 + a_k)$$

$$< \boxed{(가)} \left(1 + \frac{2}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{k+2} + \boxed{(나)}$$

이다.

자연수 k 에 대하여 $\frac{2}{k+1} \leq 1$ 이므로

$$\boxed{(나)} \leq \frac{1}{k+2} \text{이고 } a_{k+1} < \frac{2}{k+2} \text{이다.}$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 주어진 부등식은 성립한다.

그러므로 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)
①	$\frac{1}{k+2}$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$
②	$\frac{1}{k+2}$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)}$
③	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$
④	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)}$
⑤	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{2}{(k+1)^2}$

577 ●●○○○

2005(나) 수능(홀) 12

다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

자연수 n 에 대하여

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} \text{이라 할 때,}$$

$a_n > 1$ 임을 보이면 된다.

(1) $n = 1$ 일 때 $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$ 이다.

(2) $n = k$ 일 때 $a_k > 1$ 이라고 가정하면

$n = k+1$ 일 때

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+4}$$

$$= a_k + \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} \right) - \boxed{(가)}$$

한편, $(3k+2)(3k+4) \boxed{(나)} (3k+3)^2$ 이므로

$$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} > \boxed{(다)}$$

그러면 $a_k > 1$ 이므로

$$a_{k+1} > a_k + \left(\frac{1}{3k+3} + \boxed{(다)} \right) - \boxed{(가)} > 1$$

그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 1$ 이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{k+1}$	$>$	$\frac{2}{3k+3}$
②	$\frac{1}{k+1}$	$<$	$\frac{2}{3k+3}$
③	$\frac{1}{k+1}$	$<$	$\frac{4}{3k+3}$
④	$\frac{2}{k+1}$	$>$	$\frac{4}{3k+3}$
⑤	$\frac{2}{k+1}$	$<$	$\frac{1}{k+1}$

