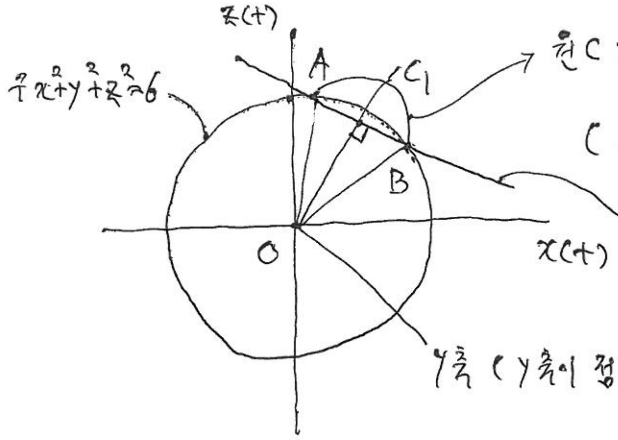
* 2018학년도 대수능 수학 가형 29번.

구 $x^2+y^2+z^2=6$ 과 평면 $x+2z-5=0$ (⇒ 평면 α) 이 만나서 생기는 원 C.



→ 원 C 가 선분 AB로 나타난다. (원 C의 중심을 C_1 이라 하자)

(점A와 점B는 구와 평면의 교점(원C)에서 y좌표가 0인 점)

→ 평면 α ($x+2z-5=0$) : y가 없음 ⇒ 모든 y 가능 (중요)

⇒ (y축과 평행)

y축 (y축이 점으로 나타나는 단면 (zx평면) 이다)

$\overline{OA}=\overline{OB}=R=\sqrt6$. $\overline{OC_1}$ 은 원점과 평면 α 와의 거리이므로 $\frac{|-5|}{\sqrt5}=\sqrt5$.

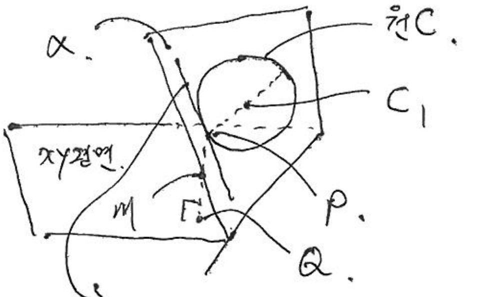
∴ $\overline{C_1A}=\overline{C_1B}=r=1$. (R: 구의 반지름, r: 원 C의 반지름)

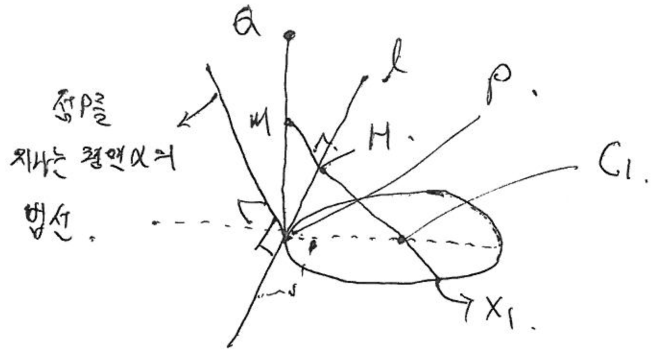
평면 α ($x+2z-5=0$)의 법선벡터의 크기가 $\sqrt5$ 이므로 $\overrightarrow{OC_1}$ 는 바로 위치벡터로 생각할 수 있다.

∴ 점 C_1 (1, 0, 2), 점 P (1, -1, 2), 점 Q (1, -1, 0).

원 위의 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{QX}|^2=|\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{XQ}|^2=4\times\left|\frac{\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{XQ}}{2}\right|^2$ $\left(=4\times\overline{MX_1}^2\right)$

선분 PQ의 중점을 M이라 하면 M(1, -1, 1)이고, 원 위의 점 X에서 M까지의 거리의 최댓값의 4배를 구하라는 문제이다.





평면 α 에서 원C와 점P에서 접하는 직선을 l 이라 하면 / 점M에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하고, 직선 HC_1 과 원 C와의 교점 중 선분 HC_1 에 있지 않은 점을 X_1 이라 하면 (점H, 직선 l 은 모두 평면 α 위에 존재) / 정답 $=4\times\overline{MX_1}^2$ 이다.

$\overline{MP}=1$. $\overline{MH}=\frac{2}{\sqrt5}$ (∵ (1,-1,1)과 $x+2z-5=0$). ∴ $\overline{PH}=\frac{1}{\sqrt5}$. $\overline{PC_1}=r=1$. ∴ $\overline{HC_1}=\frac{\sqrt6}{\sqrt5}$.

∴ $\overline{MX_1}^2=\overline{MH}^2+\overline{HX_1}^2=\frac45+\left(\frac{\sqrt6}{\sqrt5}+1\right)^2=3+\frac{2\sqrt6}{\sqrt5}$. ∴ $4\times\overline{MX_1}^2=12+\frac{8\sqrt6}{\sqrt5}=12+\frac{8\sqrt{30}}{5}$ //