2021학년도 6평 대비 어썸&랑데뷰 모의고사 문제지

제 2 교시

수학 영역(가형)

2021학년도 6월 평가원 모의고사 대비로 평가원 기출 문항들 위주의 REBUILD 문제들로 만들어 보았습니다.
그동안 기출을 얼마나 열심히 풀었고 분석하였는지 확인하실 수 있을 거라 생각됩니다. 시험 치르기 전 꼭 풀어보시고 틀린 문항은 원 문항을 찾아서 다시 복습해 보시길 바랍니다.
좋은 결과 있길 바랍니다!

6월 모평 이후 2021학년도 대비 어썸&랑데뷰 최고난도 모의고사가 발간될 예정입니다.

이투스 정현경
송원학원 황보백

5지선다형

1. $3^{-2}\times 9^2$의 값은? [2점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x(x+2)}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

3. ${}_4P_2+{}_4C_2+{}_2\Pi_4$의 값은? [2점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

4. 두 사건 A, B가 서로 독립사건이고,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

5. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10$일 때, $\sum_{n=1}^{10} (2a_n - 1)$의 값은? [3점]

① 2 ② 6 ③ 10 ④ 20 ⑤ 38

6. 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_8 = 51$일 때, a_3의 값은? [3점]

① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{20}$

7. 실수 x에 대하여 $3^{\frac{x}{2}} = 2$일 때, $2^{\frac{4}{x}}$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 9 ④ 16 ⑤ 27

8. $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^8$의 전개식에서 x^4의 계수는? [3점]

① 106 ② 108 ③ 110 ④ 112 ⑤ 114

9. 오른쪽 표는 어느 단체에서 두 정당 D, J에 대한 선호도를 조사한 것이다. 전체 회원 중에서 임의로 뽑은 한 명이 여성 이었을 때, 이 회원이 정당 D를 선호할 확률은 $\dfrac{1}{6}$이다. 이때 x의 값은? [3점]

	남	여
D	25	x
J	15	15

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

10. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=4, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2b_n}=6$$

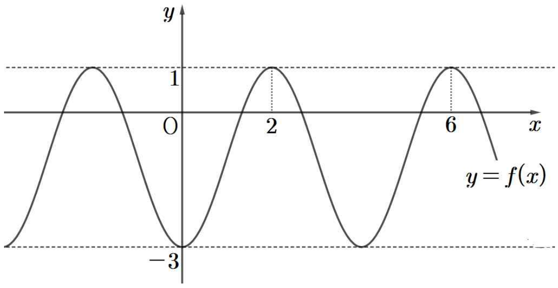
을 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값은? (단, $b_n\neq 0$)[3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

11. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $a \le b$ 또는 $a \le c$일 확률은? [3점]

① $\frac{55}{216}$ ② $\frac{85}{216}$ ③ $\frac{121}{216}$ ④ $\frac{151}{216}$ ⑤ $\frac{161}{216}$

12. 함수 $f(x) = a\cos\frac{\pi(x+b)}{2} - 1$의 그래프가 그림과 같다. 두 양수 a, b에 대하여 $a \times b$가 6의 배수일 때, $a+b$의 최솟값은? [3점]



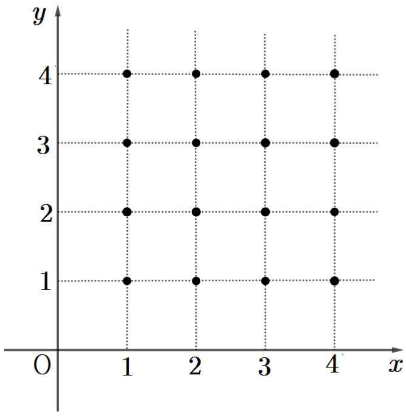
[2019년 11월 실시 고2 수학 나형 27번]-변형

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

13. 다음 조건을 만족시키는 좌표평면 위의 점 (a, b)중에서 임의로 서로 다른 두 점을 선택할 때, 선택된 두 점 사이의 거리가 1보다 클 확률은? [3점]

(가) a, b는 자연수이다.
(나) $1 \le a \le 4$, $1 \le b \le 4$

① $\frac{31}{40}$ ② $\frac{47}{60}$ ③ $\frac{95}{120}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{97}{120}$



[2020학년 9월 평가원 나형 14번]-변형

14. 자연수 n의 양의 약수의 개수를 $f(n)$이라 하고, 24의 모든 양의 약수를 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_8라 하자.

$\sum_{k=1}^{8}\left\{(-1)^{f(a_k)} \times \log a_k\right\}$의 값은? [4점]

① $\log 2 + \log 3$ ② $2\log 2 + \log 3$
③ $3\log 2 + 5\log 3$ ④ $5\log 2 + 2\log 3$
⑤ $8\log 2 + 4\log 3$

[2020학년도 11월 수능 나형 17번]-변형

15. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)\cos x}{x^2+1}$$

하자. $g'(\pi)=\frac{g(\pi)}{\pi^2+1}$일 때, $\frac{f'(\pi)}{f(\pi)}$의 값은? (단, $f(\pi)\neq 0$) [4점]

① $\frac{2\pi+1}{\pi^2+1}$ ② $\frac{2\pi}{\pi^2+1}$ ③ $\frac{\pi+1}{\pi^2+1}$
④ $\frac{\pi}{\pi^2+1}$ ⑤ $\frac{2}{\pi^2+1}$

[2020학년도 6월 평가원 가형 16번]-변형

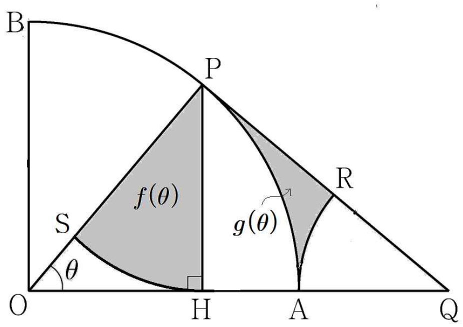
16. 한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. 네 수 a, b, c, d의 곱 $a\times b\times c\times d$가 18일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{42}$ ③ $\frac{1}{48}$ ④ $\frac{1}{54}$ ⑤ $\frac{1}{60}$

[2020학년 6월 평가원 나형 16번]-변형

17. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 호 AB에 접하는 직선과 직선 OA의 교점을 Q라 하자. 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{PH}}$인 원과 선분 PO의 교점을 S라 하고 점 Q를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{QA}}$인 원과 선분 PQ의 교점을 R라 하자. $\angle\mathrm{POA}=\theta$일 때, 부채꼴 PSH의 넓이를 $f(\theta)$, 선분 PR과 호 PA, 호 RA로 둘러싸인 도형의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{\tan\theta-\theta-2g(\theta)}}{f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]

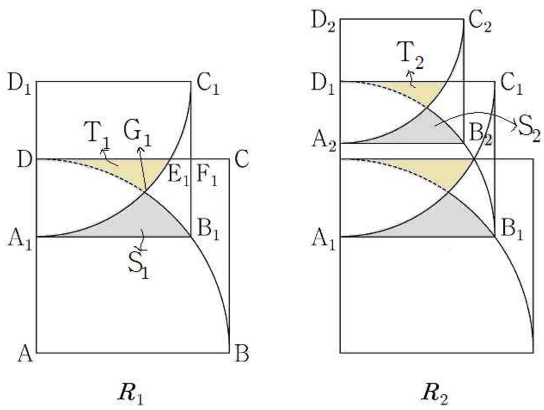


① $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$ ④ $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$

[2020학년도 9월 평가원 가형 20번]-변형

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD에 중심이 A이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 ABD를 그린다. 선분 AD를 3 : 2로 내분하는 점을 $\mathrm{A_1}$, 점 $\mathrm{A_1}$을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 BD 와 만나는 점을 $\mathrm{B_1}$이라 하자. 선분 $\mathrm{A_1B_1}$을 한 변으로 하고 선분 DC와 만나도록 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$을 그린 후, 중심이 $\mathrm{D_1}$이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $\mathrm{D_1A_1C_1}$을 그린다. 선분 DC가 호 $\mathrm{A_1C_1}$, 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$이라 하고, 호 $\mathrm{A_1C_1}$과 호 BD가 만나는 점을 $\mathrm{G_1}$이라 하자. 정사각형 ABCD에서 세 점 A, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{G_1}$을 연결하는 호와 선분으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $\mathrm{S_1}$이라 하고 세 점 D, $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{G_1}$을 연결하는 호와 선분으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $\mathrm{T_1}$이라 하자. $\mathrm{S_1}$과 $\mathrm{T_1}$을 나타내는 부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$에 중심이 $\mathrm{A_1}$이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $\mathrm{A_1B_1D_1}$을 그린다. 선분 $\mathrm{A_1D_1}$을 3 : 2로 내분하는 점을 $\mathrm{A_2}$, 점 $\mathrm{A_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{A_1B_1}$에 평행한 직선이 호 $\mathrm{B_1D_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{B_2}$라 하자. 선분 $\mathrm{A_2B_2}$를 한 변으로 하고 선분 $\mathrm{D_1C_1}$과 만나도록 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 그린 후, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 얻은 도형의 넓이를 $\mathrm{S_2}$, $\mathrm{T_2}$라 하고 $\mathrm{S_2}$와 $\mathrm{T_2}$을 나타내는 부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 두 도형의 넓이 $\mathrm{S_n}$과 $\mathrm{T_n}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{S}_n-\mathrm{T}_n)$의 값을

$\sin\theta=\frac{4}{5}$을 만족하는 θ에 관하여 나타낸 것은? [4점]



① $\frac{625}{18}\theta-\frac{50}{3}-\frac{200}{27}\pi+\frac{25\sqrt{3}}{9}$

② $\frac{625}{18}\theta-\frac{50}{3}-\frac{100}{27}\pi+\frac{50\sqrt{3}}{9}$

③ $\frac{625}{18}\theta-\frac{50}{3}-\frac{200}{27}\pi+\frac{50\sqrt{3}}{9}$

④ $\frac{425}{18}\theta-\frac{25}{3}-\frac{100}{27}\pi+\frac{50\sqrt{3}}{9}$

⑤ $\frac{425}{18}\theta-\frac{25}{3}-\frac{200}{27}\pi+\frac{50\sqrt{3}}{9}$

[2020학년도 11월 수능 나형 18번]-변형

19. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n\text{이 홀수}) \\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수}) \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

으로 정의된다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. $a_1 = 3$이면 $a_{2018} = 1$이다.

ㄴ. $a_1 = 8k+1$이면 $a_1 < a_4$이다.
(단, $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)

ㄷ. $a_2 = 3$이면 $a_1 > a_2$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2017학년도 6월 모평 나형 20번 변형]

20. 자연수 n에 대하여 $3a+3b+c+d=3n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 a_n이라 하자. 다음은 $\sum_{n=1}^{7} a_n$의 값을 구하는 과정이다.

음이 아닌 정수 $a, b,\ c, d$가
$3a+3b+c+d=3n$을 만족시키려면 음이 아닌 정수 k에 대하여 $c+d=3k$이어야 한다.
$c+d=3k$인 경우는 (1) 음이 아닌 정수 $k_1,\ k_2$에 대하여 $c=3k_1,\ d=3k_2$인 경우이거나 (2) 음이 아닌 정수 $k_3,\ k_4$에 대하여 $c=3k_3+1,\ d=3k_4+2$인 경우 또는 (3) 음이 아닌 정수 $k_5,\ k_6$에 대하여
$c=3k_5+2,\ d=3k_6+1$인 경우이다.
(1) $c=3k_1,\ d=3k_2$인 경우 :
$3a+3b+c+d=3n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b, c, d)$개수는
$\boxed{\text{(가)}}$ 이다.
(2) $c=3k_3+1,\ d=3k_4+2$인 경우 :
$3a+3b+c+d=3n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b, c, d)$개수는
$\boxed{\text{(나)}}$ 이다.
(3) $c=3k_5+2,\ d=3k_6+1$인 경우 :
(2)와 같은 경우의 수를 가지므로 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.
(1), (2), (3)에 의하여 $3a+3b+c+d=3n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b, c, d)$의 개수 a_n은

$$a_n = \boxed{\text{(가)}} + 2\times\boxed{\text{(나)}}$$

이다. 자연수 m에 대하여

$$\sum_{n=1}^{m} \boxed{\text{(나)}} = {}_{m+3}\mathrm{C}_4$$

이므로 $\sum_{n=1}^{7} a_n = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n),\ g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r이라 할 때, $f(5)+g(6)+r$의 값은? [4점]

① 793　② 818　③ 843　④ 861　⑤ 893

[2019학년도 6월 모평 나형 20번 변형]

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x)=\ln|f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여

$$G(x)=\ln|g(x)\tan x|$$

라 하자.

$$\lim_{x\to 1}(x-1)F'(x)=2,\ \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{1}{2},\ f(-1)=4$$

일 때, $f(2)+g(3)$의 값은? [4점]

① 29 ② 31 ③ 33 ④ 35 ⑤ 37

[2018학년도 6월 모평 가형 21번]-변형

단답형

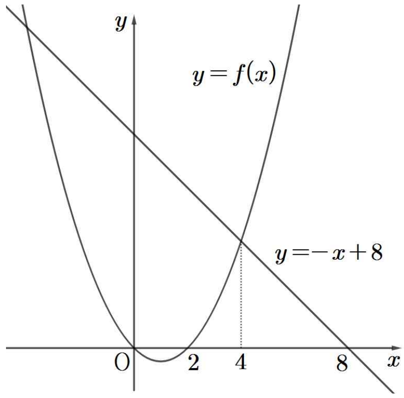
22. 4개의 숫자 1, 2, 3, 4를 중복 사용하여 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수를 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x)=2e^{4x-4}$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

24. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+8$이 그림과 같을 때, 부등식

$$\log_2 f(x)+\log_{\frac{1}{2}}(8-x)\geq 0$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]
(단, $f(0)=f(2)=0$, $f(4)=4$)



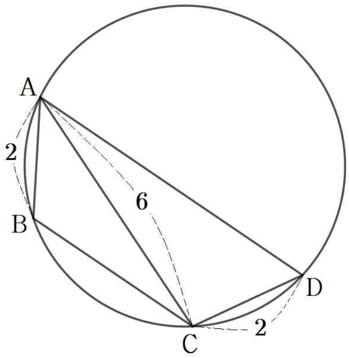
[2020학년 6월 평가원 가형 24번]-변형

25. 함수 $f(x)=e^{2x}(x^2+1)$에 대하여 함수 $g(x)$가 미분가능하고

$$g(x^3+1)=f^{-1}(x)$$

을 만족시킬 때, $36g'(2)$의 값을 구하시오. [3점]
[2020학년도 11월 수능 가형 26번]-변형

26. 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AB}=\overline{CD}=2$, $\overline{AC}=6$일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하자. $\frac{16}{15}S^2$의 값을 구하시오. [4점]

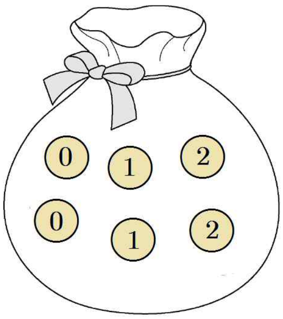


[2019년 11월 실시 고2 수학 가형-27번, 나형 29번]-변형

27. 숫자 0, 0, 1, 1, 2, 2이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 6번 반복할 때, k $(1 \le k \le 6)$번째 꺼낸 공에 적힌 수를 a_k라 하자. 두 자연수 m, n을

$$m = a_1 + a_2 \times 10 + a_3 \times 100$$
$$n = a_4 + a_5 \times 10 + a_6 \times 100$$

이라 할 때, $m \ge n$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

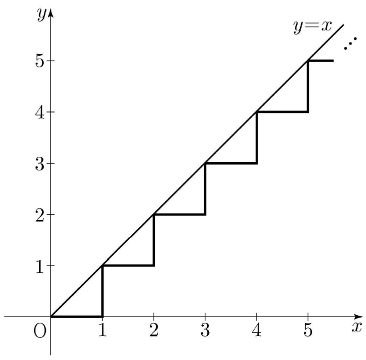


[2020학년 6월 평가원 가형 27번]-변형

28. 좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

> (i) A_0은 원점이다.
> (ii) n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서 점 P가 경로를 따라 $\frac{2n-1}{49}$ 만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 점 A_2와 A_8의 좌표는 각각 $\left(\frac{4}{49},\ 0\right)$, $\left(1,\ \frac{15}{49}\right)$ 이다. 자연수 n에 대하여 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 세 번째 점은 A_m이고 A_m의 x좌표를 a라 하자. $m+a$의 값을 구하시오. [4점]



[2019학년도 9월 모평 나형 29번 변형]

29. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $n=1$, 2, 3일 때, $x_{n+1}-x_n \geq 2$ (나) $x_2 \geq 6$, $x_4 \leq 15$

[2020학년 6월 평가원 나형 29번]-변형

30. 두 양수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} e^x - a & (0 < x \leq 2) \\ \sqrt{x-2}+b & (x > 2) \end{cases}$$

이라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=mx-1$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(m)$이라 할 때, 함수 $g(m)$은 다음 조건을 만족시킨다.

[랑데뷰수학]

$\lim_{m\to\alpha+} g(m) - \lim_{m\to\alpha-} g(m) = \lim_{m\to\beta-} g(m) - \lim_{m\to\beta+} g(m) = 1$을 만족시키는 양수 α와 양수 β가 $(\alpha < \beta)$ 오직 하나씩 존재하고 이 중 β에 대하여 $m=\dfrac{e^2}{2}$이다.

$50\times(2\alpha+a-b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<2$이다.) [4점]

[2022학년도 대수능 예시문항]-미적분30번-변형

※ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.

1	2	3	4	5
③	②	③	⑤	③
6	7	8	9	10
①	③	④	①	④
11	12	13	14	15
⑤	②	④	⑤	①
16	17	18	19	20
④	②	③	⑤	④
21	22	23	24	25
②	340	8	22	6
26	27	28	29	30
80	23	60	350	100

문항	배점	수학1	확률과통계	미적분
1	2	1단원		
2	2			2단원
3	2		1단원	
4	3		2단원	
5	3	4단원		
6	3	4단원		
7	3	1단원		
8	3		1단원	
9	3			2단원
10	3			1단원
11	3		1단원	
12	3	3단원		
13	3		2단원	
14	4	1단원		
15	4			3단원
16	4		2단원	
17	4			2단원
18	4			1단원
19	4	4단원		
20	4		1단원	
21	4			3단원
22	3			1단원
23	3			3단원
24	3	2단원		
25	3			3단원
26	4	3단원		
27	4		2단원	
28	4	4단원		
29	4		1단원	
30	4			3단원
문항수		10	9	11

1) 정답 ③

2) 정답 ②

3) 정답 ③

4) 정답 ⑤

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6}$에서 $\mathrm{P}(B)=x$라 하면

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$$\frac{5}{6}=\frac{1}{6}+x-\frac{1}{6}x$$

$\frac{5}{6}x=\frac{4}{6}$에서 $x=\frac{4}{5}$

5) 정답 ③

$\sum_{n=1}^{10}(2a_n-1)=2\sum_{n=1}^{10}a_n-\sum_{n=1}^{10}1$에서 $\sum_{n=1}^{10}a_n=10$이므로

$=20-10=10$

6) 정답 ①

$S_9=\frac{a_1(2^8-1)}{2-1}=a_1(2^8-1)=255a_1=51$이므로

$a_1=\frac{51}{255}=\frac{1}{5}$

따라서 $a_3=\frac{1}{5}\times 2^2=\frac{4}{5}$

7) 정답 ③

$3^{\frac{x}{2}}=2$

$2^{\frac{4}{x}}=3^{\frac{x}{2}\times\frac{4}{x}}=3^2=9$

8) 정답 ④

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$\left(x-\frac{2}{x}\right)^8$의 전개식의 일반항은

${}_8\mathrm{C}_r x^{8-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r={}_8\mathrm{C}_r(-2)^r x^{8-2r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$

이때, $8-2r=4$에서

$r=2$

따라서 x^4의 계수는

${}_8\mathrm{C}_2(-2)^2=\frac{8\times 7}{2\times 1}\times 4=112$

9) 정답 ①

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

단체의 전체 회원 수를 a, 임의로 뽑은 한 명이 정당 D를 선호하는 사건을 S, 여자 회원인 사건을 F라 하면

$P(S\cap F)=\frac{x}{a}$, $P(F)=\frac{x+15}{a}$

$\therefore\ P(S|F)=\frac{P(S\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{x}{a}}{\frac{x+15}{a}}=\frac{x}{x+15}$

따라서 $\frac{x}{x+15}=\frac{1}{6}$ 이므로 $6x=x+15$

$\therefore\ x=3$

10) 정답 ④

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}\times\frac{3n+1}{2b_n}\right)=24$

$\frac{a_n}{n}\times\frac{3n+1}{2b_n}=c_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}c_n=24$

$\frac{a_n}{b_n}=c_n\times\frac{2n}{3n+1}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(c_n\times\frac{2n}{3n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}c_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}$

$=24\times\frac{2}{3}=16$

11) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

여사건의 확률을 이용하자.

$a\le b$ 또는 $a\le c$의 여사건은 $a>b$ 이고 $a>c$의 경우의 수를 구해보면

$a=1$일 때, 0가지

$a=2$일 때, b, c 각 1가지 ⇨ $1\times 1=1$

$a=3$일 때, b, c 각 2가지 ⇨ $2\times 2=4$

$a=4$일 때, b, c 각 3가지 ⇨ $3\times 3=9$

$a=5$일 때, b, c 각 4가지 ⇨ $4\times 4=16$

$a=6$일 때, b, c 각 5가지 ⇨ $5\times 5=25$

따라서

$1-\frac{1+4+9+16+25}{216}=\frac{161}{216}$

12) 정답 ②

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

함수 $f(x)=a\cos\frac{\pi(x+b)}{2}-1$에서

최댓값은 $a-1=1$이고 최솟값은 $-a-1=-3$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=2\cos\frac{\pi(x+b)}{2}-1$에서

$(2,1)$를 지나므로 대입하면

$f(2)=2\cos\frac{\pi(2+b)}{2}-1=1$

$\cos\frac{\pi(2+b)}{2}=1$

n이 정수 일 때, $\cos 2n\pi=1$에서 b가 양수이므로 $n=1$일 때, 양수 b의 최솟값은 2이다.

그런데 $a\times b$가 6의 배수이므로 b의 최솟값은 6이다.

$a+b$의 최솟값은 8

13) 정답 ④

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

전체 경우의 수 ${}_{16}C_2=\frac{16\times15}{2\times1}=120$

한 점을 선택했을 때, 그 점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 그리자.

원 위의 점에 포함되는 점의 개수를 센 뒤 전체 경우의 수에서 제외하면 선택된 두 점 사이의 거리는 1보다 커지게 된다.

예를 들어 $(1,1)$이 원의 중심일 때, $(2,1)$과 $(1,2)$는 $(1,1)$과 거리가 1인 점이다.

(i) $y=1$일 때, $2+3+3+2=10$

(ii) $y=2$일 때, $3+4+4+3=14$

(iii) $y=3$일 때, $3+4+4+3=14$

(iv) $y=4$일 때, $2+3+3+2=10$

거리가 1인 두 점을 선택하는 경우의 수는 48가지다.

그런데 $(1,1)$이 중심일 때, $(1,2)$가 선택되고 $(1,2)$가 중심일 때, $(1,1)$가 선택되므로 두 번씩 중복된다. 제외되는 경우의 수는 24이다.

따라서

$1-\frac{24}{120}=\frac{4}{5}$

14) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$24=2^3\times3$이고 모든 양의 약수를 크기가 작은 순으로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_8라 하자.

k	a_k	$f(a_k)$
1	$a_1=1$	1
2	$a_2=2$	2
3	$a_3=3$	2
4	$a_4=4$	3
5	$a_5=6$	4
6	$a_6=8$	4
7	$a_7=12$	6
8	$a_8=24$	8

$\sum_{k=1}^{8}\left\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\right\}$

$=0+\log2+\log3-\log4+\log6$
$\quad+\log8+\log12+\log24$

$=\log\left(\frac{2\times3\times6\times8\times12\times24}{4}\right)$

$=8\log2+4\log3$

15) 정답 ①

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$g(x)=\frac{f(x)\cos x}{x^2+1}$의 양변에 ln을 취하면

$\ln g(x)=\ln f(x)+\ln\cos x-\ln(x^2+1)$ 양변을 미분하면

$\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}-\tan x-\frac{2x}{x^2+1}$ 양변에 π를 대입하면

$\frac{g'(\pi)}{g(\pi)}=\frac{1}{\pi^2+1}$이므로

$\frac{1}{\pi^2+1}=\frac{f'(\pi)}{f(\pi)}-0-\frac{2\pi}{\pi^2+1}$

따라서 $\frac{f'(\pi)}{f(\pi)}=\frac{2\pi+1}{\pi^2+1}$

[다른 풀이]

$g(\pi)=-\frac{f(\pi)}{\pi^2+1}$이므로 $g'(\pi)=-\frac{f(\pi)}{(\pi^2+1)^2}$

$g'(x)=\frac{\{f'(x)\cos x-f(x)\sin x\}(x^2+1)-2xf(x)\cos x}{(x^2+1)^2}$에서

$g'(\pi)=\frac{-f'(\pi)(\pi^2+1)+2\pi f(\pi)}{(\pi^2+1)^2}=-\frac{f(\pi)}{(\pi^2+1)^2}$

따라서 $-f'(\pi)(\pi^2+1)+2\pi f(\pi)=-f(\pi)$

$(2\pi+1)f(\pi)=f'(\pi)(\pi^2+1)$

따라서 $\frac{f'(\pi)}{f(\pi)}=\frac{2\pi+1}{\pi^2+1}$

16) 정답 ④

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$18=2\times3^2$이다.

한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d를 순서쌍으로 나타내면 (a, b, c, d)이므로 18이 나올 수 있는 경우는 다음과 같다.

$(1, 1, 3, 6)$, $(1, 2, 3, 3)$

으로 나올 수 있는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}\times 2 = 24$

모든 경우의 수는 6^4이므로

구하고자 하는 확률은 $\frac{24}{6^4} = \frac{4}{6^3} = \frac{1}{54}$

17) 정답 ②

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

삼각형 OHP에서 $\overline{PH} = \sin\theta$,

$\angle\mathrm{OPH} = \frac{\pi}{2} - \theta$이므로 $f(\theta) = \frac{1}{2}\sin^2\theta\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$이다.

삼각형 OPQ에서 $\overline{PQ} = \tan\theta$, $\overline{OQ} = \sec\theta$,

$\angle\mathrm{OQP} = \frac{\pi}{2} - \theta$, $\overline{QA} = \sec\theta - 1$이므로

직각삼각형 $\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\times 1\times\tan\theta$

부채꼴 OAP의 넓이$= \frac{1}{2}\times 1^2\times\theta$

부채꼴 OAR의 넓이$= \frac{1}{2}(\sec\theta - 1)^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$g(\theta)$=직각삼각형 OPQ−부채꼴 OAP

−부채꼴 QAR이므로

$$g(\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}(\sec\theta - 1)^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$2g(\theta) = \tan\theta - \theta - (\sec\theta - 1)^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

따라서 $\tan\theta - \theta - 2g(\theta) = (\sec\theta - 1)^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sqrt{\tan\theta - \theta - 2g(\theta)}}{f(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+}\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \theta}\,(\sec\theta - 1)}{\frac{1}{2}\sin^2\theta\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+}\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \theta}\,(\sec^2\theta - 1)}{\frac{1}{2}\times\sin^2\theta\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\times(\sec\theta + 1)}$$

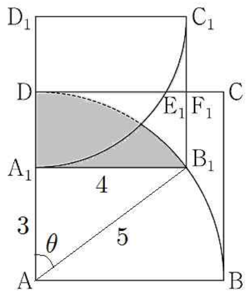
$$= \lim_{\theta\to 0+}\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \theta}\,\tan^2\theta}{\frac{1}{2}\times\sin^2\theta\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\times(\sec\theta + 1)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

18) 정답 ③

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

다음 그림과 같이 도형 $\mathrm{A_1B_1D}$의 넓이에서 도형 $\mathrm{A_1E_1D}$의 넓이를 뺀 부분의 넓이가 $\mathrm{S_1 - T_1}$이다.

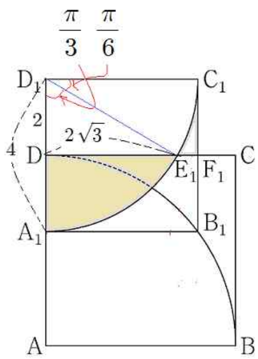


도형 $\mathrm{A_1B_1D}$의 넓이는 부채꼴 $\mathrm{AB_1D}$의 넓이에서 삼각형 $\mathrm{AA_1B_1}$의 넓이를 뺀 것과 같다.

$\angle\mathrm{A_1AB_1} = \theta$이므로 $\left(\because \sin\theta = \frac{4}{5}\right)$

도형 $\mathrm{A_1B_1D}$의 넓이

$= \frac{1}{2}\times 5^2\times\theta - \frac{1}{2}\times 3\times 4 = \frac{25}{2}\theta - 6$



도형 $\mathrm{A_1E_1D}$의 넓이는 부채꼴 $\mathrm{D_1A_1E_1}$에서 삼각형 $\mathrm{D_1DE_1}$을 뺀 부분과 같다.

$\angle\mathrm{E_1D_1D} = \frac{\pi}{3}$이므로

도형 $\mathrm{A_1E_1D}$의 넓이

$= \frac{1}{2}\times 4^2\times\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3} = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$

따라서

$\mathrm{S_1 - T_1} = \frac{25}{2}\theta - 6 - \frac{8}{3}\pi + 2\sqrt{3}$

한편, 정사각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$의 한 변의 길이는 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$

의 한 변의 길이의 $\frac{4}{5}$이므로 공비는 $\frac{16}{25}$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{S}_n-\mathrm{T}_n)=\frac{\frac{25}{2}\theta-6-\frac{8}{3}\pi+2\sqrt{3}}{1-\frac{16}{25}}$$

$$=\frac{25}{9}\left(\frac{25}{2}\theta-6-\frac{8}{3}\pi+2\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{625}{18}\theta-\frac{50}{3}-\frac{200}{27}\pi+\frac{50\sqrt{3}}{9}$$

19) 정답 ⑤
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

ㄱ. $a_1=3$을 주어진 점화식에 대입하면
$a_2=5,\ a_3=8,\ a_4=4,\ \ a_5=2,\ a_6=1,\ a_7=2,\ a_8=1,\ \cdots$
즉, 다섯 번째 항부터 2와 1이 반복됨을 알 수 있다.
$\therefore\ a_{2018}=1$ (참)
ㄴ. $a_1=8k+1$이면
$a_2=\frac{3(8k+1)+1}{2}=12k+2$
$a_3=\frac{12k+2}{2}=6k+1$
$a_4=\frac{3(6k+1)+1}{2}=\frac{18k+4}{2}=9k+2$
$a_1<a_4$ (참)
ㄷ. a_1이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 생각해본다.
(i) a_1이 홀수일 때, $\frac{3a_1+1}{2}=3$에서 $a_1=\frac{5}{3}$이므로 모순이다.
(ii) a_1이 짝수일 때, $\frac{a_1}{2}=3$에서 $a_1=6$
(i),(ii)에서 $a_1=6$ 이므로 $a_1>a_2$이다. (참)
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

20) 정답 ④
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

(1) $c=3k_1$, $d=3k_2$을 $3a+3b+c+d=3n$에 대입하면,
$3a+3b+3k_1+3k_2=3n$에서 $a+b+k_1+k_2=n$를 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_n$이다.

(가) ${}_4\mathrm{H}_n$ 에서 $f(5)={}_4\mathrm{H}_5={}_8\mathrm{C}_3=56$ ⋯ ①

(2) $c=3k_3+1$, $d=3k_4+2$을 $3a+3b+c+d=3n$에 대입하면,
$3a+3b+3k_3+3k_4=3n-3$에서
$a+b+k_3+k_4=n-1$를 만족하는
음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_{n-1}$이다.

(나) ${}_4\mathrm{H}_{n-1}$ 에서 $g(6)={}_4\mathrm{H}_5={}_8\mathrm{C}_3=56$⋯ ②

(3) $c=3k_5+2$, $d=3k_6+1$을 $3a+3b+c+d=3n$에 대입하면,
$3a+3b+3k_5+3k_6=3n-3$에서
$a+b+k_5+k_5=n-1$를 만족하는
음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_{n-1}$이다.

$$\sum_{n=1}^{m}(\text{나})=\sum_{n=1}^{m}{}_4\mathrm{H}_{n-1}$$
$$={}_3\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{m+2}\mathrm{C}_3={}_{m+3}\mathrm{C}_4$$
에서
$$\sum_{n=1}^{m}(\text{가})=\sum_{n=1}^{m}{}_4\mathrm{H}_n$$
$$={}_4\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{m+3}\mathrm{C}_3={}_{m+4}\mathrm{C}_4-1$$
임을 알 수 있다.
따라서, $\sum_{n=1}^{7}a_n={}_{11}\mathrm{C}_4-1+2\times{}_{10}\mathrm{C}_4=749$이다.
$r=749$ ⋯ ③
①, ②, ③에 의해
$f(5)+g(6)+r=56+56+749=861$

21) 정답 ②
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

[역방향 로피탈 정리를 이용한 풀이] ⇨ 랑데뷰세미나 참고
$$\lim_{x\to1}(x-1)F'(x)=\lim_{x\to1}\frac{F'(x)}{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1}\frac{F(x)+C_1}{\ln|x-1|+C_2}$$
$\frac{\infty}{\infty}$꼴 이므로 C_1, C_2는 무시할 수 있는 상수
따라서 $\lim_{x\to1}\frac{F(x)}{\ln|x-1|}=\lim_{x\to1}\frac{\ln|f(x)|}{\ln|x-1|}=2$ 이고
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 이므로
$f(x)=(x-1)^2Q(x)$이다. 또한
$$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln|(x-1)^2Q(x)|}{\ln|g(x)\tan x|}$$
$\frac{\infty}{\infty}$꼴 이므로 $Q(0)=0$ $\therefore f(x)=x(x-1)^2(x+k)$
또한 $f(-1)=4$에서 $k=0$
$x\to0$일 때 $\tan x\fallingdotseq x$ 이므로 $\therefore f(x)=(x-1)^2x^2$
$$\lim_{x\to0}\frac{2\ln|x-1|+2\ln|x|}{\ln|g(x)\times x|}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\ln|x|}{\ln|x|+\ln|g(x)|}=\frac{1}{2}\text{이다.}$$
한편 $\frac{1}{2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x^2|}{\ln|x^4|}$에서 $k=0,\ g(x)=x^3$
$\therefore f(x)=(x-1)^2x^2,\ g(x)=x^3$
$\therefore f(2)+g(3)=31$
[다른 풀이]
$F(x)=\ln|f(x)|$를 미분하면 $F'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$

$\lim_{x\to1}(x-1)F'(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f'(x)}{f(x)}=2$……㉠에서
$f(1)=0$이다. 따라서 $f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다.
① $f(x)=(x-1)Q(x)$
라 하면 $f'(x)=Q(x)+(x-1)Q'(x)$이므로
$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{Q(x)+(x-1)Q'(x)\}}{(x-1)Q(x)}=1\neq2$
② $f(x)=(x-1)^k h(x)$ $(k\geq2$인 자연수$)$라 하면
$f'(x)=k(x-1)^{k-1}h(x)+(x-1)^k h'(x)$ 이므로
$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{k(x-1)^{k-1}h(x)+(x-1)^k h'(x)\}}{(x-1)^k h(x)}$
$=\lim_{x\to1}\frac{k(x-1)^k h(x)+(x-1)^{k+1}h'(x)}{(x-1)^k h(x)}=k$ $\therefore$ $k=2$

①,②에서 $f(x)=(x-1)^2Q(x)$의 꼴이 된다.
$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)\times g(x)\tan x}{f(x)\{g'(x)\tan x+g(x)\sec^2 x\}}$
$=\frac{1}{2}$…… ㉡ 에서 $x\to0$일 때 (분자) $\to0$이므로
(분모) $\to0$이어야 한다. 따라서 $f(0)=0$이다. $\therefore$
$f(x)=(x-1)^2x(x+l)$
또한 $f(-1)=4$이므로
$f(-1)=4\times(-1)\times(-1+l)=4$에서 $l=0$
$\therefore f(x)=(x-1)^2x^2$
따라서 $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{4x-2}{x(x-1)}$
위의 식을 ㉡에 대입하면
$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{(4x-2)g(x)\tan x}{x(x-1)\{g'(x)\tan x+g(x)\sec^2 x\}}$
$=\lim_{x\to0}\frac{4x-1}{x-1}\cdot\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{g(x)}{g'(x)\tan x+g(x)\sec^2 x}$
$=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore$ $g(0)=0$
$g(x)=xk(x)$라 하면 $g'(x)=k(x)+xk'(x)$이므로
$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{4x-2}{x-1}\cdot\frac{\tan x}{x}$
$\cdot\frac{xk(x)}{\{k(x)+xk'(x)\}\tan x+xk(x)\sec^2 x}$
$=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore$ $k(0)=0$
따라서 $g(x)=x^m p(x)$ $(m\geq2$인 자연수$)$라 하면
$g'(x)=mx^{m-1}p(x)+x^m p'(x)$이므로
$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{4x-2}{x-1}\cdot\frac{\tan x}{x}$
$\cdot\frac{x^m p(x)}{\{mx^{m-1}p(x)+x^m p'(x)\}\tan x+x^m p(x)\sec^2 x}$
$=\lim_{x\to0}\frac{4x-2}{x-1}\cdot\frac{\sin x}{x}$
$\cdot\frac{x^{m-1}p(x)}{\{mx^{m-1}p(x)+x^m p'(x)\}\frac{\tan x}{x}+x^{m-1}p(x)\sec^2 x}$
$=2\cdot1\cdot\frac{1}{m+1}=\frac{2}{m+1}=\frac{1}{2}$ 이므로 $m=3$

$\therefore f(x)=(x-1)^2x^2,\ g(x)=x^3$ $\qquad\therefore f(2)+g(3)=31$

22) 정답 340
4개의 숫자 1, 2, 3, 4를 중복 사용하여 만들 수 있는 n자리의 자연수의 개수는 서로 다른 4개에서 n개를 택하는 중복순열의 수이므로
${}_4\Pi_n=4^n$
따라서 구하는 네 자리 이하의 자연수의 개수는
$4^1+4^2+4^3+4^4=4+16+64+256$
$=340$

23) 정답 8
$f(x)=2e^{4x-4}\to f'(x)=8e^{4x-4}\to f'(1)=8$

24) 정답 22
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

로그가 정의되기 위한 x범위는
$f(x)>0$ ⇨ $x<0,\ x>2$
$8-x>0$ ⇨ $x<8$
따라서 $x<0$ 또는 $2<x<8$…㉠

$\log_2 f(x)+\log_{\frac{1}{2}}(8-x)$
$=\log_2 f(x)-\log_2(8-x)$
$=\log_2\frac{f(x)}{8-x}\geq0$
따라서 $\frac{f(x)}{8-x}\geq1$⇨$\frac{f(x)}{x-8}\leq1$
㉠에서 $f(x)\geq x-8$
따라서 만족하는 자연수 x는 4, 5, 6, 7
$4+5+6+7=22$

25) 정답 6
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$g(x^3+1)=f^{-1}(x)$의 양변에 $x=f(t)$를 대입하면
$g(\{f(t)\}^3+1)=f^{-1}(f(t))=t$ 양변 미분하면
$g'(\{f(t)\}^3+1)3\{f(t)\}^2f'(t)=1$
$f(0)=1$이므로 양변에 $t=0$을 대입하면
$g'(2)\times3\{f(0)\}^2f'(0)=1$
$f'(x)=e^{2x}(2x+2x^2+2)$에서 $f'(0)=2$
따라서 $g'(2)\times3\times1^2\times2=1$
$g'(2)=\frac{1}{6}$
$36g'(2)=6$
[다른 풀이]-대구 Sumath 장정보t

$$g'(x^3+1)\times 3x^2=(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$$3g'(2)=\frac{1}{f'(f^{-1}(1))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}$$

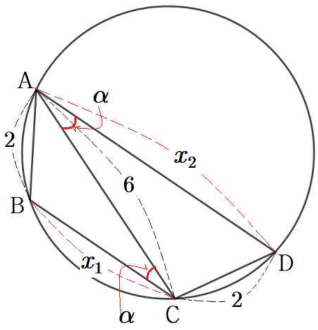
따라서 $g'(2)=\frac{1}{6}$

26) 정답 81

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

삼각형 ABC에서 $\angle ACB=\alpha$라 할 때,

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로 $\frac{\overline{AB}}{\sin\alpha}=8$



$\sin\alpha=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 $\angle ACB=\angle CAD=\alpha$이고

$\overline{BC}=x_1$, $\overline{AD}=x_2$라 하면

$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\times x_1\times 6\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times x_2\times 6\times\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{4}(x_1+x_2)\cdots$㉠

한편, 삼각형 ABC에 코사인 법칙을 적용하면

$2^2=x_1^2+6^2-2\times 6\times x_1\times\frac{\sqrt{15}}{4}$ 정리하면

$x_1^2-3\sqrt{15}x_1+32=0$

마찬가지로 삼각형 ACD에 코사인 법칙을 적용하면

$x_2^2-3\sqrt{15}x_2+32=0$

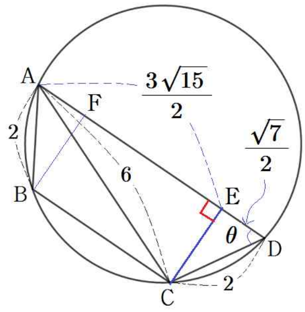
따라서 x_1과 x_2는 이차방정식 $x^2-3\sqrt{15}x+32=0$의 두 근이므로

$x_1+x_2=3\sqrt{15}$

㉠에서 $S=\frac{3}{4}\times 3\sqrt{15}=\frac{9}{4}\sqrt{15}$

$\therefore\ \frac{16}{15}S^2=\frac{16}{15}\times\frac{81\times 15}{16}=81$

[다른 풀이]-대구 Sumath 장정보t



사각형의 꼭짓점 C, D에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고 $\angle CDE=\theta$라 하자. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로

$\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=8$에서 $\sin\theta=\frac{3}{4}$이다.

따라서 $\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

따라서 직각삼각형 DEC에서 $\overline{DE}=\frac{\sqrt{7}}{2}$이고,

$\overline{CE}=\frac{3}{2}$이다.

직각삼각형 CEA에서 $\overline{AE}=\sqrt{6^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{15}}{2}$

한편, $\triangle AFB\equiv\triangle DEC$이므로 $\overline{AF}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

따라서 $\overline{BC}=\overline{EF}=\frac{3\sqrt{15}-\sqrt{7}}{2}$

사각형 ABCD는 등변 사다리꼴이므로

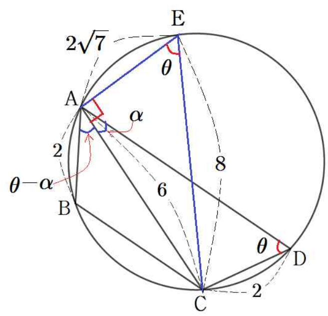
$S=\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{CE}$

$=\frac{1}{2}\times\left\{\frac{3\sqrt{15}+\sqrt{7}}{2}+\frac{3\sqrt{15}-\sqrt{7}}{2}\right\}\times\frac{3}{2}$

$=\frac{9\sqrt{15}}{4}$

$\therefore\ \frac{16}{15}S^2=\frac{16}{15}\times\frac{81\times 15}{16}=81$

[다른 풀이]-대구 Sumath 서영만t-덧셈정리 이용



그림과 같이 원의 중심과 사각형의 꼭짓점 C를 지나는 직선이 원과 만나는 점을 E라 하자.

$\angle \mathrm{EAC}=\frac{\pi}{2}$이고 $\overline{\mathrm{CE}}=8$, $\overline{\mathrm{AC}}=6$이므로 $\overline{\mathrm{AE}}=2\sqrt{7}$이다.

$\angle \mathrm{AEC}=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\sin\theta=\frac{3}{4}$이고

$\angle \mathrm{CAD}=\alpha$라 하면 $\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\alpha}=8$에서 $\sin\alpha=\frac{1}{4}$

따라서 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$이다.

삼각함수 덧셈정리에서

$\sin(\theta-\alpha)=\frac{3\sqrt{15}-\sqrt{7}}{16}$

$\sin(\theta+\alpha)=\frac{3\sqrt{15}+\sqrt{7}}{16}$ 이 성립한다.

따라서

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}\\&=\frac{1}{2}\times2\times6\times\sin(\theta-\alpha)+\frac{1}{2}\times2\times6\times\sin\{\pi-(\theta+\alpha)\}\\&=6\{\sin(\theta-\alpha)+\sin(\theta+\alpha)\}\\&=6\times\frac{6\sqrt{15}}{16}=\frac{9}{4}\sqrt{15}\end{aligned}$$

$\therefore\ \frac{16}{15}S^2=\frac{16}{15}\times\frac{81\times15}{16}=81$

27) 정답 23

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

두 자연수 m, n이 나타내는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!2!2!}=90$이고

$m>n$, $m=n$, $m<n$인 경우만 나타난다.

$m=n$인 경우는 $3!=6$가지이고

$m>n$과 $m<n$은 같은 경우의 수가 나타나므로 각각 $\frac{90-6}{2}=42$이다.

따라서 $m\ge n$의 경우의 수는 $42+6=48$

$\frac{48}{90}=\frac{8}{15}$

$p=15$, $q=8$이므로 $p+q=23$

28) 정답 60

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

계단 모양과 $y=x$의 교점은 x, y값이 자연수이고 →로 움직인 방향의 횟수와 ↑로 움직인 방향의 횟수가 같아야 하므로 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점은 $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{49}$의 값이 짝수일 때 나타난다.

$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{49}=\frac{n^2}{49}=\left(\frac{n}{7}\right)^2$

$n=14$일 때 $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{25}=4$이므로 →:2회, ↑:2회 로 볼 때 $(2, 2)$

$n=28$일 때 $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{25}=16$이므로 →:8회, ↑:8회 로 볼 때 $(8, 8)$

$n=42$일 때 $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{25}=36$이므로 →:18회, ↑:18회 로 볼 때 $(18, 18)$

$\mathrm{A}_{42}=(18,\ 18)$이다. 따라서 $a=18$이다.

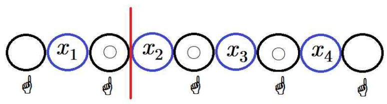
따라서 $m=42$, $a=18$이므로 $m+a=60$

29) 정답 350

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

16개의 공을 일렬로 나열할 때

0이상 15이하의 정수 16개를 다음 그림과 같이 원 안에 넣는 경우를 생각하자.



파란색 원에 들어가는 공에 순서대로 x_1, x_2, x_3, x_4를 써 넣고 파란색 공 사이의 원에 각각 1개씩의 공을 넣으면 16개의 공 중 남은 공이 9개 남는다.

남은 9개의 공을 ☝ 표시된 5곳에 넣고 왼쪽부터 0부터 15까지 써 넣으면 문제에서 요구하는 상황이 된다. 그런데, $x_2\ge6$이므로 빨간색 사선을 기준으로 왼쪽 두 개의 ☝에 3개 이상의 공이 들어가야 한다.

따라서 전체 경우의 수에서 왼쪽 두 곳에 0, 1, 2, 3개가 들어가는 경우를 제외하면 되겠다. (3개가 들어가게 되면 x_2보다 작은 수가 $0, 1, 2, 3, 4$ 가 되고 $x_2=5$가 된다.)

$${}_5H_9-({}_2H_0\times{}_3H_9+{}_2H_1\times{}_3H_8+{}_2H_2\times{}_3H_7+{}_2H_3\times{}_3H_6)$$
$$={}_{13}C_9-(1\times{}_{11}C_2+2\times{}_{10}C_2+3\times{}_9C_2+4\times{}_8C_2)$$
$$={}_{13}C_4-(55+90+108+112)$$
$$=715-365=350$$

[랑데뷰팁]

여사건으로 구하지 않고 바로 계산하면

${}_2H_4\times{}_3H_5+\cdots+{}_2H_9\times{}_3H_0$

즉, $\sum_{n=4}^{9}({}_2H_n\times{}_3H_{9-n})=\frac{1}{2}\sum_{n=4}^{9}(n+1)(11-n)(10-n)=350$(계산기 이용함)

[다른 풀이]

(가)에서 $n=1$이면 $x_1\le x_2-2$

$n=2$이면 $x_2\le x_3-2$

$n=3$이면 $x_3\le x_4-2$

$x_4 \le 15$이므로

$x_4=15$이면 $x_3 \le 13$이므로 $(x_4,\ x_3,\ x_2,\ x_1)$의 순으로

$(15,\ 13,\ 11\ ,\ 0 \to 9)$

$(15,\ 13,\ 10\ ,\ 0 \to 8)$

$(15,\ 13,\ 9\ ,\ 0 \to 7)$

$(15,\ 13,\ 8\ ,\ 0 \to 6)$

$(15,\ 13,\ 7\ ,\ 0 \to 5)$

$(15,\ 13,\ 6\ ,\ 0 \to 4)$

⇨$5+6+7+8+9+10$⇨a

$(15,\ 12,\ 10\ ,\ 0 \to 8)$

$(15,\ 12,\ 9\ ,\ 0 \to 7)$

$(15,\ 12,\ 8\ ,\ 0 \to 6)$

$(15,\ 12,\ 7\ ,\ 0 \to 5)$

$(15,\ 12,\ 6\ ,\ 0 \to 4)$

⇨$5+6+7+8+9$⇨b

$(15,\ 11,\ 9\ ,\ 0 \to 7)$

$(15,\ 11,\ 8\ ,\ 0 \to 6)$

$(15,\ 11,\ 7\ ,\ 0 \to 5)$

$(15,\ 11,\ 6\ ,\ 0 \to 4)$

⇨$5+6+7+8$⇨c

$(15,\ 10,\ 8\ ,\ 0 \to 6)$

$(15,\ 10,\ 7\ ,\ 0 \to 5)$

$(15,\ 10,\ 6\ ,\ 0 \to 4)$

⇨$5+6+7$⇨d

$(15,\ 9,\ 7\ ,\ 0 \to 5)$

$(15,\ 9,\ 6\ ,\ 0 \to 4)$

⇨$5+6$⇨e

$(15,\ 8,\ 6\ ,\ 0 \to 4)$

⇨5⇨f

$x_4=15$일 때는 $a+b+c+d+e+f$

$x_4=14$일 때는 $b+c+d+e+f$

$x_4=13$일 때는 $c+d+e+f$

$x_4=12$일 때는 $d+e+f$

$x_4=11$일 때는 $e+f$

$x_4=10$일 때는 f

이고 $a=45$, $b=35$, $c=26$, $d=18$, $e=11$, $f=5$이다.

모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는 $a+2b+3c+4d+5e+6f$이므로

따라서 $45+70+78+72+55+30=350$

30) 정답 100

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

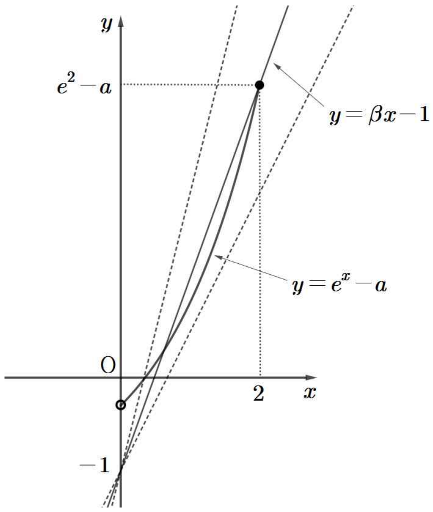
$0<x \le 2$에서 $f(x)=e^x-a$이고 $0<a<2$이므로

$y=mx-1$과 $y=e^x-a$의 교점의 개수는 0, 1, 2가 가능하다.

우선 $m \to \infty$일 때 $g(m)=1$이므로 $\lim\limits_{m\to\beta-} g(m) - \lim\limits_{m\to\beta+} g(m)=1$을 만족하기 위해서는

다음 그림과 같이 $(2,\ e^2-a)$와 $(0,\ -1)$을 잇는 직선의 기울기가 β일 때다.

즉. $\lim\limits_{m\to\beta-} g(m)=2$, $\lim\limits_{m\to\beta+} g(m)=1$



$\beta=\dfrac{e^2}{2}$이므로 $\dfrac{e^2}{2}=\dfrac{e^2-a+1}{2}$에서 $a=1$이다. …㉠

$$f(x)=\begin{cases} e^x-1 & (0<x\le 2) \\ \sqrt{x-2}+b & (x>2) \end{cases}$$

$x>2$에서 곡선 $y=\sqrt{x-2}+b$와 직선 $y=mx-1$의 교점의 개수 변화를 생각해 보자.

$b>0$이므로 $\lim\limits_{m\to 0+} g(m)=1$이다.

또한, $y=\sqrt{x-2}+b$의 $(2,\ b)$를 직선 $y=mx-1$가 지날 때,

$y=mx-1$와 $y=\sqrt{x-2}+b$의 교점의 개수가 1이고 그 때가 $m=\alpha$일 때다.…㉡

$m>\alpha$이면 $y=mx-1$와 $y=\sqrt{x-2}+b$의 교점의 개수가 2가 되고

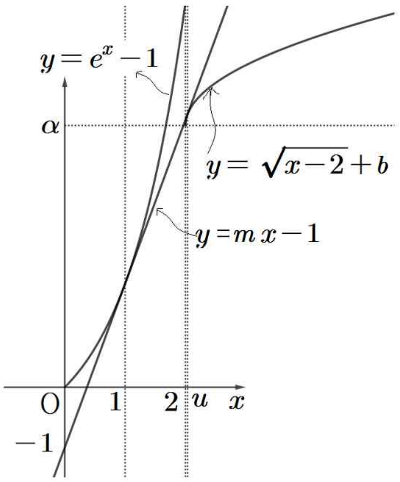
$m<\alpha$일 때까지 $y=mx-1$와 $f(x)=\begin{cases} e^x-1 & (0<x\le 2) \\ \sqrt{x-2}+b & (x>2) \end{cases}$의 개수가 2이어야 한다.

따라서

$y=mx-1$은 $0<x\le 2$에서 $y=e^x-1$과 접할 때, $x>2$에서 $y=\sqrt{x-2}+b$와 동시에 접해야 한다.

$0<x\le 2$의 접점의 좌표를 $(s,\ e^s-1)$라 하면 $y'=e^x$이므로

$\frac{(e^s-1)-(-1)}{s-0}=e^s \Rightarrow \therefore\ s=1$
따라서 접선의 기울기 $m=e$이다.
다음 그림과 같은 상황이다.



$y=ex-1$과 $y=\sqrt{x-2}+b$이 접할 때, b의 값을 구해 보자.

$y=\sqrt{x-2}+b$의 접점의 좌표를 $(u,\ \sqrt{u-2}+b)$이라 하면
$y'=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$에서
$\frac{\sqrt{u-2}+b-(-1)}{u-0}=\frac{1}{2\sqrt{u-2}}=e$
$\frac{1}{2\sqrt{u-2}}=e$에서 $u=2+\frac{1}{4e^2}$이므로

$\frac{\sqrt{u-2}+b+1}{u}=e \Rightarrow \sqrt{2+\frac{1}{4e^2}-2}+b+1=e\left(2+\frac{1}{4e^2}\right)$
$\Rightarrow b+\frac{1}{2e}+1=2e+\frac{1}{4e}$
$\therefore\ b=2e-\frac{1}{4e}-1\ \cdots$ ㉢

㉡에서 $y=mx-1$이 $y=\sqrt{x-2}+2e-\frac{1}{4e}-1$의 $\left(2,\ 2e-\frac{1}{4e}-1\right)$을
지날 때 $m=\alpha$이므로
$2e-\frac{1}{4e}-1=2\alpha-1 \rightarrow 2\alpha=2e-\frac{1}{4e}$이다.$\cdots$㉣

㉠, ㉢, ㉣에서
$50\times(2\alpha+a-b)=50\times(2)=100$
[랑데뷰팁]
함수 $g(m)$의 그래프는 다음과 같다.