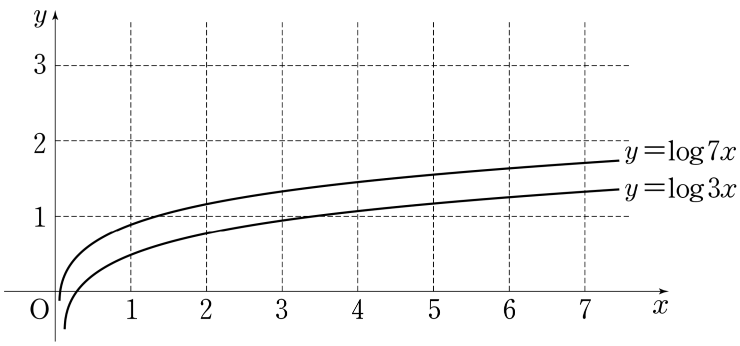
9월 모의고사 문항 분석

30. 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 정사각형 중 두 함수 $y=\log 3x$, $y=\log 7x$ 의 그래프와 모두 만나는 것의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 자연수이고 한 변의 길이가 1이다.
> (나) 꼭짓점의 x좌표는 모두 100 이하이다.



6월 모의고사도 그랬고 2012년 수능도 그랬도 30번 문제는 지수/로그함수와 관련된 추론이 자주 나오고 있다. 각각에서 묻는 것은 모두 다르지만 지수/로그함수의 그래프에 대해서 정확히 이해하고 있어야 하는 것은 공통점이라 할 수 있다. 이 문제는 30번치고는 답을 금방 도출할 수 있는 문제여서 체감난이도는 별로 높지 않았을 것이라 생각되지만, 실제 시험장에서는 시간부족으로 제대로 생각하지 못하는 등의 이유로 실수가 발생할 수 있는 문제이다.

꼼꼼한 문제풀이

발견적 추론 문제라 Warming Up 없이 바로 문제풀이로 들어가도록 하겠다. 발견적 추론이라는 유형 자체가 문제를 한 번 풀고 나면 문제의 신선도가 급락하기 때문에, 30번에서 다루는 내용에 대한 분석보다는 발견적 추론이라는 유형에 대한 일반적인 해법을 위주로 하여 풀이를 하고자 한다.

먼저, 발견적 추론이 무엇인지 아는 것이 좋겠다.

> **발견적 추론 능력**은 나열하기, 세어보기, 관찰 등을 통해 문제해결의 핵심 원리를 발견하는 능력, 유추를 통해 문제해결의 핵심 원리를 발견하는 능력을 의미한다.
> - 복잡한 상황 단순화하기
> - 상황을 단순화하거나 특수화하여 규칙성 찾아보기
> - 체계적인 정리, 열거, 관찰 등을 통하여 유사성을 유추하여 규칙성 찾아보기

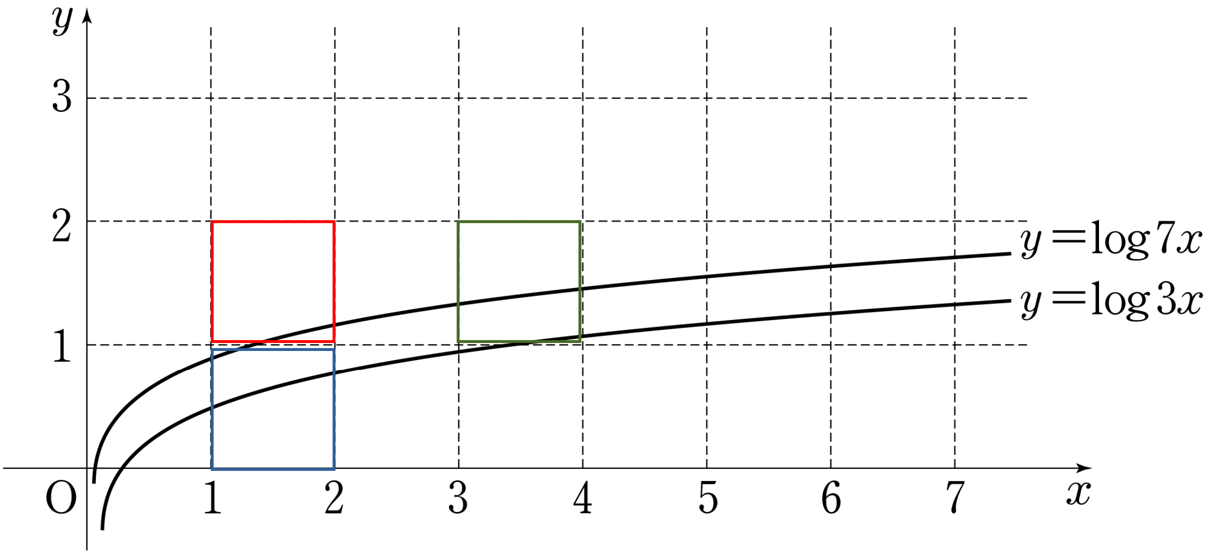
발견적 추론이라는 것은 평가원에서 정의한 용어로서, **귀납적인 방법을 통하여 규칙을 찾고 그것을 통하여 문제를 해결하는 것을 말한다**. 쉽게 말하면 "노가다를 해서 규칙을 찾아내 보라는 것" 이다. 여기서 중요한 것은 무작정 "노가다"만 해서는 안 된다는 점이다. 2012년 수능처럼 30번 한 문제에만 50분을 쓸 수 있는 여유있는 시험이라면 모를까 무작정 노가다만 해서는 답을 구하기는커녕 시간만 날릴 수 있다. 반드시 "규칙"을 찾으면서 접근해야 한다.

발견적 추론 유형은 주로 수열에서 자주 등장한 유형인데, 최근 들어서는 **지수 / 로그함수**로 그 지평이 넓어지고 있다. 이 유형은 문제가 나올 때마다 그때그때 맞는 전략을 세워서 문제를 풀어야 하기 때문에, 일반적인 해법을 만들 수는 없고 다양한 문제풀이를 통하여 적응 훈련을 하는 수밖에 없다.

문제를 읽어 보면서 노가다를 어떻게 시작할지 생각해 보자.

① 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 **정사각형** 중
〈조건〉
(가) **꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 자연수**이고 **한 변의 길이가 1**이다.
(나) **꼭짓점의 x좌표는 모두 100 이하**이다.
② 함수 $y=\log 3x$, $y=\log 7x$ **의 그래프와 모두 만나는 것**의 개수

키워드가 될 만한 단어들에 밑줄을 쳐 놨다. 어떤 문제든 간에 조건을 제대로 읽는 것은 중요하지만, 발견적 추론 유형은 문제를 보자마자 해법을 생각해 내는 것이 아니기 때문에 조건을 더더욱 꼼꼼하게 읽을 필요가 있다.

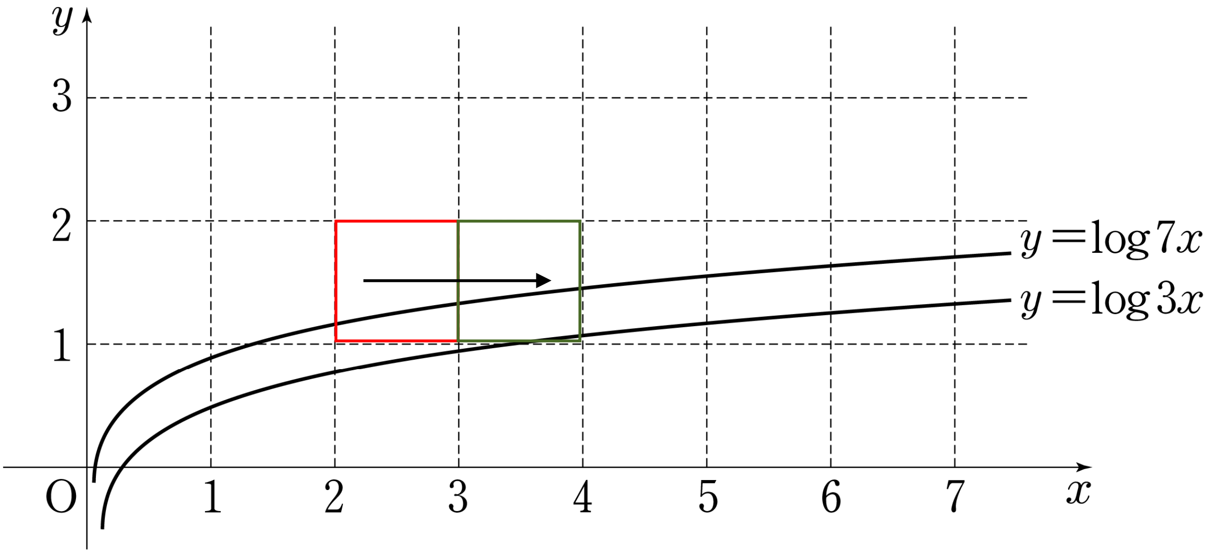


조건을 만족시키는 정사각형을 찾아야 하는데, 정사각형의 꼭짓점의 x좌표는 100 이하라고 했다. 또한 자연수이다. y좌표는 자연수라고만 했다. 그러면 가능한 꼭짓점의 x좌표는 1~100까지의 자연수뿐이다. 또한 y좌표는 1부터 시작해야 할 것이다.

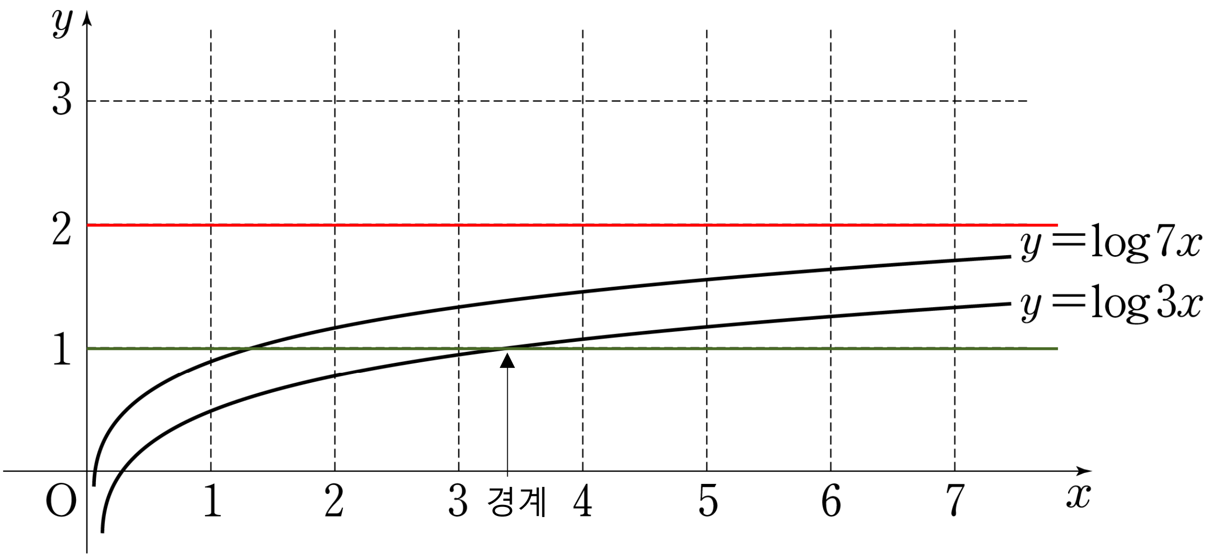
그렇기 때문에 파란색 정사각형은 y좌표가 자연수라는 조건을 만족하지 못하고 있으므로 집계 대상에서 제외된다. 빨간색 정사각형은 꼭짓점의 x, y좌표가 모두 정사각형이라는 조건은 만족시키지만, 두 로그함수의 그래프와 모두 만나고 있지는 않기 때문에 역시 집계 대상에서 제외된다.

발견적 추론이란 이렇게 주어진 조건에 맞는 것들을 찾아 가며, 어떤 것이 조건에 부합하고 어떤 것이 해당되지 않는지 확인하면서 이루어져야 한다. 발견적 추론 문제가 어려운 것은 지문의 요구 사항 자체를 이해하는 데 시간이 걸리기 때문인데, 이럴 때 **적당한 수를 넣어 보면서 직접 대입해 보는 방법**이 문제 이해에 매우 효과적이고, 출제자가 평가하고자 하는 능력이기도 한다.

조건을 모두 만족시키는 정사각형은 초록색 정사각형이다. 꼭짓점의 x, y좌표 모두 자연수이고, x좌표는 모두 100 이하이며, 로그함수 그래프 두 개와 동시에 만나고 있기 때문이다.



자, 그러면 이제 어느 경우 조건을 모두 만족시키고 어떨 때 만족이 안 되는지 살펴보자. 위에서 두 조건을 모두 만족시키는 초록색 정사각형을 찾았는데, 바로 왼쪽에 있는 빨간색 정사각형은 조건을 만족하지 않고 있다. 그리고 초록색 오른쪽에 있는 정사각형들은 이 그림에서는 모두 조건을 만족시키고 있는 것 같다.



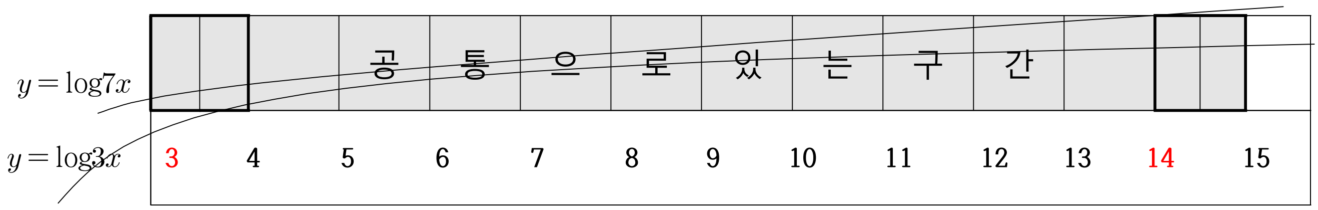
그럼 뭐가 문제가 되는지를 살펴보자. 위에서 초록색 정사각형은 이 그림의 "경계" 부위에서 만나고 있는데, 경계 부위는 $y = \log 3x$의 그래프가 $y = 1$을 지나가는 점이다. 다시 말하면 $y = \log 3x$의 y값의 정수 부분이 바뀌고 있는 곳이란 말이다. 이 점에 착안해서 생각해보면, 정사각형의 꼭지점은 자연수만 가능하기 때문에 정사각형은 이 그림의 빨간 줄과 초록 줄 사이에서만 존재할 수 있다. 즉, y값이 정수인 부분 사이에서만 존재할 수 있는데, 그 구간에서 그래프와 모두 만나려면 두 로그함수의 그래프가 모두 그 구간에 있어야 할 것이다. 이 그림에서도 경계부분부터는 $y = \log 3x$와 $y = \log 7x$가 서로 같은 구간에 위치해 있다.

여기까지 발견했다면 문제의 50%는 풀린 것이다. 지금까지의 관찰에서 내린 결론은 두 로그함수가 서로 같은 구간에 있을 때, 다시 말하면 **로그함수의 y좌표의 정수 부분이 서로 같은 구간에서, 그 구간에 있는 정사각형은 두 그래프와 모두 만나는 것이다**.

그러면 이제 규칙을 찾았으니 문제에서 요구하는 개수를 구해야 한다. 문제를 다시 읽어보면 “꼭짓점의 x좌표는 모두 100 이하라고 하였다.” 이는 $1 \leqq x \leqq 100$을 의미하는데, 위에서 말한 구간은 y좌표이므로, $y=\log 3x$와 $y=\log 7x$가 취할 수 있는 치역의 범위는 각각 $\log 3 < y < \log 300$, $\log 7 < y < \log 700$이 되겠다. 이 때, 밑이 10인 상용로그이므로 $2=\log 2 < \log 300 < \log 700 < \log 1000 = 3$라는 부등식이 세워져서 결과적으로 두 로그함수의 그래프는 모두 정의역에서 **치역이 0과 3 사이에서 존재하는 것**이다. 이 중 자연수는 1, 2둘 뿐이므로 구간은 $y=1$과 $y=2$ 사이, $y=2$와 $y=3$ 사이 두 개로만 쪼개면 되고, 이 구간에서 두 로그함수의 그래프가 함께 있는 범위가 어떻게 되는지를 찾으면 정사각형의 개수를 구할 수가 있다.

그럼 1과 2 사이에서 $y=\log 3x$와 $y=\log 7x$가 언제부터 서로 같이 있는지 살펴보자. 먼저 $\log 7x$는 $x=1$와 $x=2$ 사이에서 $y=1$을 지나가기 때문에 1과 2 사이 구간에서는 $2 \leqq x \leqq 14$(x는 자연수)까지 가능하다. $x=15$가 되면 $\log 105$가 되어서 2를 넘기 때문에, 14까지의 자연수가 가능한 것이다. 한 편, $\log 3x$는 $x=4$부터 $y=1$을 지나치기 시작하며 $x=33$까지 1과 2 사이의 구간에 존재하기 때문에 $4 \leqq x \leqq 33$(x는 자연수)일 때 이 구간에 존재한다.

그러면 공통으로 있는 x는 4부터 14까지인데, 이 사이에서 만들 수 있는 정사각형의 개수는 어떤지 살펴보자.



공통 x는 4부터 14까지이지만 3과 4 사이에서 $y=\log 3x$의 그래프가 1~2 구간으로 넘어오기 때문에 가장 왼쪽은 정사각형을 반으로 나누어 놨다. 중요한 것은 $x=3$을 **왼쪽 꼭짓점으로 하는 진한 정사각형도 조건을 만족시킨다는 것**이다. 3과 4사이에서 1~2 구간으로 넘어오기 때문이다. 마찬가지로 오른쪽 끝도 14와 15사이에서 $y=\log 7x$가 2~3구간으로 넘어가기 때문에 사이에 있는 14를 **왼쪽 꼭짓점으로 하는 진한 정사각형도 조건을 만족**시킨다. 따라서 왼쪽 꼭짓점의 개수를 세어서 **14-3+1=12 개의 정사각형이 조건을 만족**시킨다.

마찬가지고 2~3 사이의 구간에서도 개수를 세어 보자. $y=\log 7x$는 $x=15$부터 이 구간에 들어가며, 정의역의 끝인 100에서도 구간 내에 있기 때문에 $15 \leqq x \leqq 100$(x는 자연수)가 이 구간이고, $y=\log 3x$는 $x=34$부터 마찬가지로 $x=100$까지이므로 $34 \leqq x \leqq 100$까지 2~3 구간에 들어간다. 따라서 공통구간은 $34 \leqq x \leqq 100$이고, **왼쪽 경계인 33부터, 가장 오른쪽 꼭짓점인 99**(100이 되면 오른쪽 꼭짓점이 101이 되므로 안 됨) 까지의 갯수를 세면 99-33+1 = 67이 되어서 2~3 사이의 구간에서 조건을 만족시키는 정사각형은 67개가 된다.

따라서 답은 12+67=79이다.

→ 답 : 79

Tip

이 문제에서 중요한 것은 빠르게 규칙을 찾는 것과 찾은 규칙을 바탕으로 조건을 만족하는 정사각형을 정확하게 세는 것이다. 이 문제는 로그함수의 그래프 문제이지만, 상용로그 문제로 볼 수 있다. 두 그래프와 모두 만나는 정사각형은 두 상용로그의 지표가 같아지는 부분에 있는 것이기 때문에 자릿수가 바뀌는 점을 경계하여 변화가 생기는 것이다. 이런 상용로그 문제는 최근 수능에도 나온 바 있기 때문에 관련 기출문제를 하나 싣는다.

관련 기출문제

2013년 6월 모의평가 (나)형

양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 할 때, $f(2x) \leqq f(x)$를 만족시키는 100보다 작은 자연수 x의 개수는?

[해설] → 문제는 전혀 달라 보이지만, 물어보고 있는 것은 큰 차이가 없던 6월 모의평가 문제였다.

예를 들어서 생각해 보자. $\log x$의 가수가 0.4 라고 하면, $\log 2x$의 가수는 $\log x + \log 2$로, 대략 0.7정도 될 것이므로 $\log 2x$의 가수가 $\log x$의 가수보다 크게 될 것이다.
하지만 $\log x$의 가수가 0.9 라고 하면 $\log 2x$의 가수는 0.9 + 0.3 = 1.2이 아니고, 정수로 올림된 1을 뺀 0.2가 될 것이다. 즉, $f(2x) \leqq f(x)$를 만족시키는 경우는 $2x$가 되면서 **자릿수가 올라가는 경우인 것**이다.

그것을 고려하면 100보다 작은 자연수 중에서 2배를 하면 자릿수가 올라가는 x는
i) x가 한 자리의 수 : 5 ~ 9 → 5개
ii) x가 두 자리의 수 : 50 ~ 99 → 50개
따라서 답은 55개이다.

문제는 다르지만 물어보는 내용은 상당히 유사함을 알 수 있다.