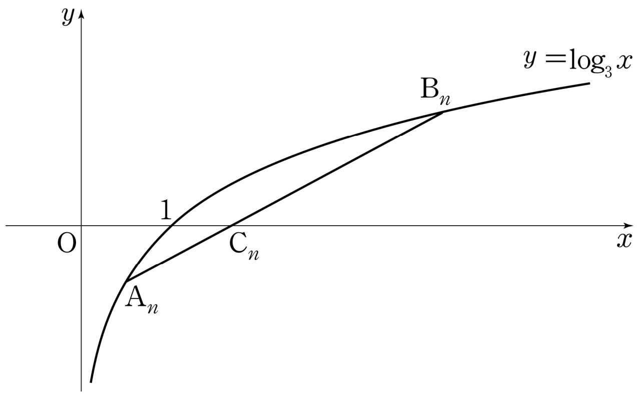
9월 모의고사 문항 분석

15. 2 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 A_n이라 하자. 그래프 위의 점 B_n과 x축 위의 점 C_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 x축의 교점이다.
> (나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} : \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n} = 1 : 2$

점 C_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1



로그함수의 그래프와 점화식을 응용한 문제였다. 도형의 성질을 활용하여 식을 빠르게 세우는 것이 문제의 포인트였다. 얼핏 보면 문제가 복잡해 보일 수 있지만, 그래프를 읽는 기본적인 방법과 내분의 의미를 알고 있다면 그리 어려운 문제는 아니었다.

Warming Up

문제풀이를 하기 앞서서, 그래프를 읽는 기본적인 독해법을 확인해보자.

> **[1 - 2] 다음 표현을 문제풀이에 어떻게 사용할 수 있는지 설명해 보시오.**
>
> 1. 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 $y=f(x)$ 곡선 위에 있다.
> 2. 점 $A(a,\ b)$는 $y=f(x)$와 x축의 교점이다.

즉, 이 표현을 통해서 어떤 식을 만들어 낼 수 있는지 말하라는 것이다.

개념 재확인

그래프만 보면 울렁거리는 사람을 위한 시가 하나 있다.

서 시

수능(修能)날까지 하늘을 우러러 / 한 점 그래프가 없기를
/ 시험지에 이는 바람에도 / 나는 괴로워했다. //
대입(大入)을 노래하는 마음으로 / 모든 죽어가는 것을 사랑해야지
/ 그리고 나에게 주어진 문제를 / 풀어가야겠다. //
오늘 아침에도 그래프가 나왔다.

안타깝지만, 여러분이 보게 될 수능에도 그래프가 나올 것이다. 내가 확신한다.

이 문제를 위해서 그래프를 읽는 기본 원칙을 한 번 살펴보도록 하자. 아주 간단하지만 막상 문제를 풀 때 생각나지 않을 수 있는 표현들이다.

1. 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 $y=f(x)$ 곡선 위에 있다.

아주아주 쉬운 내용이지만, 이 말을 간과해서 문제를 놓치는 경우가 **의외로** 많다.

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 $y=f(x)$ 곡선 위에 있다. ➡ 곡선 $y=f(x)$가 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$를 지난다.
➡ 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$를 $y=f(x)$에 대입한다. ➡ $b=f(a)$

이 내용을 언급하는 이유는, 어려워서가 아니라 '너무 쉬워서' 이 내용을 간과하는 경우가 많기 때문이다. 그래프를 보고 식을 세울 때, 뭔가 결론이 나지 않는다면 그래프에 나온 단서를 모두 이용하지 않은 경우일 수 있는데, 많은 경우에 이 문장을 빠뜨려서 식 하나가 부족하게 되는 것이다.

2. 점 $A(a,\ b)$는 $y=f(x)$와 x축의 교점이다.

역시 어렵지 않은 내용이지만, 문제에서 맞닥뜨렸을 때 생각이 나지 않을 수 있다.

점 $A(a,\ b)$는 $y=f(x)$와 x축의 교점이다. ➡ $b=0,\ f(a)=0$

굳이 설명할 필요도 없는 내용이지만, 이렇게까지 언급하는 이유는 정신없이 문제를 풀다 보면 간과할 수 있기 때문이라는 점을 다시 한 번 강조한다.

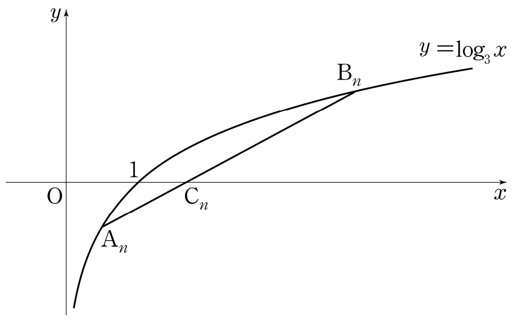
이제 문제풀이로 들어가 보도록 하자.

꼼꼼한 문제풀이

위에서 간단히 그래프를 읽는 방법에 대해서 다뤘는데, 이를 이용해서 문제를 다시 읽어 보도록 하자.

2 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $y=\log_3 x$의 ① 그래프 위의 x좌표가 $\dfrac{1}{n}$인 점을 A_n이라 하자. ② 그래프 위의 점 B_n과 ③ x축 위의 점 C_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) ④ 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 x축의 교점이다.
(나) ⑤ $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} : \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n} = 1 : 2$



점 C_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$의 값은?

① 그래프 위의 x좌표가 $\dfrac{1}{n}$인 점을 A_n → $A_n\left(\dfrac{1}{n},\ f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ → $A_n\left(\dfrac{1}{n},\ \log_3\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

② 그래프 위의 점 B_n → $B_n=(a,\ b)$라고 하면 $f(a)=b$

③ x축 위의 점 C_n → $C_n(c,\ 0)$

이렇게 기본적인 내용을 정리해 보고, 보기 (가), (나)를 살펴보도록 하자.

(가) 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 x축의 교점이다.

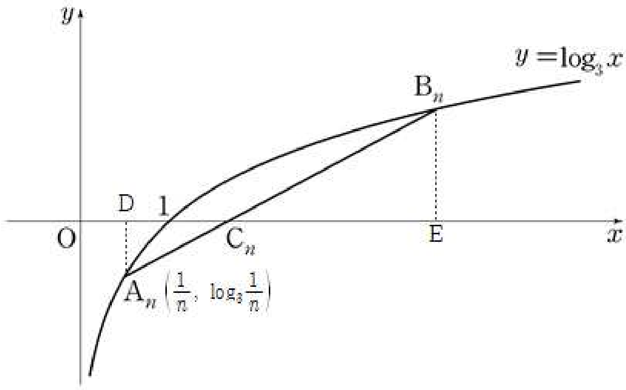
그림을 보면 간단하게 알 수 있지만, C_n은 선분 A_nB_n의 내분점이다. 이 내용을 (나)와 결합해 보자.

(나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} : \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n} = 1 : 2$

(나)의 표현이 무엇을 의미하는가? C_n은 선분 A_nB_n의 내분점이라고 하였다. (나)는 C_n이 A_n과 B_n을 **1:2로 내분하는 점이라는 사실을 말해주고 있다**. 이 문제에서 많이 헤맨 사람은 아마 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} : \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n} = 1 : 2$를 이용하기 위하여 $\overline{A_nC_n}$을 구하고 $\overline{C_nB_n}$을 구하여 비례식에 대입했을 확률이 높다. 그런 경우 계산식이 지나치게 복잡해져서 답을 구하기 매우 어렵게 된다.

내분점이라는 사실을 통해서 우리는 다음과 같은 내용들을 확인할 수 있다.

① $A_nC_n : C_nB_n = 1:2$ (길이의 비가 1:2)
② $A_nD : B_nE = 1:2$ (높이의 비가 1:2)
③ $DC_n : C_nE = 1:2$ (밑변의 비가 1:2)



이 내용을 빠르게 알아내야 한다.

길이의 비가 높이나 밑변의 비로 바뀔 수 있다는 것은, 식을 아주 쉽게 만들 수 있다는 것을 말해준다. 높이의 비인 $A_nD = 0 - \log_3\frac{1}{n} = \log_3 n$으로 쉽게 구할 수 있으며, B_nE는 그 값의 2배이므로 $B_nE = 2\log_3 n$이 된다. 그러므로 B_n의 y좌표가 $2\log_3 n$이 되는 것이다.

또, C_n의 x좌표는 문제에서 x_n이라고 하였으므로, $DC_n = x_n - \frac{1}{n}$이고, $C_nE = 2DC_n = 2x_n - \frac{2}{n}$이 된다. 여기서 중요한 것은 E의 x좌표를 $2x_n - \frac{2}{n}$으로 쓰면 안 된다는 것이다. 자세히 보자. C_nE의 길이가 $2x_n - \frac{2}{n}$이다. 그렇기 때문에 E의 x좌표는 C_n의 x좌표인 x_n에 C_nE의 길이를 더한 $3x_n - \frac{2}{n}$이 되어야 한다. 만약 E의 x좌표를 $2x_n - \frac{2}{n}$이라고 풀면 오답이 나오게 된다.

자, 그러면 이제 모든 점의 좌표를 x_n과 n을 이용하여 나타내었는데, 이제 해야 할 것은 무엇일까?

그래프 위의 점 B_n

간단해 보이는 이 문장이 이 문제의 마무리를 위한 중요한 조건이 된다. 즉 $B_n\left(3x_n - \frac{1}{n},\ 2\log_3 n\right)$으로 나타낼 수 있는 B_n이라는 점은 $y = \log_3 x$ 위의 점이므로, $2\log_3 n = \log_3\left(3x_n - \frac{1}{n}\right)$가 되는 것이다. 이것이 이 문제의 해결로 갈 수 있는 방정식이다.

이제 할 것은 로그방정식을 푸는 것이다. $2\log_3 n = \log_3 n^2$이므로,
$n^2 = 3x_n - \frac{1}{n}$이 되고 $x_n = \frac{1}{3}\left(n^2 + \frac{1}{n}\right)$이다.

구해야 하는 것은 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$이므로, 이 값은 $\frac{1}{3}$이 된다.

→ 정답 ① $\frac{1}{3}$

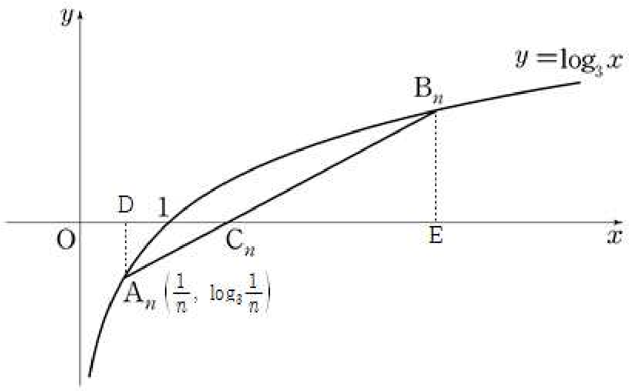
요약

15. 2 이상의 자연수 n에 대하여 ① 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 A_n이라 하자. ② 그래프 위의 점 B_n과 x축 위의 점 C_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) ③ 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 x축의 교점이다.
> (나) ④ $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} : \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n} = 1 : 2$

점 ③ C_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, ⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1



① A_n의 좌표를 표시한다. →
② B_n이 그래프 위의 점이라는 사실을 확인해 두고, 이를 이용해서 식을 세울 수 있다는 것을 알아야 한다.
→ ③ C_n의 x좌표를 x_n이라고 정하고, y좌표는 0이라고 정한다.
→ ④ C_n이 선분 A_nB_n의 내분점임을 이용하여 $A_nD : B_nE = 1 : 2$(그래프 수정함), $DC_n : C_nE = 1 : 2$로 식을 세운다.
→ B_n이 그래프 위의 점이라는 사실을 이용하여 식을 푼다.
→ ⑤ 극한값을 구한다.

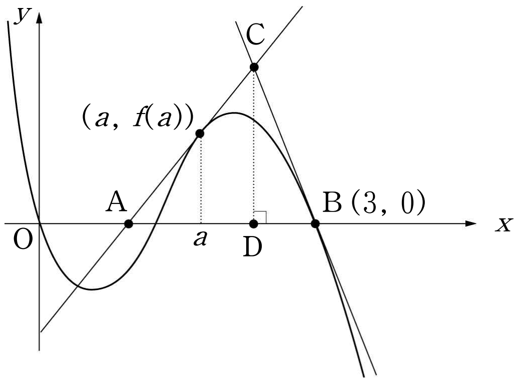
Tip

이 문제에서 빠르게 알아야 할 것은 $A_nC_n : C_nB_n$=1:2 라는 비례식을 그대로 이용하지 말고, 그것이 밑변의 길이의 비, 높이의 길이의 비로 바뀔 수 있다는 사실이다. 그렇지 않고 길이를 그대로 비례식에 대입하여 식을 풀면 상당히 복잡한 식이 등장할 수 있고, 그 과정에서 실수를 할 가능성이 높아진다. 예전 교육청 기출문제 중에도 내분점에 대한 이해를 묻는 문제가 하나 있으니 풀어 보도록 하자.

관련 기출문제

교육청 기출문제

그림과 같이 삼차함수 $f(x)=-x^3+4x^2-3x$ 의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$ 에서 기울기가 양의 값인 접선을 그어 x 축과 만나는 점을 A, 점 B$(3, 0)$ 에서 접선을 그어 두 접선이 만나는 점을 C, 점 C 에서 x 축에 수선을 그어 만나는 점을 D 라 하고 $\overline{AD}:\overline{DB}=3:1$ 일 때, a 의 값들의 곱은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

〈답〉 ⑤

〈해설〉 점 B에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=-6$

$\overline{AD}:\overline{DB}=3:1$ 이므로 $\overline{BD}=k(k>0)$라 하면 $\overline{AD}=3k$

직선 BC의 기울기는 $\frac{\overline{CD}}{-k}=-6$이므로

$\overline{CD}=6k$

또, 직선 AC의 기울기는 $\frac{6k}{3k}=2$

따라서, $f'(a)=-3a^2+8a-3$에서

$-3a^2+8a-3=2$, $3a^2-8a+5=0$

∴ 모든 a값들의 곱은 $\frac{5}{3}$