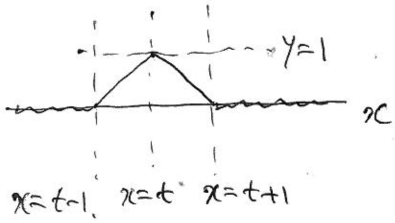
* 2018학년도 대수능 수학 가형 30번.

실수 t, 함수 $f(x)=\begin{cases} 1-|x-t| & (|x-t|\le 1) \\ 0 & (|x-t|>1) \end{cases}$ → $(t-1\le x<t)$ $f(x)=x+1-t$

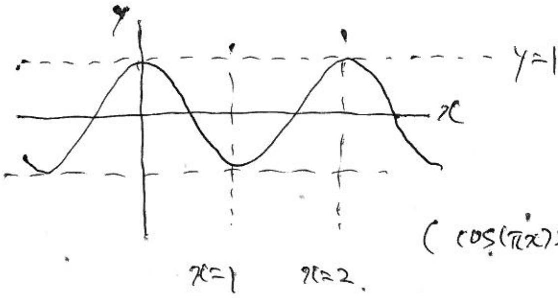
$(t\le x\le t+1)$ $f(x)=-x+1+t$

$(x<t-1 \text{ or } x>t+1)$ $f(x)=0$

∴ 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



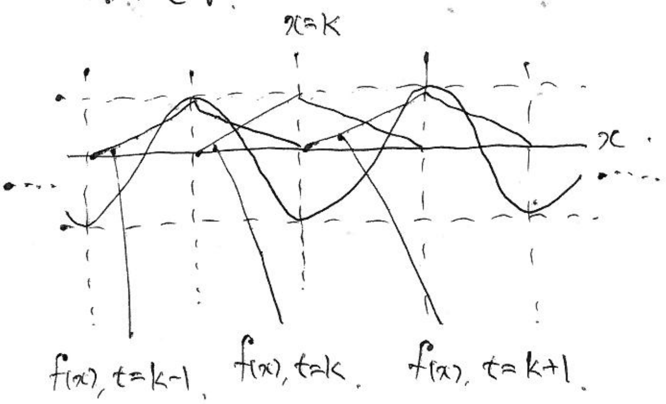
또한 $\cos(\pi x)$의 그래프는 다음과 같다.



($\cos(\pi x)$의 주기는 2)

따라서 어떤 홀수 k에 대한 $f(x)$와 $\cos(\pi x)$는

다음과 같다.



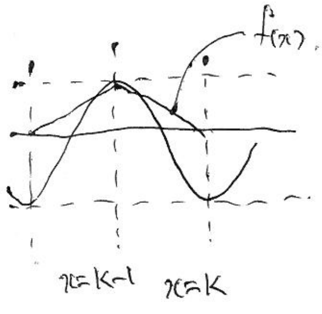
∴ x가 홀수일 때 극소, 짝수일 때 극대가 된다.

→ $f(x)$와 $\cos(\pi x)$의 그래프에서 t값의 변화가

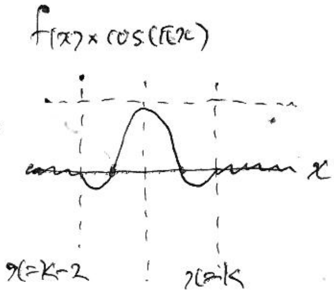
2일 때 겹쳐지는 부분이 같다.

∴ 기준을 잡을 때 $t=k-1$로 잡고 케이스를 나눈다.

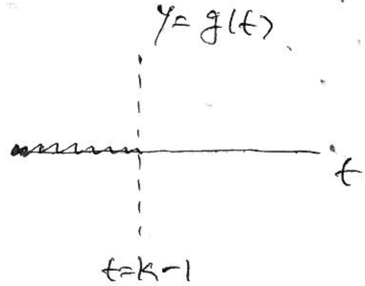
(i) $t=k-1$일 때



→



적분구간 $[k, k+8]$



↓

모든 점에서 극소 성립, 하지만

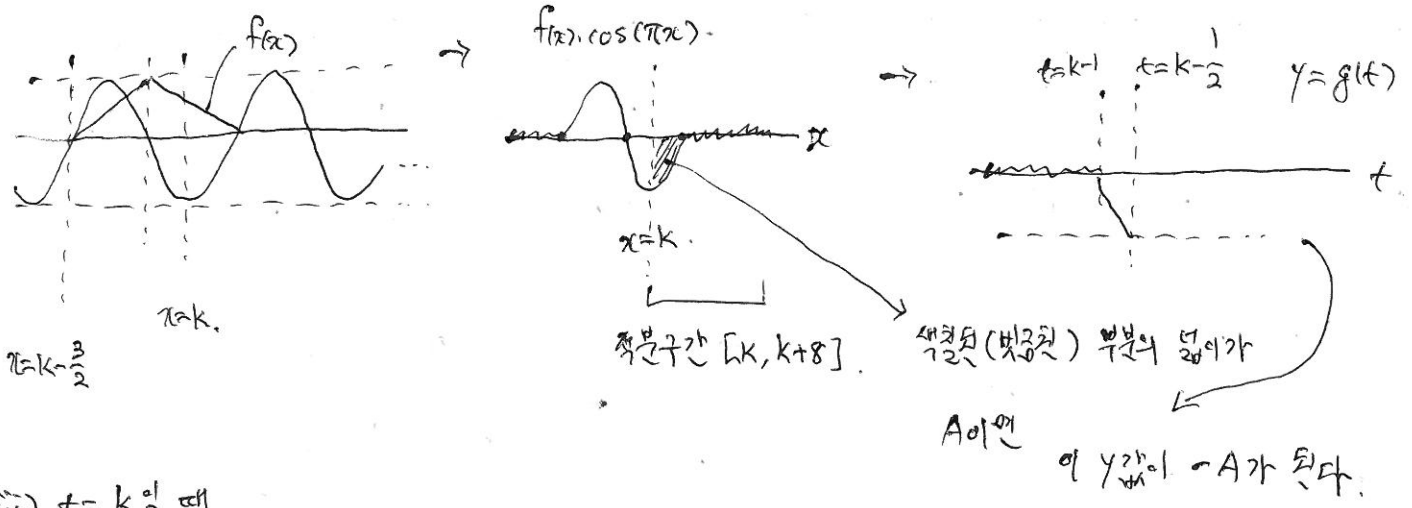
$g(x)<0$인 극소는 없다.

따라서 $t\le k-1$일 때, $g(t)=0$.

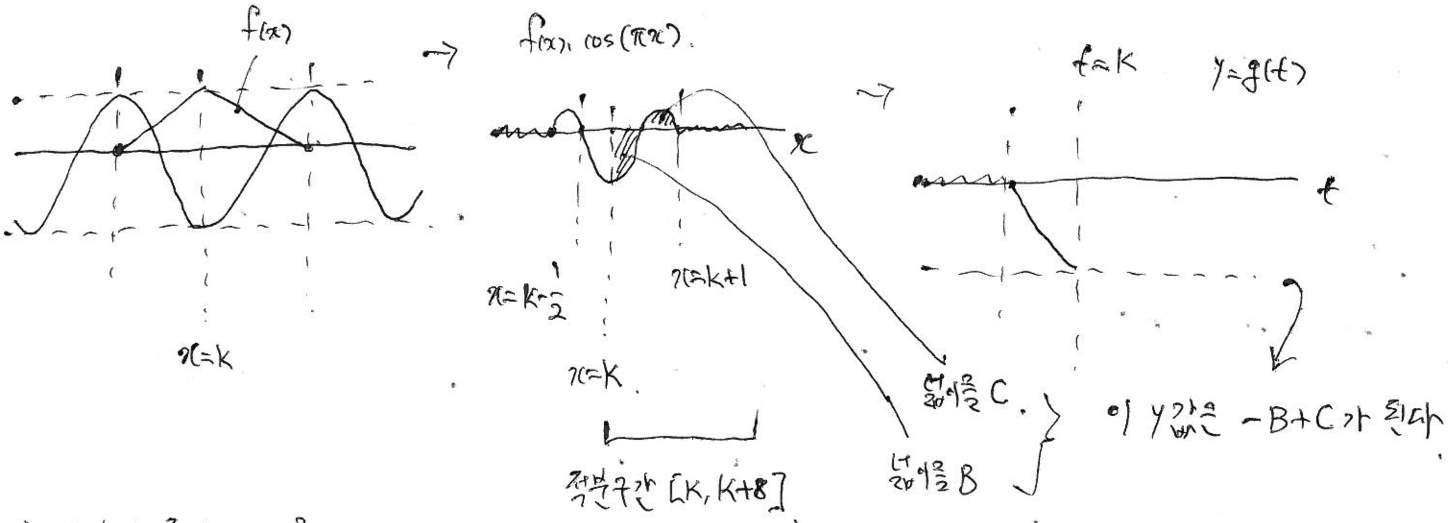
→ t가 $k-3$이든 $k-100$이든 어차피

적분구간은 $[k, k+8]$이므로 $g(t)$는 $g(t)=0$이 된다. (∵ $f(x)=0$)

(ii) $t = k - \frac{1}{2}$일 때

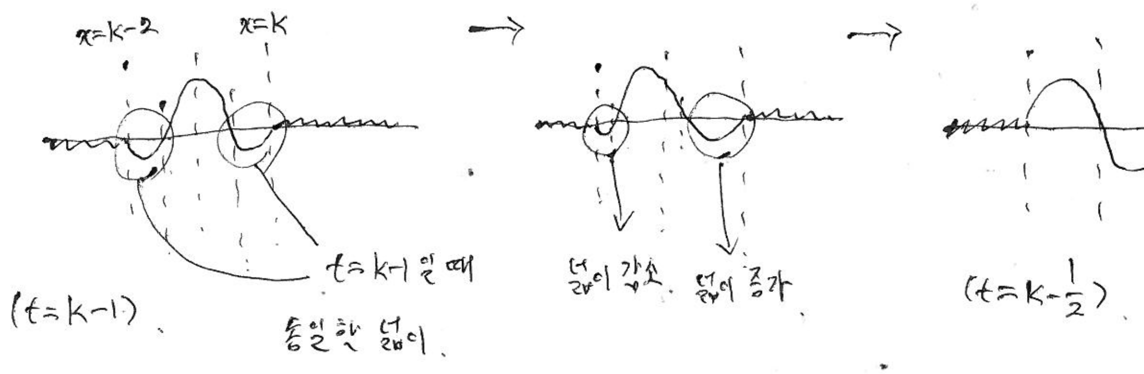


(iii) $t = k$일 때



→ t값의 증가에 따른

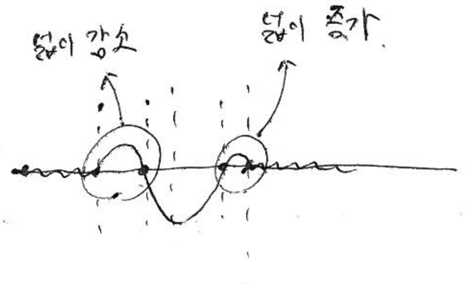
$f(x)\cdot\cos(\pi x)$의 변화.



→ 이러한 변화과정을 관찰, 이해하면 적분함수

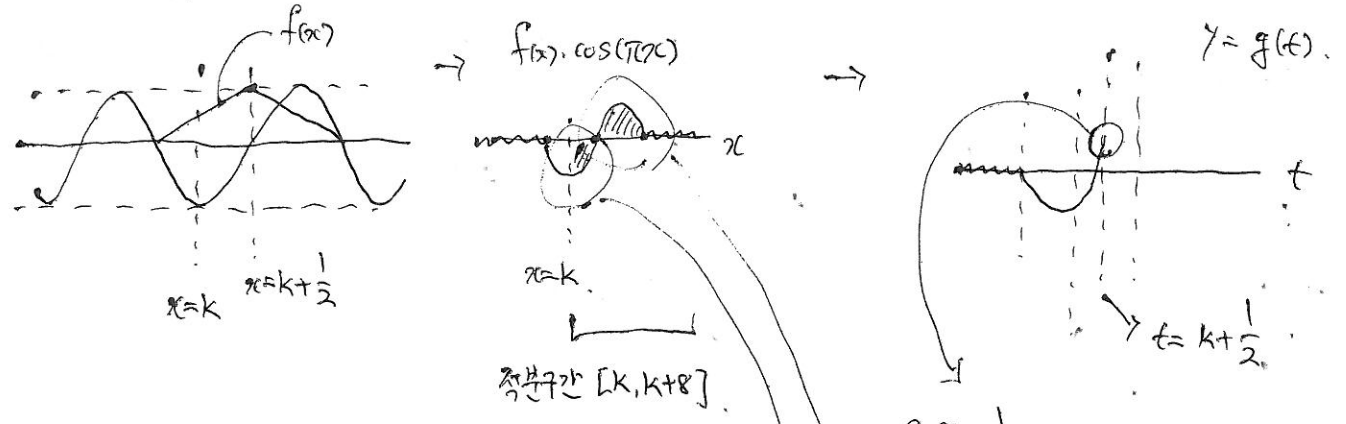
$g(t)$에 대한 이해 역시 가능하다.

→ $t=k$일 때 극소인 상황을 생각.



* 각 케이스 마다 t값 변화에 따르는 적분이 아니고 t값 고정에 따른 적분값을 나타내는 것임.

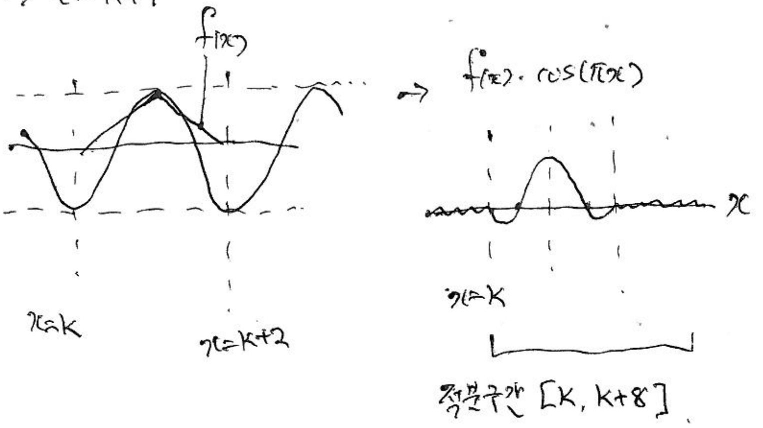
(iv) $t=k+\frac{1}{2}$

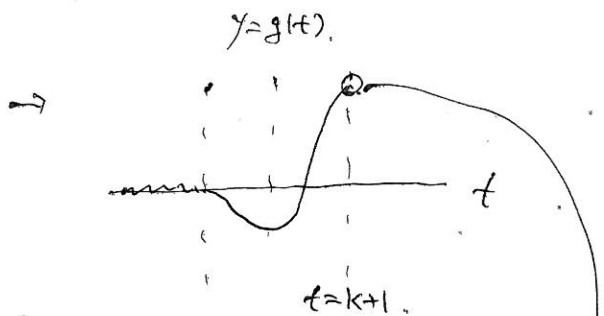


$g(k+\frac{1}{2}) > 0$.

적분계산에서 양수인 부분의 넓이가 더 크다.

(v) $t=k+1$

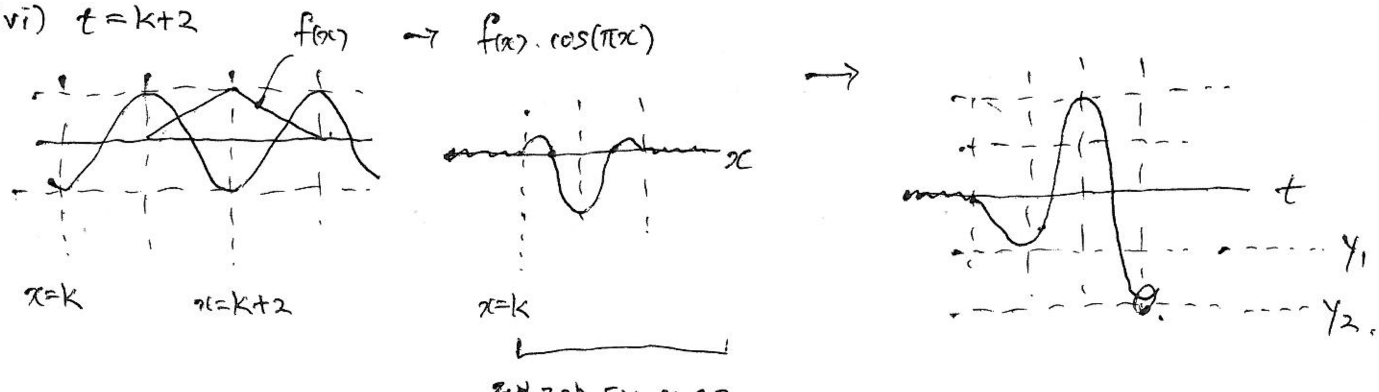




* 앞에서 설명한대로 (v) 에서 $f(x)\cos(\pi x)$ 의 그래프를 적분한 것이 $y=g(t)$의 그래프가 아니고 (v) 에서 구할 수 있는 것은 $t=k+1$ 에서의 $g(t)$ 함숫값임에 주의할 것.

$g(t=k+1) = g(k+1)$.

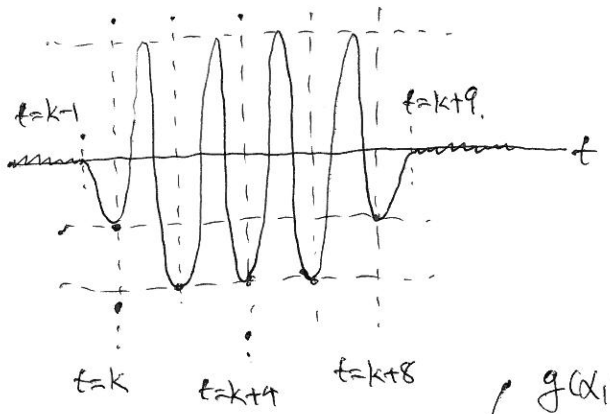
(vi) $t=k+2$



$(y_2 = 2y_1)$.

* $t=k+2$ (vi) 일 때의 적분계산에 포함되는 $f(x)\cdot\cos(\pi x)$ 에서의 부분이 $t=k$ (ii) 일 때의 두배이고 음수부분이므로 (vi) 에서 $y_2(<0) = 2y_1(<0)$ 이 성립.

따라서 $y=g(t)$의 개형은 다음과 같다.



$\alpha_1=k,\ \alpha_2=k+2,\ \alpha_3=k+4,\ \alpha_4=k+6,$

$\alpha_5=k+8,\quad \therefore m=5,$

$\sum_{i=1}^{5}\alpha_i = 5k+20=45.\quad \therefore k=5.$

$$\begin{cases} g(\alpha_1)=g(\alpha_5). \\ g(\alpha_2)=g(\alpha_3)=g(\alpha_4)=2g(\alpha_1) \end{cases}$$

$\therefore \sum_{i=1}^{5} g(\alpha_i) = 8\times g(\alpha_1) = 8\times g(5).$

$g(\alpha_1)$은 $t=k=5$일 때이므로

$f(x)=-x+t+1=-x+6,\quad \therefore$ (iii)에서 적분구간 $[k,k+8]$에서 유의미한 구간은

$[k,k+1]$이므로

$$\int_5^{13}(-x+6)\cdot\cos(\pi x)\,dx = \int_5^{6}(-x+6)\cdot\cos(\pi x)\,dx \qquad \begin{cases} u=\frac{1}{\pi}\sin(\pi x) & v=-x+6 \\ u'=\cos(\pi x) & v'=-1 \end{cases}$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\cdot(-x+6)\right]_5^6 - \int_5^6 -\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\,dx$$

$$=(0-0)-\left[\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\right]_5^6$$

$$=-\left(\frac{1}{\pi^2}-\left(\frac{1}{\pi^2}\right)\right)=\frac{-2}{\pi^2}.\qquad \therefore \sum_{i=1}^{5} g(\alpha_i)=8g(\alpha_1)=\frac{-16}{\pi^2}$$

따라서 $k-\pi^2\cdot\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i) = 5-\pi^2\times\frac{(-16)}{\pi^2} = 5+16=21$ //