2022 수능 예시문항 해설 (이동훈 기출문제집)

〈 수학Ⅰ + 수학Ⅱ 〉

01

[풀이]

지수법칙에 의하여

$$\frac{3^{\sqrt{5}+1}}{3^{\sqrt{5}-1}}=3^{(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{5}-1)}=3^2=9$$

답 ⑤

02

[풀이]

곡선 $y=x^3$은 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx=0$$

정적분의 기본정리에 의하여

$$\int_{-1}^{1}(x^3+a)dx=\int_{-1}^{1} adx=[ax]_{-1}^{1}=2a=4$$

$\therefore\ a=2$

답 ②

03

[풀이1]

함수 $y=2^x$의 그래프를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동하면 함수 $y=2^x+m$의 그래프와 일치한다. 이 곡선이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$2=2^{-1}+m$

$\therefore\ m=\dfrac{3}{2}$

답 ③

[풀이2]

점 $(-1,\ 2)$를 y축의 방향으로 $-m$만큼 평행이동하면 점 $(-1,\ 2-m)$과 일치한다. 곡선 $y=2^x$이 이 점을 지나므로

$2-m=2^{-1}$

$\therefore\ m=\dfrac{3}{2}$

답 ③

04

[풀이]

$x\to 0-$일 때, $f(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=2$$

$x\to 1+$일 때, $f(x)$는 1보다 작은 값을 가지면서 1에 가까워지므로

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=1$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0-} f(x)-\lim_{x\to 1+} f(x)=2-1=1$$

답 ④

05

[풀이1]

$\sin\theta-\cos\theta=k$로 두자.

이때, θ는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$

에서 $k>0$이다.

$k^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\dfrac{12}{25}\right)=\dfrac{49}{25}$

$\therefore\ k=\sqrt{\dfrac{49}{25}}=\dfrac{7}{5}$

답 ④

[풀이2]

수에 대한 감각이 좋다면 아래의 풀이가 실전적이다.

θ는 제2사분면의 각이고,

점 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$는 단위원 위에 있으므로

$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{12}{25}=-1\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}$에서

$\sin\theta=\dfrac{3}{5},\quad \cos\theta=-\dfrac{4}{5}\quad$ 또는 $\quad\sin\theta=\dfrac{4}{5},$

$\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$

위의 두 경우 모두

$\therefore\ \sin\theta - \cos\theta = \dfrac{7}{5}$

답 ④

06

[풀이]

부정적분의 정의에 의하여

$f(x) = \int f'(x)dx = x^3 - \dfrac{1}{2}kx^2 + x + C$

(단, C는 적분상수)

$f(0) = C = 1$, $f(2) = 10 - 2k + C = 1$

풀면 $C = 1$, $k = 5$

답 ①

07

[풀이1]

함수 $|f(x)|$는 $x = a$에서 연속이어야 한다.

함수의 연속의 정의에 의하여

$\lim_{x \to a-} |f(x)| = |f(a)|$

즉, $|a-4| = |a+3|$

$a \le -3$인 경우: $4 - a = -a - 3$, 해가 없다.

$-3 < a \le 4$인 경우: $4 - a = a + 3$, $a = \dfrac{1}{2}$

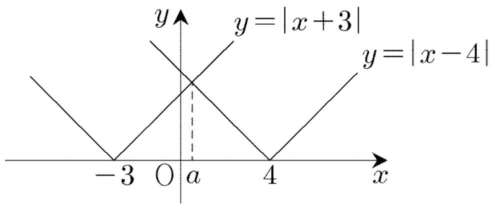
$a > 4$인 경우: $a - 4 = a + 3$, 해가 없다.

$\therefore\ a = \dfrac{1}{2}$

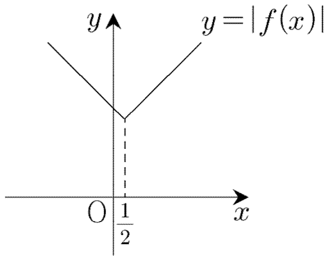
답 ④

[풀이2]

두 함수 $y = |x-4|$, $y = |x+3|$의 그래프는 아래 그림과 같다.



위의 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표를 a로 두면 함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (아래 그림)



a의 값을 구하면

$4 - a = a + 3$

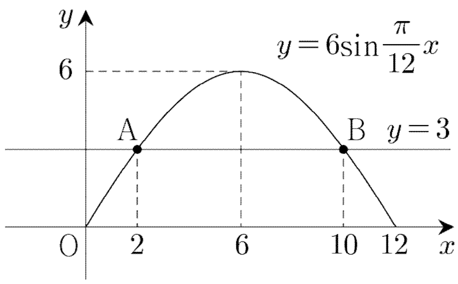
$\therefore\ a = \dfrac{1}{2}$

답 ④

08

[풀이]

문제에서 주어진 두 함수의 그래프는 다음과 같다.



방정식

$6\sin\dfrac{\pi}{12}x = 3 \left(0 \le \dfrac{\pi}{12}x \le \pi\right)$

을 풀면

$\sin\dfrac{\pi}{12}x = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\pi}{12}x = \dfrac{\pi}{6}$ 또는 $\dfrac{5}{6}\pi$,

$x = 2$ 또는 10

$\therefore\ \overline{AB} = 8$

답 ③

09

[풀이]

문제에서 주어진 삼차함수의 도함수는

$y' = -3x^2 - 2x + 1$

접점의 x좌표를 t로 두자.

기울기: $-3t^2 - 2t + 1$

접점: $(t,\ -t^3 - t^2 + t)$

접선의 방정식은

$y = (-3t^2 - 2t + 1)(x - t) - t^3 - t^2 + t$

이 직선이 원점을 지나므로

$0 = (-3t^2 - 2t + 1)(0 - t) - t^3 - t^2 + t$

정리하면

$2t^3 + t^2 = 0,\ t^2(2t + 1) = 0$

풀면 $t = 0$ 또는 $t = -\dfrac{1}{2}$

$t = 0$: (기울기)$=1$

$t = -\dfrac{1}{2}$: (기울기)$=\dfrac{5}{4}$

따라서 구하는 값은 $1 + \dfrac{5}{4} = \dfrac{9}{4}$

답 ②

10

[풀이]

로그의 성질에 의하여

$\log\sqrt{a} = \log a^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log a$

이므로

$\dfrac{7}{12} < \dfrac{1}{3} + \log\sqrt{a} < \dfrac{37}{12}$

$\dfrac{1}{3} + \log\sqrt{a}$가 가질 수 있는 자연수는 1, 2, 3 뿐이다. 세 자연수 1, 2, 3에 대응되는 a의 값을 각각 $p,\ q,\ r$이라고 하면

$\dfrac{1}{3} + \log\sqrt{p} = 1,\ \dfrac{1}{3} + \log\sqrt{q} = 2,$

$\dfrac{1}{3} + \log\sqrt{r} = 3$

세 등식을 변변히 합하면

$1 + \log\sqrt{pqr} = 6,\ \log pqr = 10$

$\therefore\ pqr = 10^{10}$

답 ①

11

[풀이]

문제에서 주어진 방정식의 서로 다른 세 실근을 각각

$\dfrac{a}{r},\ a,\ ar$ $\cdots$㉠

로 두자. (단, $a \neq 0,\ r \neq 0,\ r \neq 1$)

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = \left(x - \dfrac{a}{r}\right)(x - a)(x - ar) + 9$

$f(0) = 1$: $-a^3 + 9 = 1$에서 $a = 2$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = (x - 2)(x - 2r) + \left(x - \dfrac{2}{r}\right)(x - 2r)$

$+ \left(x - \dfrac{2}{r}\right)(x - 2)$

$f'(2) = -2$: $\left(2 - \dfrac{2}{r}\right)(2 - 2r) = -2$

정리하면

$2r^2 - 5r + 2 = 0,\ (2r - 1)(r - 2) = 0$

풀면 $r = \dfrac{1}{2}$ 또는 2

r의 값을 ㉠에 대입하면

㉠: 4, 2, 1 (1, 2, 4)

$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 4) + 9$

$\therefore\ f(3) = 7$

답 ②

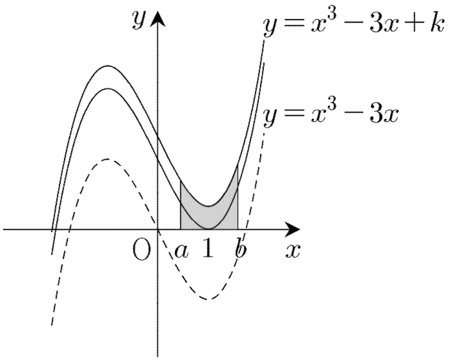
12

[풀이]

곡선 $y = x^3 - 3x$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동시키면

곡선 $y = x^3 - 3x + k$와 일치한다.

k의 값을 변화시키면서 구간 $[a,\ b]$에서의 함수 $y=x^3-3x+k$의 정적분을 관찰하면 다음과 같다.

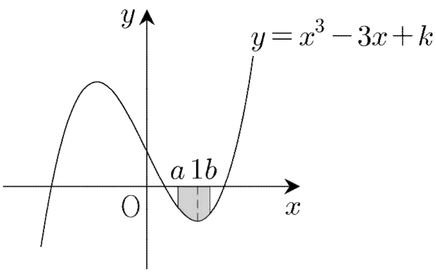


위의 그림처럼 함수 $y=x^3-3x+k$의 극솟값이 0 이상일 때, 문제에서 주어진 부등식이 항상 성립함을 알 수 있다. 그리고 곡선 $y=x^3-3x+k$이 x축에 접할 때, k의 값은 최소가 된다.

반면 함수 $y=x^3-3x+k$의 극소점이 제4사분면에 있으면

$$\int_a^b (x^3-3x+k)dx<0$$

이 되는 a, b의 값이 항상 존재한다. (아래 그림)



이제 k의 최솟값을 구하자.

함수 $y=x^3-3x+k$의 도함수는

$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$

함수 $y=x^3-3x+k$는 $x=1$에서 극솟값 $k-2$를 가지므로

$k-2\geq 0$, $k\geq 2$

따라서 k의 최솟값은 2이다.

답 ②

13

[풀이]

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k!}=\frac{1}{(n+1)!} \qquad \cdots(*)$$

〈과정〉

$n=1$일 때, $a_1=S_1=\dfrac{1}{2}$이므로 $\dfrac{1}{a_1}=2$이다.

($\because$ (*)에 $n=1$을 대입하면 $\dfrac{S_1}{1}=\dfrac{1}{2!}$, $S_1=\dfrac{1}{2}$)

$n=2$일 때, $a_2=S_2-S_1=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{7}{6}$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{a_k}=2-\frac{6}{7}=\frac{8}{7}$이다.

($\because$ (*)에 $n=2$를 대입하면

$\dfrac{S_1}{1}+\dfrac{S_2}{2!}=\dfrac{1}{3!}$, $S_2=2\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{2}{3}$)

$n\geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{S_n}{n!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k!}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k}{k!}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}$$

$$=-\frac{\boxed{n}}{(n+1)!}$$

즉, $S_n=-\dfrac{n\times n!}{(n+1)!}=-\dfrac{\boxed{n}}{n+1}$이므로

$$a_n=S_n-S_{n-1}=-\frac{n}{n+1}+\frac{n-1}{n}$$

$$=-\left(\boxed{\frac{1}{n(n+1)}}\right) \quad (\text{단, } n\geq 3)$$

이다. 한편 $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}k(k+1)=-8+\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$이므로

($\because$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=1\times 2+2\times 3+\sum_{k=3}^{n}k(k+1)$)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

$$=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{a_k}$$

$$=2-\frac{6}{7}-\sum_{k=3}^{n}k(k+1)$$

$=\frac{8}{7}-\sum_{k=3}^{n}k(k+1)$

$=\frac{8}{7}+8-\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$

$=\frac{64}{7}-\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\frac{64}{7}-\frac{n(n+1)}{2}-\sum_{k=1}^{n}\boxed{k^2}$

$=-\frac{1}{3}n^3-n^2-\frac{2}{3}n+\frac{64}{7}$

이다.

(가): $f(n)=n$

(나): $g(n)=\frac{1}{n(n+1)}$

(다): $h(k)=k^2$

$\therefore\ f(5)\times g(3)\times h(6)=5\times\frac{1}{3\times 4}\times 6^2=15$

답 ⑤

14

[풀이]

$a(t)=0 \Leftrightarrow 3(t-1)(t-3)=0 \Leftrightarrow t=1$ 또는 3

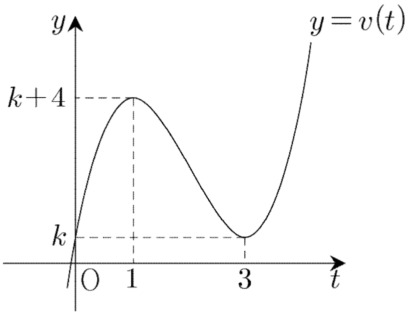
부정적분의 정의에 의하여

$v(t)=t^3-6t^2+9t+k$

$(\because v(0)=k)$

함수 $v(t)$는 $t=1$에서 극댓값 $k+4$를 갖고, $t=3$에서 극솟값 k를 가진다.

함수 $v(t)$의 그래프는 아래 그림과 같다.

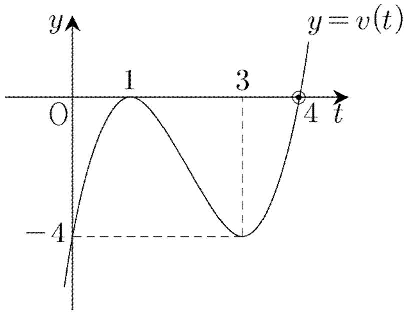


ㄱ. (참)

구간 $(3,\ \infty)$에서 함수 $y=v(t)$는 증가하므로, 이 구간에서 점 P의 속도는 증가한다.

ㄴ. (거짓)

$k=-4$일 때, 함수 $v(t)$의 그래프는 다음과 같다.



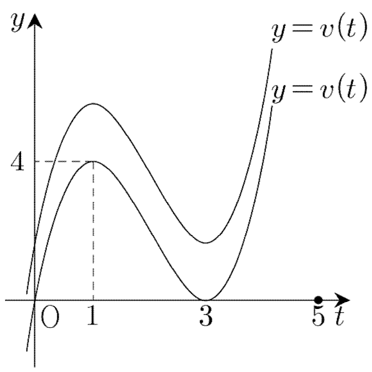
$t>0$일 때, 방정식 $v(t)=0$을 풀면 $t=1$ 또는 $t=4$이다. (이때, 시험장에서는 4의 값을 α와 같은 상수로 두어도 좋다.)

$t=1$의 좌우에서 $v(t)$의 부호의 변화가 없으므로 $t=1$에서 점 P의 운동 방향은 바뀌지 않는다.

$t=4$의 좌우에서 $v(t)$의 부호는 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 점 P의 운동 방향은 바뀐다.

따라서 구간 $(0,\ \infty)$에서 점 P의 운동 방향은 한 번 바뀐다.

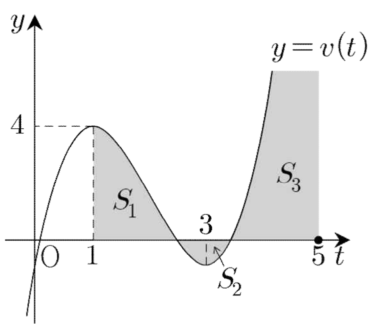
ㄷ. (참)



위의 그림처럼 $k\geq 0$이면 구간 $[1,\ 5]$에서 $v(t)\geq 0$이므로

$\int_1^5 v(t)dt=\int_1^5 |v(t)|dt\ \ (\because v(t)=|v(t)|)$

즉, (위치의 변화량)=(움직인 거리)



(단, S_1, S_2, S_3은 어둡게 색칠된 세 영역의 넓이이다.)

위의 그림처럼 $k<0$이면

(위치의 변화량)<(움직인 거리)이다.

왜냐하면

(위치의 변화량)$=S_1-S_2+S_3$

(움직인 거리)$=S_1+S_2+S_3$

이기 때문이다.

이때, (위치의 변화량)$+2S=$(움직인 거리)이다.

따라서 k의 최솟값은 0이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

15

[풀이]

우선 a_6, a_7, a_8, $\cdots$의 값을 구하자.

$a_5=5\geq 0$이므로 $a_6=a_5-6=-1$

$a_6=-1<0$이므로 $a_7=-2a_6+3=5$

$\vdots$

수열 a_5, a_6, a_7, a_8, $\cdots$은 다음과 같다.

$5(=a_5)$, -1, 5, -1, 5, -1, $\cdots$

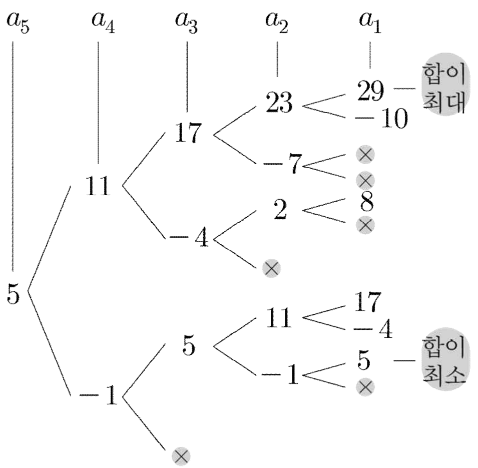
(즉, 5와 -1이 반복해서 나타난다.)

이제 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5의 값을 구하자.

$a_5=a_4-6(a_4\geq 0)$에서 $a_4=11$

$a_5=-2a_4+3(a_4<0)$에서 $a_4=-1$

마찬가지의 방법으로 나머지 항을 구하면 다음과 같다. (이때, 수형도를 사용하면 된다.)



위의 수형도에서

$M=29+23+17+11+(5-1+5-1+\cdots -1)$

$m=5-1+5-1+(5-1+5-1+\cdots -1)$

$\therefore$ $M-m$

$=29+23+17+11-(5-1+5-1)$

$=72$

답 ③

16

[풀이1]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하자.

$a_2+a_5=a_3+a_4=16$

$(\because a_2=a_3-d,\ a_5=a_4+d)$

이고, $a_3=7$이므로

$a_4=16-7=9$, $d=a_4-a_3=2$

$\therefore$ $a_{10}=a_4+6d=9+6\times 2=21$

답 21

[풀이2]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$a_3=a_1+2d=7$,

$a_2+a_5=2a_1+5d=16$

연립하면

$a_1=3$, $d=2$

$\therefore$ $a_{10}=a_1+9d=3+9\times 2=21$

답 21

17

[풀이]

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=f(x)+(x+1)f'(x)$

$\therefore$ $g'(1)=f(1)+2f'(1)$

$=2+2\times 4=10$

답 10

18

[풀이]
로그의 정의와 성질에 의하여
$x+2y=8,\ xy=2$
$2y=t$로 두고 정리하면
$x+t=8,\ xt=4$
$\therefore\ x^2+4y^2=x^2+(2y)^2=x^2+t^2$
$=(x+t)^2-2xt=8^2-2\times4=56$
답 56

19

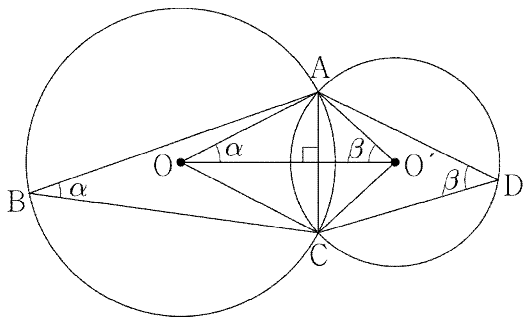
[풀이]
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=4x^3+k$
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로
$f'(1)=4+k=0,\ k=-4$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x^4-4x+10$
이므로
$\therefore\ f(1)=7$
답 7

20

[풀이]
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 두자.(단, d는 정수)
등차중항의 정의에 의하여
$a_3+a_5=2a_4=0$, 즉 $a_4=0$
수열 $\{a_n\}$을 나열하면
$-3d(=a_1),\ -2d,\ -d,\ 0,\ d,\ 2d,\ \cdots$
(1) $d\geq0$인 경우
$\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)$
$=(3d+2d+d+0+d+2d)$
$+(-3d-2d-d+0+d+2d)$
$=6d=30,\ d=5$
(2) $d<0$인 경우
$\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)$
$=(-3d-2d-d+0-d-2d)$
$+(-3d-2d-d+0+d+2d)$
$=-12d=30,\ d=-\dfrac{5}{2}(\neq$정수$)$
(1), (2)에서 $d=5$이므로
$\therefore\ a_9=-3d+8\times d=5d=25$
답 25

21

[풀이]
두 원 O, O′의 반지름의 길이를 각각 $r_1,\ r_2$라고 하자.



두 삼각형 ABC, ADC 각각에서 사인법칙에 의하여
$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\alpha}=2r_1,\ \dfrac{\overline{AC}}{\sin\beta}=2r_2$
이를 문제에서 주어진 분수식에 대입하면
$\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{\dfrac{\overline{AC}}{2r_2}}{\dfrac{\overline{AC}}{2r_1}}=\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{3}{2}$, 즉 $r_2=\dfrac{2}{3}r_1$
중심각과 원주각의 관계에 의하여
$\angle AOC=2\alpha,\ \angle AO'C=2\beta$
이등변삼각형의 성질에 의하여
$\angle AOO'=\alpha,\ \angle AO'O=\beta$
삼각형 AOO′에서 코사인법칙에 의하여
$$\cos(\pi-\alpha-\beta)=\frac{r_1^2+\left(\frac{2}{3}r_1\right)^2-1^2}{2\times r_1\times\frac{2}{3}r_1}=-\frac{1}{3}$$

($\because \cos(\pi-\alpha-\beta)=-\cos(\alpha+\beta)$)
풀면

$$r_1^2=\frac{9}{17}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\frac{9}{17}\pi$$

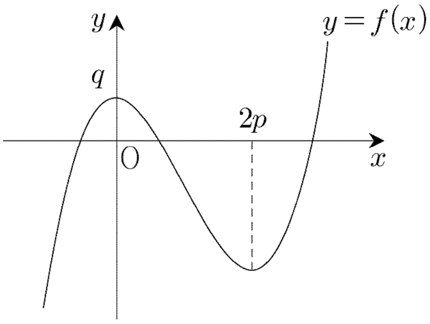
이다.
$\therefore\ p+q=17+9=26$
답 26

22

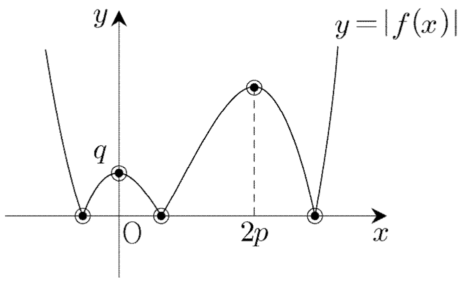
[풀이1]
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=3x^2-6px=3x(x-2p)$
방정식 $f'(x)=0$을 풀면
$x=0$ 또는 $x=2p$

	$\cdots$	0	$\cdots$	$2p$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

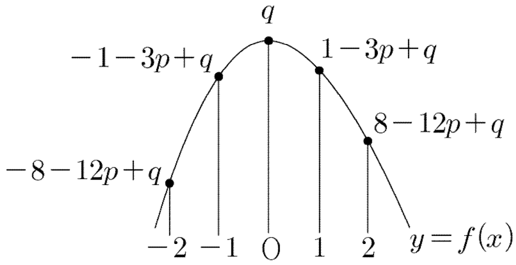
극댓값: $q(>0)$, 극솟값: $-4p^3+q$
함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



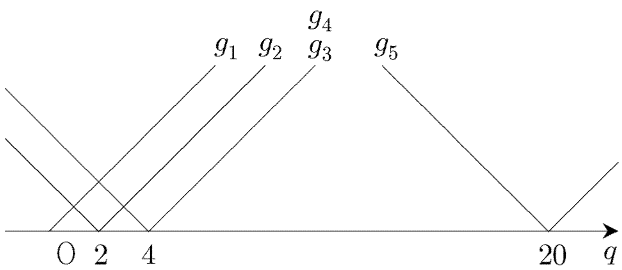
함수 $f(x)$의 극댓값의 부호가 양(+)이고, 극솟값의 부호가 음(−)이면 함수 $|f(x)|$의 극점의 개수는 5이다. (아래 그림)



(단, ◉는 함수 $|f(x)|$의 극점이다.)
조건 (가)에서
(함수 $f(x)$의 극솟값)$=-4p^3+q<0$, 즉
$q<4p^3$ $\cdots(*)$
함수 $f(x)$의 그래프를 다시 그리면



다섯 개의 함수 g_1, g_2, g_3, g_4, g_5를 다음과 같이 두자.
$f(0)=q(=g_1(q))$,
$|f(1)|=|q-(3p-1)|(=g_2(q))$,
$|f(-1)|=|q-(3p+1)|(=g_3(q))$,
$|f(2)|=|q-(12p-8)|(=g_4(q))$,
$|f(-2)|=|q-(12p+8)|(=g_5(q))$
위의 다섯 개의 함수의 그래프를 한 좌표평면에 모두 그리자.
(1) $p=1$인 경우
$p=1$을 $(*)$에 대입하면 $q=1$, 2, 3



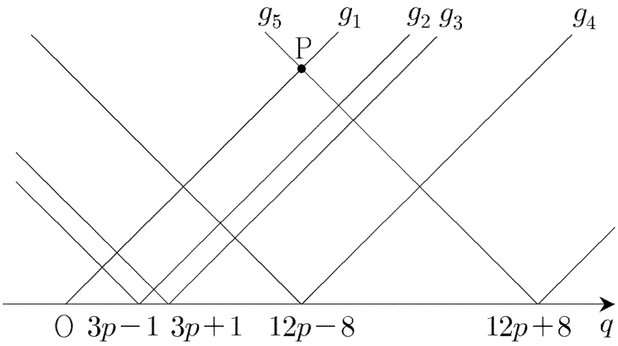
q의 값에 대한 두 구간 $[-1,\ 1]$, $[-2,\ 2]$에서의 함수 $|f(x)|$의 최댓값을 표로 정리하면 다음과 같다.

q	$[-1,\ 1]$	$[-2,\ 2]$
1	$g_3(1)$	$< g_5(1)$
2	$g_3(2)$	$< g_5(2)$
3	$g_1(3)$	$< g_5(3)$

위의 세 경우 모두 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(2) $p \geq 2$인 경우

(*)에서 q는 25 이하의 자연수이다.



두 함수 g_1, g_5의 그래프의 교점을 P라고 하면

$q=-q+12p+8$에서 $q=6p+4$(점 P의 q좌표)

위의 그림에서

$q \geq 6p+4$일 때, 두 구간 $[-1,\ 1]$, $[-2,\ 2]$에서의 함수 $|f(x)|$의 최댓값이 $q(=f(0))$로 서로 같음을 알 수 있다.

$p=2$이면 $q \geq 16$ (10개)

$p=3$이면 $q \geq 22$ (4개)

$p \geq 4$이면 $q \geq 6p+4 \geq 28$ (×)

따라서 구하는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 14이다.

답 14

[풀이2]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-6px=3x(x-2p)$

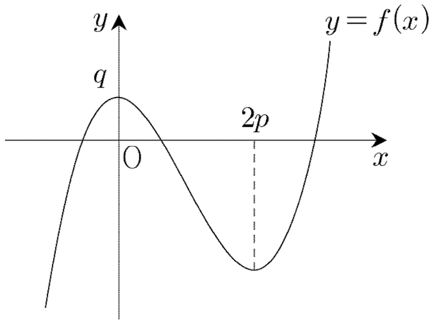
방정식 $f'(x)=0$을 풀면

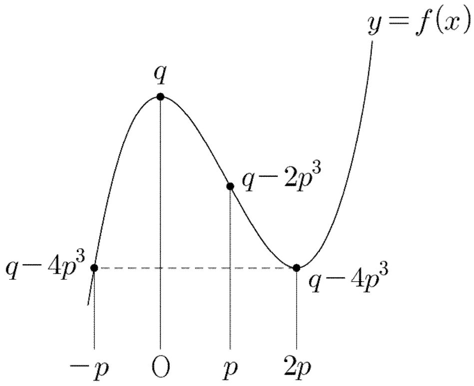
$x=0$ 또는 $x=2p$

	$\cdots$	0	$\cdots$	$2p$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

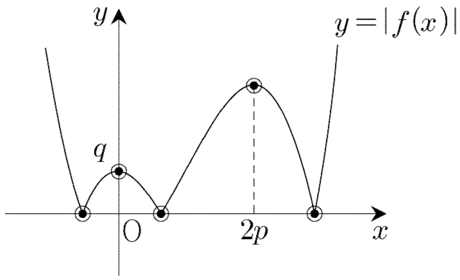
극댓값: $q(>0)$, 극솟값: $-4p^3+q$

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.





함수 $f(x)$의 극댓값의 부호가 양(+)이고, 극솟값의 부호가 음(−)이면 함수 $|f(x)|$의 극점의 개수는 5이다. (아래 그림)



(단, ◉는 함수 $|f(x)|$의 극점이다.)

조건 (가)에서

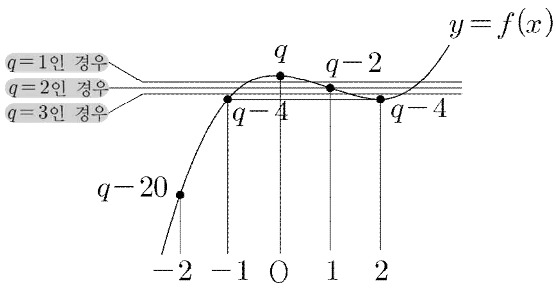
(함수 $f(x)$의 극솟값)$=-4p^3+q<0$, 즉

$q<4p^3$ $\cdots$(*)

(1) $p=1$인 경우 ($q=1$, 2, 3)

$p=1$을 (*)에 대입하면 q는 3 이하의 자연수이다.

함수 $f(x)$의 그래프는



q의 값에 대한 두 구간 $[-1,\ 1]$, $[-2,\ 2]$에서의 함

수 $|f(x)|$의 최댓값을 표로 정리하면 다음과 같다. (q의 값이 변할 때, x축의 위치는 위의 그림처럼 변한다.)

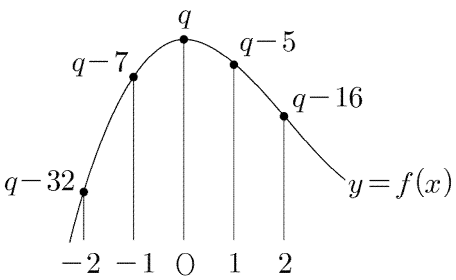
q	$[-1,\ 1]$	$[-2,\ 2]$
1	3 $\lvert q-4\rvert$	19 $\lvert q-20\rvert$
2	2 $\lvert q-4\rvert(=q)$	18 $\lvert q-20\rvert$
3	3 q	17 $\lvert q-20\rvert$

위의 세 경우 모두 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(2) $p=2$인 경우 ($q=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 25$)

$p=2$를 (*)에 대입하면 q는 25 이하의 자연수이다.

함수 $f(x)$의 그래프는



$1\le q<16$일 때,

$|f(-2)|=32-q,\ f(0)=q,\ |f(2)|=16-q$

이므로 구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 $32-q$이다.

그런데 세 수 $|f(-1)|,\ |f(0)|,\ |f(1)|$ 중에서 어떤 수도 $|f(-2)|$가 될 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

($\because$ 다섯 개의 방정식

$|f(-2)|=f(-1),\ |f(-2)|=-f(-1),$

$|f(-2)|=f(0),\ |f(-2)|=f(1),$

$|f(-2)|==-f(1)$

즉, 각각

$32-q=q-7,\ 32-q=7-q,$

$32-q=q,\ 32-q=q-5,$

$32-q=5-q$

모두 해를 갖지 않기 때문이다.

이하의 풀이에서도 마찬가지로 판단하면 된다.)

$16\le q\le 25$일 때,

$|f(-2)|=32-q,\ f(0)=q,\ |f(2)|=q-16$

이므로 구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 q이다.

$|f(-1)|=q-7,\ f(0)=q,\ |f(1)|=q-5$

그리고 구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 q이다.

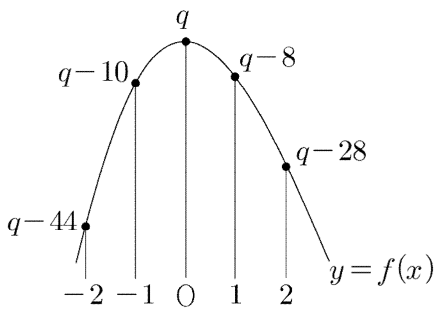
따라서 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$를 모두 쓰면

$p=2,\ q=16,\ 17,\ \cdots,\ 25$

(3) $p=3$인 경우 ($q=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 25$)

$p=3$을 (*)에 대입하면 q는 25 이하의 자연수이다.

함수 $f(x)$의 그래프는



$1\le q<21$일 때,

$|f(-2)|=44-q,\ f(0)=q,\ |f(2)|=28-q$

이므로 구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 $44-q$이다.

그런데 세 수 $|f(-1)|,\ |f(0)|,\ |f(1)|$ 중에서 어떤 수도 $|f(-2)|$가 될 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$22\le q\le 25$일 때,

$|f(-2)|=44-q,\ f(0)=q,\ |f(2)|=28-q$

이므로 구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 q이다.

$|f(-1)|=q-10,\ f(0)=q,\ |f(1)|=q-8$

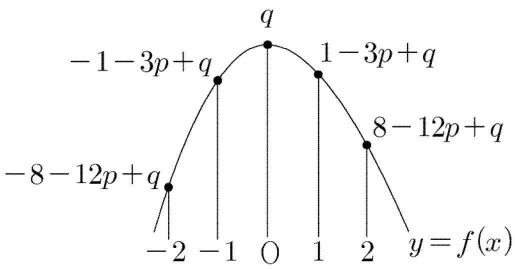
그리고 구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 q이다.

따라서 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$를 모두 쓰면

$p=3,\ q=22,\ 23,\ 24,\ 25$

(4) $p\ge 4$인 경우 ($q=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 25$)

함수 $f(x)$의 그래프는



$|f(-2)|=8+12p-q$, $f(0)=q$,
$|f(2)|=-8+12p-q$
이므로 구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 $8+12p-q$이다.
그런데 세 수 $|f(-1)|$, $|f(0)|$, $|f(1)|$ 중에서 어떤 수도 $|f(-2)|$가 될 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(1)~(4)에서 순서쌍 $(p,\ q)$를 모두 쓰면 다음과 같다.
$p=2$: $q=16,\ 17,\ \cdots,\ 25$ (10개)
$p=3$: $q=22,\ 23,\ 24,\ 25$ (4개)
따라서 구하는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 14이다.
답 14

〈 확률과 통계 〉

23

[풀이]

주어진 조건에서 $n=80$, $p=\dfrac{1}{8}$이므로

$\mathrm{E}(X)=np=10$

답 ①

24

[풀이]

주어진 다항식의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r x^{5r} x^{-2(6-r)} = {}_6\mathrm{C}_r x^{7r-12}$

$7r-12=2$에서 $r=2$

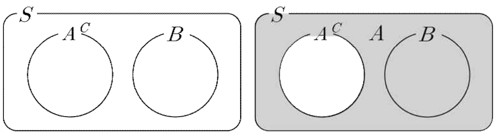
따라서 x^2의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_2=15$이다.

답 ⑤

25

[풀이]

두 사건 A^C과 B가 서로 배반사건이므로



$A^C \cap B=\varnothing$, 즉 $B \subset A$

$\therefore$ $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A-B)$

$=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{7}=\dfrac{3}{14}$

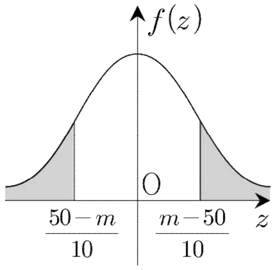
답 ②

26

[풀이]

확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{10}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\le 50)=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{50-m}{10}\right)=0.2119$



(단, 어둡게 색칠된 두 영역의 넓이는 0.2119로 같다.)

그런데 정규분포의 확률밀도함수는 $z=0$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{m-50}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{m-50}{10}\right)$

$=0.5-0.2119=0.2881$

$\dfrac{m-50}{10}=0.8$

$\therefore$ $m=58$

답 ④

27

[풀이1]

(1) $f(4)=4$인 경우

(가): $f(1)+f(2)+f(3)\ge 12$

(나): $f(1)\ne 4$, $f(2)\ne 4$, $f(3)\ne 4$

즉, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 가질 수 있는 값은 1, 2, 3 중의 하나이다.

그런데 $3+3+3=9<12$이므로 $f(4)\ne 4$이다.

(2) $f(4)=3$인 경우

(가): $f(1)+f(2)+f(3)\ge 9$

(나): $f(1)\ne 3$, $f(2)\ne 3$, $f(3)\ne 3$

즉, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 가질 수 있는 값은 1, 2, 4 중의 하나이다.

$4+4+4=12\ge 9$ $\cdots$(경우1)

$4+4+2=10\ge 9$ $\cdots$(경우2)

$4+4+1=9\ge 9$ $\cdots$(경우3)

각각의 경우에 대하여 함수 f의 개수는

(경우1): 1개
(경우2): 3개
(경우3): 3개
(3) $f(4)=2$인 경우
(가): $f(1)+f(2)+f(3)\geq 6$
(나): $f(1)\neq 2$, $f(2)\neq 2$, $f(3)\neq 2$
즉, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 가질 수 있는 값은 1, 3, 4 중의 하나이다.
(가)의 부정을 생각하자.
(가)의 부정: $f(1)+f(2)+f(3)<6$
$1+1+1=3<6$ …(경우4)
$1+1+3=5<6$ …(경우5)
각각의 경우에 대하여 함수 f의 개수는
(경우4): 1개
(경우5): 3개
따라서 함수 f의 개수는
${}_3\Pi_3-(1+3)=3^3-4=23$
(4) $f(4)=1$인 경우
(가): $f(1)+f(2)+f(3)\geq 3$
(나): $f(1)\neq 1$, $f(2)\neq 1$, $f(3)\neq 1$
즉, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 가질 수 있는 값은 2, 3, 4 중의 하나이다.
함수 f의 개수는
${}_3\Pi_3=27$
(1)~(4)에서 함수 f의 개수는
$0+7+23+27=57$
답 ⑤

[풀이2]
조건 (나)를 만족시키는 함수 f의 개수는
${}_4C_1\times{}_3\Pi_3=108$
조건 (가)의 부정은 다음과 같다.
'$f(1)+f(2)+f(3)<3f(4)$' …(*)
$f(4)=1$: $f(1)+f(2)+f(3)<3$
$2+2+2=6>3$이므로
(*)를 만족시키는 함수 f는 없다.
$f(4)=2$: $f(1)+f(2)+f(3)<6$
$3+1+1<6$, $1+1+1<6$이므로
(*)를 만족시키는 함수 f의 개수는 $3+1=4$이다.
$f(4)=3$: $f(1)+f(2)+f(3)<9$
$4+4+4=12>9$, $4+4+2>9$,
$4+4+1=9$이므로
(*)를 만족시키는 함수 f의 개수는
${}_3\Pi_3-(1+3+3)=20$이다.
$f(4)=4$: $f(1)+f(2)+f(3)<12$
$3+3+3<12$이므로
(*)를 만족시키는 함수 f의 개수는 ${}_3\Pi_3=27$이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$108-(4+20+27)=57$
답 ⑤

28

[풀이1]

	곱이 짝수	곱이 홀수	합
합이 3의 배수○	38	4	42
합이 3의 배수×	62	6	68
합	110	10	120

위의 표에 들어간 각 경우의 수는 다음과 같이 구한다.
10 이하의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 수를 선택하는 경우의 수는
${}_{10}C_3=120$
1, 3, 5, 7, 9 중에서 서로 다른 3개의 수를 선택하는 경우의 수는
${}_5C_3=10$ (세 수의 곱이 홀수인 경우)
세 수의 곱이 짝수인 경우의 수는
$120-10=110$

3으로 나눈 나머지	홀수	짝수
1	①, ⑦	❹, ❿
2	⑤	❷, ❽
0	③, ⑨	❻

세 수의 합이 3의 배수가 되는 경우를 다음과 같이 구분할 수 있다.
3으로 나눈 나머지가 모두 다른 세 수 …(Ⓐ)

(예: $1+3+8=12$)
3으로 나눈 나머지가 모두 같은 세 수 …(Ⓑ)
(예: $1+4+10=15$)
10 이하의 자연수 중에서 임의로 택한 세 수의 합이 3의 배수인 경우의 수는 위의 표에서
$\underbrace{4\times3\times3}_{\text{Ⓐ}}+\underbrace{4+1+1}_{\text{Ⓑ}}=42$
예를 들어 $1+2+3=6$, $5+2+8=15$는 3의 배수이다.
1, 3, 5, 7, 9 중에서 임의로 택한 세 수의 합이 3의 배수인 경우의 수는 위의 표에서
$\underbrace{2\times1\times2}_{\text{Ⓑ}}=4$
예를 들어 $1+5+3=9$는 3의 배수이다.
택한 세 수의 곱이 짝수이고, 합이 3의 배수인 경우의 수는
$42-4=38$
(여기까지 계산하면 맨 위의 표를 완성할 수 있다.)
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{38}{110}=\dfrac{19}{55}$
답 ③

[풀이2]
우선 선택된 세 개의 수의 곱이 짝수인 경우의 수를 구하자.
짝×짝×짝=짝(○), 짝×짝×홀=짝(○)
짝×홀×홀=짝(○), 홀×홀×홀=홀(×)
전체 경우의 수에서 '1, 3, 5, 7, 9 중에서 서로 다른 3개의 수를 선택하는 경우의 수'를 빼면 된다. 즉,
${}_{10}C_3-{}_5C_3=120-10=110$
이제 세 수의 합이 3의 배수가 되는 경우에 대하여 생각하자.

3으로 나눈 나머지	홀수	짝수
1	①, ⑦	❹, ❿
2	⑤	❷, ❽
0	③, ⑨	❻

세 수의 합이 3의 배수가 되는 경우를 다음과 같이 구분할 수 있다.
3으로 나눈 나머지가 모두 다른 세 수 …(Ⓐ)
(예: $1+3+8=12$)
3으로 나눈 나머지가 모두 같은 세 수 …(Ⓑ)
(예: $1+4+10=15$)
세 수의 곱이 짝수이고, 세 수의 합이 3의 배수인 경우를 다음과 같이 구분하여 생각할 수 있다.
(경우1): 짝×짝×짝=짝, 짝+짝+짝=(3의 배수)
경우의 수는
$\underbrace{2\times2\times1}_{\text{Ⓐ짝짝짝}}=4$
예를 들어 (❹, ❽, ❻), …이 가능하다.
(경우2): 짝×짝×홀=짝, 짝+짝+홀=(3의 배수)
경우의 수는
$\underbrace{2\times2\times2}_{\text{Ⓐ짝짝홀}}+\underbrace{2\times1\times1}_{\text{Ⓐ짝홀짝}}+\underbrace{2\times2\times1}_{\text{Ⓐ홀짝짝}}+\underbrace{2+1}_{\text{Ⓑ짝짝홀}}=17$
예를 들어 (❹, ❷, ③), (❿, ⑤, ❻), (①, ❷, ❻), (①, ❹, ❿), …이 가능하다.
(경우3): 짝×홀×홀=짝, 짝+홀+홀=(3의 배수)
$\underbrace{2\times1\times2}_{\text{Ⓐ짝홀홀}}+\underbrace{2\times2\times2}_{\text{Ⓐ홀짝홀}}+\underbrace{2\times1\times1}_{\text{Ⓐ홀홀짝}}+\underbrace{2+1}_{\text{Ⓑ짝홀홀}}=17$
예를 들어 (❹, ⑤, ⑨), (①, ❽, ③), (⑦, ⑤, ❻), (①, ⑦, ❹), …이 가능하다.
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{4+17+17}{110}=\dfrac{19}{55}$
답 ③

29

[풀이]
조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는
${}_4H_{12}={}_{4+12-1}C_{12}={}_{15}C_{12}={}_{15}C_3=455$
조건 (나)의 부정을 생각하자.
조건 (나)의 부정:
$a=2(\cdots A)$ 또는 $a+b+c=10(\cdots B)$이다.
$n(A)$의 값을 구하자.
$a=2$: $b+c+d=10$이므로
순서쌍 $(2,\ b,\ c,\ d)$의 개수는
${}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$
$n(B)$의 값을 구하자.

$a+b+c=10$: $d=2$이므로
순서쌍 $(a, b, c, 2)$의 개수는
${}_3\mathrm{H}_{10}=66$
$n(A\cap B)$의 값을 구하자.
$a=2$ & $a+b+c=10$: $b+c=8$, $d=2$이므로
순서쌍 $(2, b, c, 2)$의 개수는
${}_2\mathrm{H}_8={}_{2+8-1}\mathrm{C}_8={}_9\mathrm{C}_8={}_9\mathrm{C}_1=9$
따라서 구하는 순서쌍의 개수는
$455-n(A\cup B)$
$=455-(66+66-9)$
$=332$
답 332

30

[풀이]
세 수의 합의 평균($\overline{X}$)이 2이므로
$3\overline{X}=6=\underbrace{4+1+1}_{\text{경우1}}=\underbrace{3+2+1}_{\text{경우2}}=\underbrace{2+2+2}_{\text{경우3}}$
주머니 A에서 각각의 공을 선택할 확률은
❶: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, ❷: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
주머니 B에서 각각의 공을 선택할 확률은
❸: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, ❹: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$
❺: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$
각각의 경우에 대한 확률은
(경우1): $3\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$
(경우2): $3!\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$
(경우3): $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$
$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}=\frac{7}{64}$
$\therefore\ p+q=64+7=71$
답 71

〈 미적분 〉

23

[풀이]
미적분의 기본정리에 의하여

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 - 0 = 1$$

답 ④

24

[풀이]
등비수열 $\{a_n\}$이 수렴해야 하므로

$-1 < (\text{공비}) \leq 1$, 즉, $-1 < \dfrac{|k|}{3} - 2 \leq 1$

정리하면
$3 < |k| \leq 9$
$\therefore$ $k = -9, -8, \cdots, -4, 4, \cdots, 8, 9$
따라서 모든 정수 k의 개수는 $12(=2\times 6)$이다.
답 ③

25

[풀이]
매개변수의 미분법에 의하여

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-e^{-t}+3}{e^t+2}$$

이므로 $t=0$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{2}{3}$이다.
이때, 접점의 좌표는 $(1, 1)$이므로
접선의 방정식은

$$y = \frac{2}{3}(x-1)+1$$

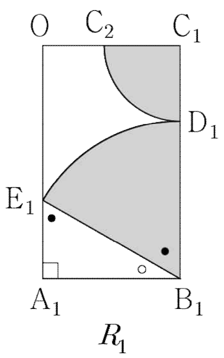
이 직선이 $(10, a)$를 지나므로

$$a = \frac{2}{3}(10-1)+1 = 7$$

답 ②

26

[풀이]



(단, $\bullet = 60^\circ$, $\circ = 30^\circ$)
직각삼각형 $E_1A_1B_1$에서

$$\overline{E_1B_1} : \overline{B_1A_1} = \frac{2}{3}\sqrt{3} : 1 = 2 : \sqrt{3}$$

$(\because \overline{E_1B_1} = \overline{D_1B_1})$
이므로 두 각 ○, ●이 위의 그림처럼 결정된다.

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{11}{36}\pi$$

두 직각삼각형 $OA_1B_1C_1$, $OA_2B_2C_2$의 닮음비는

$$\overline{OC_1} : \overline{OC_2} = 1 : 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이므로 수열 $\{S_n\}$의 공비는 $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$이다.
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{11}{36}\pi}{1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\frac{11}{36}\pi}{\frac{2\sqrt{3}-1}{3}}$$

$$= \frac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi$$

답 ⑤

27

[풀이]

문제에서 주어진 곡선은 원점 $(0,\ 0)$을 지난다.

구간 $[0,\ 1]$에서

$1 \le x^2+1 \le 2,\ x\ln(x^2+1) \ge 0$

이므로 이 구간에서 곡선 $y=x\ln(x^2+1)$은 제1사분면에 그려진다.

구하는 넓이를 S라고 하자.

$$S=\int_0^1 x\ln(x^2+1)dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \ln t dt$$

(정적분의 치환적분법을 적용한 것이다.

$x^2+1=t$로 두면 $2xdx=dt$이고,

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이다.)

$$=\frac{1}{2}[t\ln t-t]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}$$

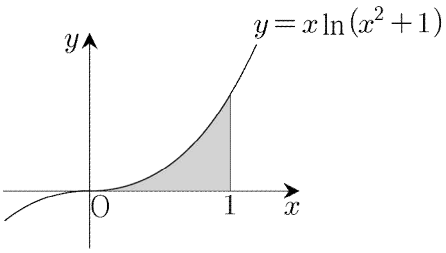
($\because$ 정적분의 부분적분법)

답 ①

[참고]

문제에서 주어진 곡선의 그래프는 아래 그림과 같다.

(실전에서는 아래의 곡선을 엄밀하게 그릴 필요는 없다.)

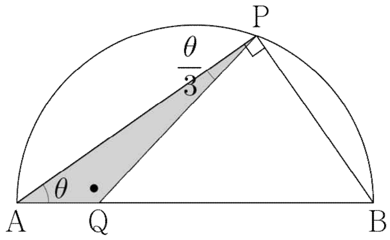


곡선 $y=x\ln(x^2+1)$은 원점에 대하여 대칭이다.

그리고 $y'=\ln(x^2+1)+\dfrac{2x^2}{x^2+1} \ge 0$이므로 이 함수는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

28

[풀이1]



(단, $\bullet=\pi-\dfrac{4}{3}\theta$)

직각삼각형 ABP에서 삼각비의 정의에 의하여

$l(\theta)=\overline{\text{PB}}=2\sin\theta$, $\overline{\text{AP}}=2\cos\theta$

삼각형 PAQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\text{AP}}}{\sin\left(\pi-\frac{4}{3}\theta\right)}=\frac{\overline{\text{AQ}}}{\sin\frac{\theta}{3}},\ \text{즉}\ \overline{\text{AQ}}=\frac{2\cos\theta\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}$$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times 2\cos\theta\times\frac{2\cos\theta\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}\times\sin\theta$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

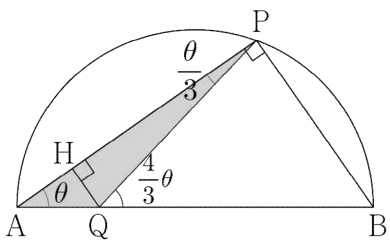
$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{l(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\cos^2\theta\sin\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{4}{3}\theta}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{4}$$

답 ③

[참고1]

$S(\theta)$의 식을 다음과 같이 유도해도 좋다.

점 Q에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H, $\overline{\text{QH}}=h(\theta)$라고 하자.



두 직각삼각형 QHA, PHQ에서

$\overline{\text{AH}}=h(\theta)\cot\theta$, $\overline{\text{PH}}=h(\theta)\cot\dfrac{\theta}{3}$

이므로

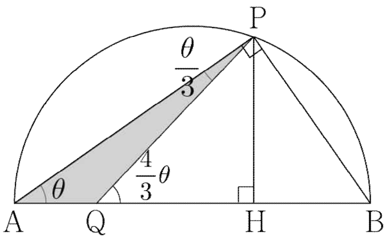
$$h(\theta)\cot\theta+h(\theta)\cot\frac{\theta}{3}=2\cos\theta$$

$$h(\theta)=\frac{2\cos\theta}{\cot\theta+\cot\frac{\theta}{3}},\quad S(\theta)=\frac{2\cos^2\theta}{\cot\theta+\cot\frac{\theta}{3}}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{l(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta+\cos\frac{\theta}{3}\dfrac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{3}}}$$

$$=\frac{1}{1+1\times3}=\frac{1}{4}$$

[참고2]
$S(\theta)$의 식을 다음과 같이 유도해도 좋다.
점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



직각삼각형 PAH에서
$\overline{\mathrm{PH}}=2\cos\theta\sin\theta\,(\because \overline{\mathrm{AP}}=2\cos\theta)$
직각삼각형 PQH에서
$$\overline{\mathrm{QH}}=2\cos\theta\sin\theta\cot\frac{4}{3}\theta$$

$$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{QH}}=2\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta\cot\frac{4}{3}\theta$$

$$S(\theta)=2\cos^2\theta\sin\theta\left(\cos\theta-\frac{\sin\theta\cos\frac{4}{3}\theta}{\sin\frac{4}{3}\theta}\right)$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{l(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\cos^2\theta\left(\cos\theta-\frac{\sin\theta\cos\frac{4}{3}\theta}{\sin\frac{4}{3}\theta}\right)$$

$$=1^2\times\left(1-\frac{1}{\frac{4}{3}}\right)=\frac{1}{4}$$

[풀이2]
근사적인 계산을 하면 빠르게 문제를 해결할 수 있다.
사인법칙에 의하여
$$\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\sin\frac{\theta}{3}}=\frac{\overline{\mathrm{QP}}}{\sin\theta},\ \text{즉}\ \overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{QP}}=\sin\frac{\theta}{3}:\sin\theta$$
이때, $\theta\to0+$이면 $\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{QP}}\approx1:3$이고, 점 P는 점 B에 한없이 가까워지므로
점 Q는 선분 AB의 1:3내분점에 한없이 가까워진다.
$\theta\to0+$일 때,
$$\overline{\mathrm{AP}}\approx2,\ \overline{\mathrm{AQ}}\approx\frac{1}{2},\ \overline{\mathrm{QP}}\approx\frac{3}{2},$$

$$\sin(\angle\mathrm{AQP})\approx\frac{4}{3}\theta$$
이므로
$$S(\theta)\approx\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\theta,\ l(\theta)\approx2\theta$$

$$\therefore \frac{S(\theta)}{l(\theta)}\approx\frac{1}{4}$$

[참고3]
다음과 같은 근사적인 계산도 가능하다.
$$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\,\overline{\mathrm{AQ}}\sin\theta\approx\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}\times\theta=\frac{\theta}{2}$$
$$l(\theta)\approx2\theta$$
$$\therefore \frac{S(\theta)}{l(\theta)}\approx\frac{1}{4}$$

29

[풀이]
문제에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$F'(x)=t-f(x)$
함수 $F(x)$가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가지므로
$F'(\alpha)=0$, 즉 $f(\alpha)=t$에서 $f(g(t))=t$ …㉠
정적분의 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구하자.
$g(t)=x$로 두면 $g'(t)dt=dx$이고, …㉡
$t=f(1)$일 때 $x=1$, $t=f(5)$일 때 $x=5$이다.
($\because$ ㉠에서 역함수의 성질을 적용)

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(g(t))g'(t)=1$, 즉 $f'(x)g'(t)=1$에서

$$f'(x)=\frac{1}{g'(t)},\ f'(x)dx=dt(\because ㉡) \qquad \cdots ㉢$$

$$\therefore \int_{f(1)}^{f(5)}\frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$$

$$=\int_1^5\frac{x}{1+e^x}f'(x)dx(\because g(t)=x,\ ㉢)$$

$$=\int_1^5 xdx(\because f'(x)=e^x+1)$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^5=12$$

답 12

30

[풀이1]

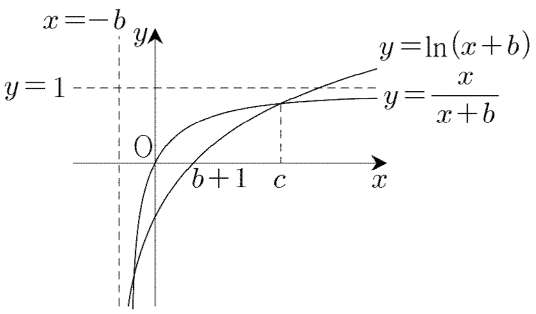
우선 구간 $(0,\ \infty)$에서의 함수 $f(x)$의 그래프를 그리자.

구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{\frac{x}{x+b}-\ln(x+b)}{x^2}$$

방정식 $f'(x)=0$을 정리하면

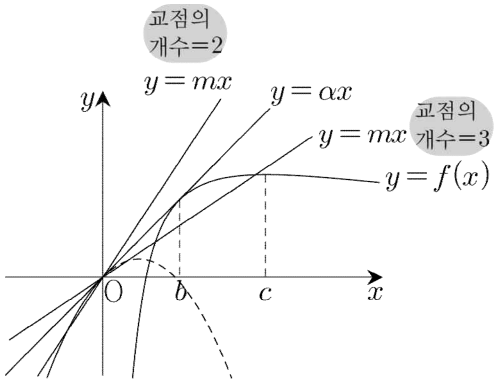
$$\frac{x}{x+b}=\ln(x+b)\ (\text{단, } 0<b<1)$$



위의 그림처럼 두 곡선

$$y=\ln(x+b),\ y=\frac{x}{x+b}$$

는 구간 $(0,\ \infty)$에서 하나의 교점을 가진다. 이때, 교점의 x좌표를 c로 두면 $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 양(+)에서 음(−)으로 바뀐다. 따라서 $x=c$에서 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.



위의 그림처럼 직선 $y=mx$가 두 곡선 $y=-x^2+ax$, $y=\frac{\ln(x+b)}{x}$에 동시에 접할 때, m의 값을 α로 두면 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

왜냐하면

$$\lim_{m\to\alpha-}g(m)-\lim_{m\to\alpha+}g(m)=3-2=1$$

이기 때문이다. (문제에서 양수 α가 오직 하나 존재한다고 하였으므로, 더 이상의 α의 값을 찾을 이유가 없다.)

곡선 $y=-x^2+ax$ 위의 원점에서의 접선의 기울기는 a이므로 $\alpha=a$이다.

곡선 $y=\frac{\ln(x+b)}{x}$ 위의 점 $\left(b,\ \frac{\ln(2b)}{b}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y=\frac{\frac{1}{2}-\ln(2b)}{b^2}(x-b)+\frac{\ln(2b)}{b}$$

정리하면

$$y=\frac{\frac{1}{2}-\ln(2b)}{b^2}x+\frac{2\ln(2b)-\frac{1}{2}}{b}$$

이 직선은 직선 $y=ax(=\alpha x)$와 일치하므로

$$\frac{\frac{1}{2}-\ln(2b)}{b^2}=a,\ \frac{2\ln(2b)-\frac{1}{2}}{b}=0$$

후자의 등식에서 $\ln(2b)=\frac{1}{4}$이고, 이를 전자의 식에 대입하여 정리하면

$$ab^2=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ p=4,\ q=1,\ p+q=5$

답 5

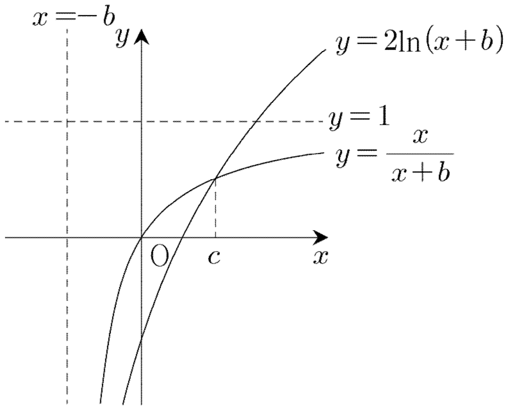
[참고]
상수 α의 값은 다음과 같이 결정하면 된다.
양수 m의 값이 커질 때,
직선 $y=mx$와 곡선 $y=\dfrac{\ln(x+b)}{x}(x>0)$의 교점의 개수의 변화를 관찰하면
2 ⇨ 1(접할 때) ⇨ 0
직선 $y=mx$와 곡선 $y=-x^2+ax(x\le 0)$의 교점의 개수의 변화를 관찰하면
1 ⇨ 1(접할 때) ⇨ 2
위의 변화에서
(맨 왼쪽의 두 수의 합)$-$(맨 오른쪽의 두 수의 합)
$=2+1-(0+2)=1$
이고, 상수 α는 유일하게 결정되므로 $y=\alpha x$가 두 곡선에 동시에 접할 때임을 알 수 있다.

[풀이2]
$f(x)=mx$
$\Leftrightarrow$
$x=0$
또는
$-x+a=m(x\le 0)$, $\dfrac{\ln(x+b)}{x^2}=m(x>0)$

우선 함수 $y=\dfrac{\ln(x+b)}{x^2}$ $(x>0)$의 그래프를 그리자.

$$y'=\frac{\dfrac{x}{x+b}-2\ln(x+b)}{x^3}$$

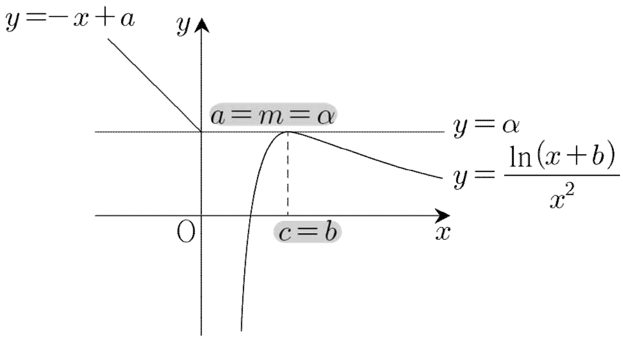
$y'=0$에서 $\dfrac{x}{x+b}=2\ln(x+b)$ (단, $x>0$)



위의 그림처럼 두 곡선 $y=\dfrac{x}{x+b}$, $y=2\ln(x+b)$은 오직 한 점에서 만난다. 이때, 이 교점의 x좌표를 c라고 하자.

$\dfrac{c}{c+b}=2\ln(c+b)$ $\cdots$㉠

$x=c$에서 함수 $y=\dfrac{\ln(x+b)}{x^2}$는 극댓값(최댓값)을 가지므로 함수 $\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프는 아래 그림과 같다.



위의 그림처럼 $m=\alpha=a$이면
$\lim\limits_{m\to\alpha-}g(m)-\lim\limits_{m\to\alpha+}g(m)=3-2=1$
이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다. (문제에서 양수 α가 오직 하나 존재한다고 하였으므로, 더 이상의 α의 값을 찾을 이유가 없다.)

이때, $\dfrac{\ln(c+b)}{c^2}=a$ $\cdots$㉡

한편 문제에서 주어진 조건에서
$\alpha b=f(b)$, 즉 $\alpha=\dfrac{f(b)}{b}$이므로 $c=b$ $\cdots$㉢

이제 ㉢을 ㉠, ㉡에 대입하여 정리하면
$\dfrac{1}{2}=2\ln(2b)$(즉, $\ln(2b)=\dfrac{1}{4}$), $\dfrac{\ln(2b)}{b^2}=a$
연립하면

$ab^2 = \dfrac{1}{4}$

$\therefore\ p=4,\ q=1,\ p+q=5$

답 5

〈 기하 〉

23

[풀이]

점 Q의 좌표는 $(1,\ -3,\ 4)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=|3-(-3)|=6$

답 ①

24

[풀이1]

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 두고 원 C의 자취를 구하자.

문제에서 주어진 등식에서

$x^2+y^2-4x-6y=3$

정리하면

$(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$

원 C의 반지름의 길이는 4이다.

답 ④

[풀이2]

문제에서 주어진 등식을 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=16$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=4^2,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=4$$

즉, 점 P의 자취는 중심이 $(2,\ 3)$이고, 반지름의 길이가 4인 원이다.

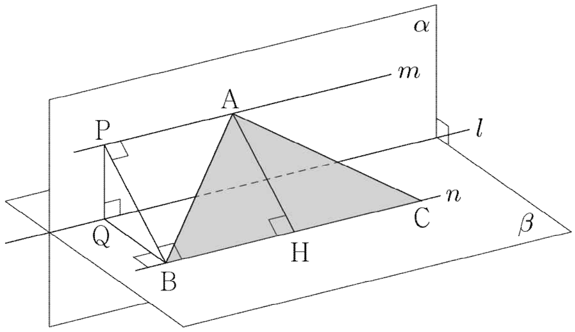
따라서 원 C의 반지름의 길이는 4이다.

답 ④

25

[풀이1]

점 A에서 직선 n에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{\mathrm{PQ}}\perp\beta(\because\overline{\mathrm{PQ}}\perp l)$, $\overline{\mathrm{QB}}\perp n$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PB}}\perp n$

그리고 $m\,/\!/\,n(\because l\,/\!/\,m,\ l\,/\!/\,n)$이므로

$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$

직각삼각형 PQB에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PB}}=5$

$\therefore$ ($\triangle$ABC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}\,\overline{\mathrm{AH}}$

$=\dfrac{1}{2}(2\overline{\mathrm{AP}})\overline{\mathrm{PB}}=4\times5=20$

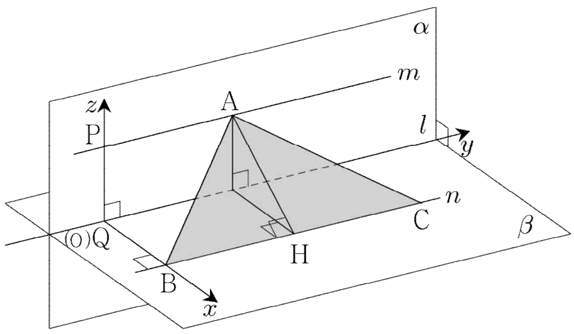
답 ②

[풀이2]

아래 그림처럼 좌표공간을 도입하자.

그리고 점 A에서 직선 n에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

이때, 이등변삼각형의 성질에 의하여 점 H는 선분 BC의 중점이다.



각 점의 좌표는

Q(O)$(0,\ 0,\ 0)$, B$(4,\ 0,\ 0)$, P$(0,\ 0,\ 3)$,

A$(0,\ 4,\ 3)$, H$(4,\ 4,\ 0)$

$\therefore$ ($\triangle$ABC의 넓이)$=\overline{\mathrm{AH}}\,\overline{\mathrm{BH}}=5\times4=20$

답 ②

26

[풀이1]

접점의 좌표를 $(x_0,\ y_0)$라고 하자.

이 점은 주어진 타원 위에 있으므로

$x_0^2+3y_0^2=19$ $\cdots$㉠

접선의 방정식은

$x_0x+3y_0y=19$

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$\dfrac{19}{\sqrt{x_0^2+(3y_0)^2}}=\dfrac{19}{5}$, 즉

$x_0^2+9y_0^2=25$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$y_0=1,\ x_0=4\ (y_0>0,\ x_0>0)$

$\therefore$ (직선 l의 기울기)$=-\dfrac{x_0}{3y_0}=-\dfrac{4}{3}$

답 ⑤

[풀이2]

기울기가 m이고, 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하는 직선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

문제에서 주어진 타원에서 $a^2=19,\ b^2=\dfrac{19}{3}$이므로

$y=mx\pm\sqrt{19m^2+\dfrac{19}{3}}$

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$\dfrac{\sqrt{19m^2+\dfrac{19}{3}}}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{19}{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2=\dfrac{16}{9}$

$\therefore\ m=-\dfrac{4}{3}$

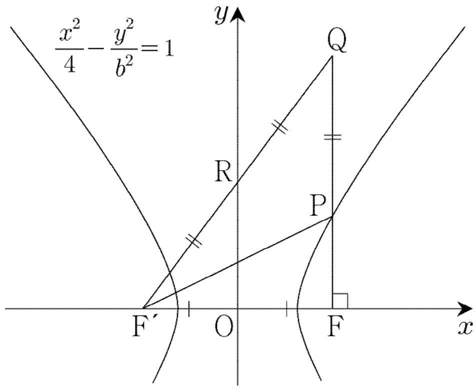
($\because$ 직선 l은 제1사분면에서 타원에 접하므로 $m<0$)

답 ⑤

27

[풀이]

$\overline{\mathrm{PF}}=3k(k>0)$로 두면 $\overline{\mathrm{QP}}=5k$, $\overline{\mathrm{QF}}=8k$이다.



$\overline{\mathrm{F'O}}=\overline{\mathrm{OF}}$에서 $\overline{\mathrm{F'R}}=\overline{\mathrm{RQ}}=5k$

($\because\ \overline{\mathrm{RO}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{QF}}$이므로 $\overline{\mathrm{F'O}}:\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{F'R}}:\overline{\mathrm{RQ}}$)

직각삼각형 QF′F에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{F'F}}=6k$, 즉 $2c=6k$에서 $c=3k$

직각삼각형 PF′F에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}=3\sqrt{5}k$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=4(=2a)$

즉, $3\sqrt{5}k-3k=4$

풀면 $k=\dfrac{\sqrt{5}+1}{3}$

$\therefore\ b^2=c^2-a^2=(3k)^2-4=2+2\sqrt{5}$

답 ④

28

[풀이]

좌표평면에서

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$

인 점 P′는 단위원(반원) 위에 있다. (단, $x\geq 0$)

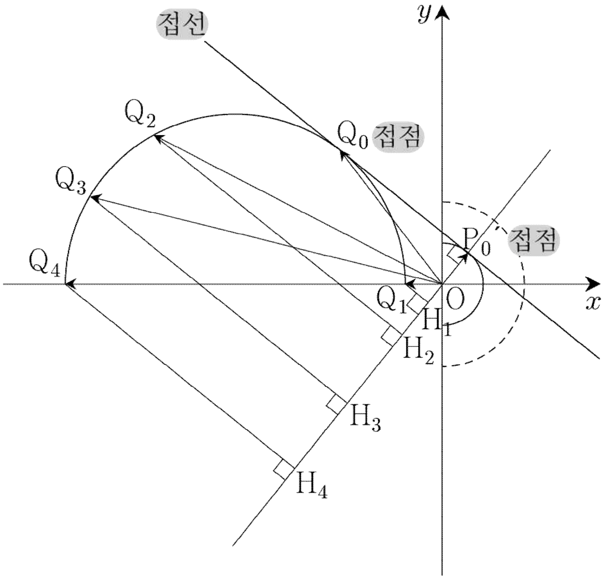
문제에서 주어진 등식을 다음과 같이 변형하자.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=1$ $\cdots(*)$

아래 그림처럼 두 반원에 동시에 접하는 접선을 긋고, 각 반원 위의 접점을 각각 $\mathrm{P_0}'$, $\mathrm{Q_0}$라고 하자.

그리고 반원 $(x+5)^2+y^2=16(y\geq 0)$ 위의 $\mathrm{Q_0}$가 아닌 점 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$, $\mathrm{Q_3}$, $\mathrm{Q_4}$를 아래 그림과 같이 잡고,

이 네 점에서 직선 $\mathrm{OP_0}'$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$, $\mathrm{H_3}$, $\mathrm{H_4}$라고 하자. (이때, 점 $\mathrm{Q_0}$에서 직선 $\mathrm{OP_0}'$에 내린 수선의 발은 $\mathrm{P_0}'$이다.)



위의 그림에서 등식 (*)을 만족시키는 점 Q는 접점 $\mathrm{Q_0}$뿐임을 알 수 있다.

왜냐하면

$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ_0}} = |\overrightarrow{\mathrm{OP_0}'}|^2 = 1$

인 반면

$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ_1}} = -|\overrightarrow{\mathrm{OP_0}'}||\overrightarrow{\mathrm{OH_1}}| < 0$

이고, 다른 세 점 $\mathrm{Q_2}$, $\mathrm{Q_3}$, $\mathrm{Q_4}$에 대해서도 마찬가지이기 때문이다.

(좀 더 부연설명을 하면, 점 Q가 점 $\mathrm{Q_1}(-1,\ 0)$에서 $\mathrm{Q_4}(-9,\ 0)$까지 호를 따라서 움직일 때, $\overrightarrow{\mathrm{OP_0}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 값은 음수(−) ⇨ 1(극대) ⇨ 음수(−)로 변한다.)

한편 접선의 방정식은

$$\frac{a}{2}x + \frac{b}{2}y = 1$$

이 직선이 반원 $(x+5)^2 + y^2 = 16(y \geq 0)$에 접하므로

$$\frac{\frac{5}{2}a + 1}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}} = 4,\ \text{즉}\ \frac{5}{2}a + 1 = 4,\ a = \frac{6}{5}$$

(∵ 점 $(a,\ b)$는 반원 $x^2 + y^2 = 4(x \geq 0)$ 위의 점이므로 $a^2 + b^2 = 4$)

$$b = \sqrt{4 - a^2} = \frac{8}{5}$$

정리하면

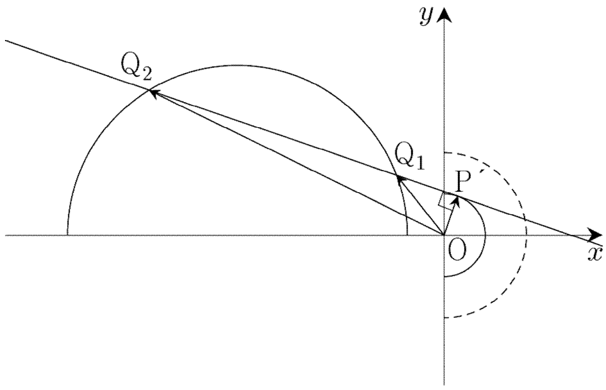
$$a = \frac{6}{5},\ b = \frac{8}{5}$$

$$\therefore\ a + b = \frac{14}{5}$$

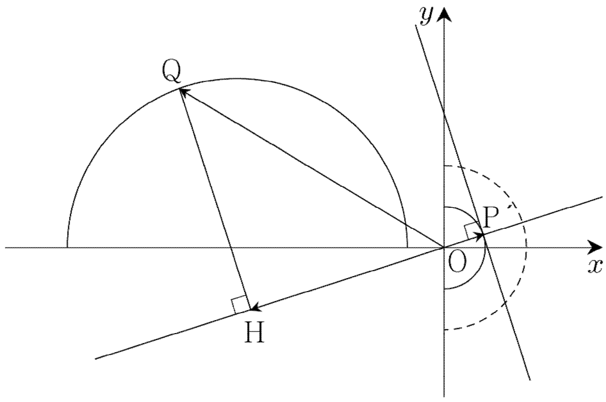
답 ⑤

[참고1]

공통외접선이 아닌 경우를 살펴보자.



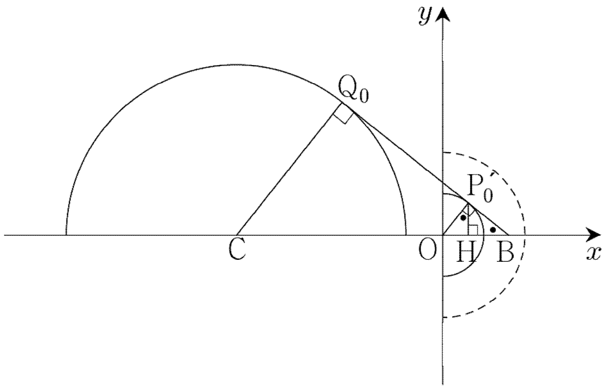
위의 그림처럼 점 P′에서의 접선이 제2사분면에 놓인 반원과 두 점에서 만나면 (*)을 만족시키는 점 Q가 2개 존재한다.



위의 그림처럼 점 P′에서의 접선이 제2사분면에 놓인 반원과 만나지 않으면 (*)을 만족시키는 점 Q는 존재하지 않는다.

[참고2]

점 P의 좌표를 기하학적으로 구해보자.



제2사분면에 놓인 반원의 중심을 C, 점 P'_0에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 직선 $P_0'Q_0$가 x축과 만나는 점을 B라고 하자.

서로 닮음인 두 직각삼각형 BOP_0', BCQ_0에 대하여

$\overline{BO}:\overline{OP_0'}=\overline{BC}:\overline{CQ_0}$, 즉 $\overline{BO}:1=\overline{BO}+5:4$

풀면 $\overline{BO}=\frac{5}{3}$이므로

직각삼각형 BOP_0'의 세 변의 길이의 비는 $5:3:4$이다.

두 직각삼각형 BOP_0', $P_0'OH$는 서로 닮음이므로

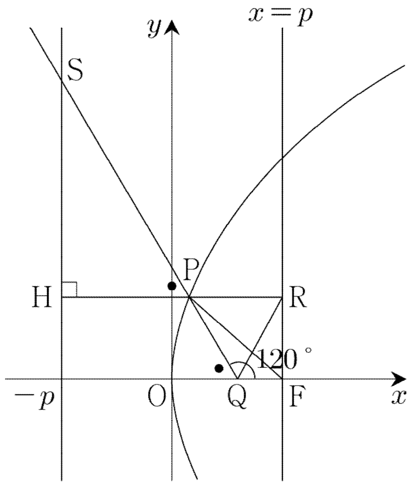
$\overline{OH}=\frac{3}{5}$, $\overline{HP_0'}=\frac{4}{5}$, 즉 $P_0'\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$\therefore$ $P\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$

29

[풀이]

점 P에서 직선 $x=-p$(준선)에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 그리고 정삼각형 PQR의 한 변의 길이를 $2t$라고 하자. 이때, $\overline{QF}=t$이다.



(단, ●$=60°$)

삼각형 PQF에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PF}^2=\overline{PQ}^2+\overline{QF}^2-2\overline{PQ}\,\overline{QF}\cos 120°$

$=5t^2-2\times 2t^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7t^2$

$\overline{PF}=\sqrt{7}t$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{PH}=\sqrt{7}t$

직각삼각형 SHP에서 삼각비의 정의에 의하여

$\frac{\sqrt{21}-\sqrt{3}t}{\sqrt{7}t}=\tan 60°$, 즉 $t=\frac{7-\sqrt{7}}{6}(=\overline{QF})$

$\therefore$ $a=7$, $b=-1$, $a+b=6$

답 6

30

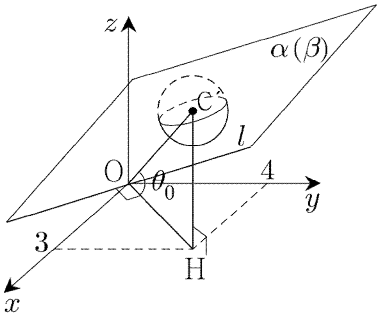
[풀이]

두 점 A, C를 z축의 양의 방향으로 -1만큼 평행이동한 두 점을 각각

$O(0, 0, 0)$(즉, 원점), $C'(3, 4, 4)$

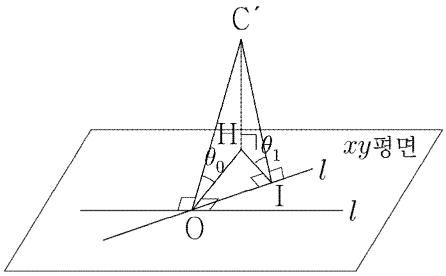
라고 하자.

그리고 점 C'에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H, 직선 OC'가 xy평면과 이루는 각 $\angle C'OH$의 크기를 θ_0라고 하자.



좌표공간에서 직선 $\mathrm{OC'}$를 포함한 평면을 α, 평면 α와 xy평면의 교선을 l, 평면 α와 xy평면이 이루는 이면각의 크기를 θ라고 하자.

아래는 '점 H에서 직선 l에 내린 수선의 발이 O인 경우'와 '점 H에서 직선 l에 내린 수선의 발이 O가 아닌 경우(이때, 수선의 발을 I라고 하자.)'를 모두 그린 것이다. 후자에 대하여 이면각의 크기를 θ_1이라고 하자.



xy평면에서

(점 H에서 직선 l까지의 거리)$\leq \overline{\mathrm{HO}}$

(단, 등호는 점 H에서 직선 l에 내린 수선의 발이 O일 때 성립한다.)

이므로

$\overline{\mathrm{HI}} < \overline{\mathrm{HO}}$

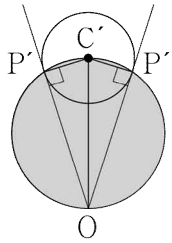
그런데 두 직각삼각형 $\mathrm{C'HO}$, $\mathrm{C'HI}$에 대하여

$\tan\theta_0 = \dfrac{\overline{\mathrm{HC'}}}{\overline{\mathrm{OH}}}$, $\tan\theta_1 = \dfrac{\overline{\mathrm{HC'}}}{\overline{\mathrm{IH}}}$

이므로 $\tan\theta_0 < \tan\theta_1$, 즉 $\theta_0 < \theta_1$

따라서 $\theta \geq \theta_0$이다. 즉, 평면 α와 xy평면이 이루는 이면각의 크기의 최솟값은 θ_0이다. $\theta = \theta_0$일 때, 평면 α를 평면 β라고 하자.

이제 평면 β로 구가 잘린 단면(원)을 생각하자.



위의 그림처럼 평면 β 위의 점 O에서 원($\subset \beta$)에 그은 접선의 접점은 $\mathrm{P'}$이다. (이때, 점 $\mathrm{P'}$는 점 P를 z축의 양의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.)

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{OC'}} = \sqrt{41}$

이므로 세 점 O, $\mathrm{C'}$, $\mathrm{P'}$을 지나는 원의 넓이는 $\dfrac{41}{4}\pi$이다.

따라서 구하는 정사영의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{41}{4}\pi \times \cos\theta_0 = \dfrac{5}{4}\sqrt{41}\pi$

$\left(\because \cos\theta_0 = \dfrac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{C'O}}} = \dfrac{5}{\sqrt{41}}\right)$

$\therefore\ p=4,\ q=5,\ p+q=9$

답 9