# 9월 모의고사
# 집중분석

by Mediva

# 9월 모의고사 문항 분석

16. 역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 $A$, $B$가

$$(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=4E$$

를 만족시킨다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $E$는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^{-1}+B^{-1}$의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. $A=E$이면 $B=E$이다.
ㄷ. $AB=\frac{1}{2}E$이면 $A^2+B^2=E$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

모처럼 나온 행렬의 성질 문제인데, 6월에 비해서는 약간 응용되어서 나온 느낌이다. 최근 수능과 모의고사에서 이러한 유형의 문제가 잘 등장하지 않아서 상대적으로 어렵게 느껴졌을 수 있는데, 이런 유형의 문제를 해결하는 방법들을 평소에 정리해 두고 있다면 생각보다 쉽게 풀렸을 것 같다.

# Warming Up

문제풀이에 앞서서 개념 복습 겸 간단한 문제들을 풀어 보도록 하자.

**[1~6] 다음 명제의 참과 거짓을 판별하시오.**
여기 나오는 행렬들은 모두 이차정사각행렬이고, $E$는 단위행렬이다.

1. $AB=E$이면 $A$의 역행렬은 $B$이다.
2. $AB=E$이면 $BA=E$이다.
3. $A^2=O$이면 $A=O$이다.
4. $A^2=O$이면 $A$의 역행렬이 존재하지 않는다.
5. 명제 $A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$은 항상 성립한다.
6. 명제 $A^2-2A+E=(A-E)^2$은 항상 성립한다.

여기 있는 문제는 16번 문제를 풀기 위해서 모두 간단히 풀 수 있어야 하는 문제들이다.

# 개념 재확인

이제 수능이 며칠 남지 않았다. 이제 조금 있으면 대학생이 된다는 마음에 설레기도 하겠지만, 이번 시험의 점수를 보면서 땅이 꺼져라 한숨 쉬는 경우가 더 많을 것 같다.

하지만 한숨이나 쉬고 있기에 수능까지 남은 시간이 아깝다. 남은 기간 동안 하루에 1점씩만 올린다고 해도 올해 대학 합격은 문제가 없을 것이다. 문제는 하루에 1점을 올리기가 그렇게 어렵다는 사실이겠지만.

이 문제는 4점짜리 문제다. 4점이라는 점수는 수능에서 어마어마한 점수이다. 이미 닳고 닳은 수험생 생활에서 수능 점수 1점이 얼마나 중요한지는 몸으로 깨달았을 터, 4점은 말 할 것도 없다.

사설이 길었는데, 4점짜리 문제 치고는 생각보다 답이 쉽게 나올 수 있는 문제였다고 생각한다. 어렵게 느껴졌을 수도 있지만 기출문제를 제대로 공부해 왔다면 크게 새로운 내용이 나온 문제는 아니었다.

먼저 Warming Up 문제를 하나하나 살펴보도록 하자.

1. $AB=E$이면 $A$의 역행렬은 $B$이다. → 참

답은 "참"이다. 이런 의문을 가질 사람이 있을 수 있다.

"어? 교과서에서 $AX=XA=E$인 행렬 $X$가 행렬 $A$의 역행렬이라고 했는데, 여기서는 $AB=E$라고만 나왔으니까 알 수 없는 것 아닌가요?"

좋은 지적이다. 사실 이 명제를 정확히 증명하는 것은 고교수학을 벗어나는 것이다. 여기서는 간단히만 증명하려고 넘어가려는데(정확한 증명이 아니라는 말이다), 증명 울렁증이 있으면 휘리릭 넘어가 주자.

<간단한 증명>
$LA=E$, $AR=E$인 행렬 $L$과 $R$을 생각해 보자. $L=R$이면, $AB=E$이면 $BA=E$라는 명제가 성립한다고 할 수 있다. 이것은 다음과 같은 조작을 통해 증명이 가능하다.
$L=LE=L(AR)=(LA)R=ER=R$, $\therefore L=R$

이 증명은 수능에 별로 도움 되는 증명은 아니니까 몰라도 되지만 **<u>결과는 반드시 알아 두자.</u>**

2. $AB=E$이면 $BA=E$이다. → 참

1번을 증명했으니까 2번은 자연스럽게 나온다. $AB=E$이면 $A^{-1}=B$이고 $B^{-1}=A$이다. 따라서 $BA=BB^{-1}=E$가 된다.

이 경우는 매우 중요하다. 행렬에서 교환법칙은 대체적으로 성립하지 않는데, 이 경우는 성립하는 경우이기 때문이다. **<u>이 결과도 반드시 알아 두도록 하자.</u>**

**3. $A^2=O$이면 $A=O$이다. → 거짓**

이건 많이 봤을 것 같다. 그렇지 않았다면 행렬 공부를 제대로 안했다고밖에 할 수가 없다.

$a$가 실수라면 $a^2=0$이면 누가 뭐래도 $a=0$이다. 하지만 행렬에서는 '영인자'라는 것이 존재하기 때문에 $A^2=O$이라도, $A=O$이 아닐 수도 있는 것이다.

**<반례 찾을 때 자주 나오는 행렬>**

① $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

행렬의 성질에서 반례가 여러 가지가 있지만, 반례의 대부분은 이 녀석들이다. 이 경우도 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 같은 녀석은 영행렬이 아니면서도 제곱하면 영행렬이 되는 반례가 된다. 반례를 생각할 때 이 행렬들을 1순위로 두고 생각하면 생각보다 반례가 빨리 발견될 수 있다.

**4. $A^2=O$이면 $A$의 역행렬이 존재하지 않는다. → 참**

이것도 공부를 열심히 했다면 한 번쯤은 봤거나 생각해봤어야 할 내용이다. 역행렬이 존재하지 않는 것을 증명하기 위해서는 **"역행렬이 존재한다고 가정"**하고 그게 말이 안 되는 것을 보여 주면 된다.

그래서 $A^{-1}$가 존재한다고 생각해 보자. 그러면 양 변에 $A^{-1}$를 곱할 수가 있는데, 그러면 식이 $A=O$이 된다. 그런데 영행렬은 역행렬이 존재하지 않는다. 따라서 역행렬이 존재한다는 가정 자체가 말이 안되는 것이다. 그러므로 $A$의 역행렬은 존재하지 않게 되는 것이다. 이 스킬은 꽤나 유용하니 알아 두기를 바란다.

**5. 명제 $A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$은 항상 성립한다. → 거짓**

딱 봐도 틀리게 생겼다. 행렬에서는 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않는다고 귀에 못이 박히도록 들었을 것이다. 대놓고 틀린 보기다.

주의할 것은 교환법칙이 성립하지 않는다는 말은 **"항상 성립하지 않는다는 말"이 아니다.** 성립할 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다는 말이다.

**6. 명제 $A^2-2A+E=(A-E)^2$은 항상 성립한다. → 참**

바로 요런 녀석들이 있기 때문에 그런 것이다. 아까 역행렬도 교환법칙이 성립한다고 했는데, 단위행렬도 교환법칙이 성립하는 대표적인 예 중에 하나다. $AE=EA=A$이기 때문이다. 그래서 5번은 틀리지만 6번은 맞게 된다는 사실.

이제 본격적으로 문제풀이를 시작해 보도록 하자.

# 꼼꼼한 문제풀이

위에서 개념을 다시 잡고 왔으니 이제 본격적으로 문제풀이를 시작해 보도록 하자. 행렬의 성질 문제를 해결할 때 중요한 것은 각종 행렬의 성질을 암기하기보다, 문제에서 주어진 실마리를 가지고 차근차근 해결해 가는 것이다.

먼저 보기를 살펴보자. ㄱ, ㄴ, ㄷ이 있는 것을 확인할 수 있다. **수능 문제에서는 대체적으로 ㄱ번 보기는 쉽게 해결할 수 있도록 "예시"에 해당하는 것을 준다.** 특히나 각종 성질을 발견해야 하는 문제에서는 더더욱 그러하다.

### 〈수능 출제 매뉴얼의 예시 문항〉

두 이차정사각행렬 $A$와 $B$에 대하여

$$AB+A=E,\ AB+BA=A+B$$

일 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

**ㄱ. 행렬 $A$가 역행렬을 갖는다.**
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. 행렬 $B$가 역행렬을 갖는다.

→

두 이차정사각행렬 $A$와 $B$에 대하여

$$AB+A=E,\ AB+BA=A+B$$

일 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $E$는 단위행렬이다.)

**ㄱ. 행렬 $A$의 역행렬은 $B+E$이다.**
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. 행렬 $B$가 역행렬을 갖는다.

**평가원의 코멘트** : 문항 초안을 해결하기 위해서는 <보기>에서 먼저 $AB+A=E$을 이용하여 ㄱ이 참임을 설명하고, 이를 이용하여 ㄴ이 참임을 증명해야 한다. (중략) 그러나 검토 교사의 검토 결과 기이 참이 된다는 것을 쉽게 알았지만 $AB+A=E$만을 이용하여 ㄴ이 참이 된다는 것은 알아차리지 못하였다. (중략) 그래서 <보기>에서 'ㄱ'을 다소 수정하여 '행렬 $A$의 역행렬은 $B+E$이다.' 와 같이 제시하였다. 이렇게 할 경우 $A(B+E)=AB+A$라는 사실, $(B+E)A=BA+A$라는 사실, $A(B+E)=(B+E)A=E$라는 사실을 이용하라는 것을 암시하게 되어 문항 초안에 비해 최종 문항이 다소 쉬워질 수 있다 (후략)

내가 한 말이 아니고 평가원에서 예전에 냈던 수능 출제 매뉴얼의 일부다. 괜히 ㄱ, ㄴ, ㄷ 순으로 풀라는 것이 아니고, 평가원에서 그렇게 풀 수 있도록 문제를 내고 있는 것이기 때문에 그런 것이다.

아차 싶은 학생들은 아직 안 늦었으니까 너무 걱정하지는 말자.

먼저 보기 ㄱ부터 살펴보도록 하자.

ㄱ. $A^{-1}+B^{-1}$의 역행렬이 존재한다.

ㄱ번 보기에서 **"역행렬이 존재한다"**라는 표현이 나온다. 역행렬이 존재하는지 확인하는 방법은 크게 두 가지가 있다.

① **행렬의 원소가 주어진 경우** : $D \neq 0$ 임을 확인한다.
② **행렬의 원소가 주어지지 않은 경우**
이차정사각행렬 A의 역행렬 존재 여부를 확인하기 위해서는 $AX=E$ 형태를 확인

이 문제는 ② 형태를 따르고 있다. 문제에서 역행렬 존재 여부를 확인해야 할 행렬은 "$A^{-1}+B^{-1}$"이다. 그러면 $(A^{-1}+B^{-1})\cdot X=E$의 식이 있는가를 봐야 하는데, ㄱ번 보기답게 쉽게 $(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=4E$라고 문제에 있는 식에 그대로 그 형태가 있다. 식을 변형하면 $\frac{1}{4}(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=E$가 되므로, $A^{-1}+B^{-1}$의 역행렬은 $\frac{1}{4}(A+B)$가 되겠다. 따라서 역행렬이 존재한다. 앞에서 풀었던 문제는 ㄱ번 보기를 위한 것이었다.

**→ 참**

ㄴ. $A=E$이면 $B=E$이다.

$A=E$이면 $B=E$이냐고 물어봤는데, 이렇게 특정 행렬을 직접 주는 경우 그대로 대입한 다음 식이 어떻게 변하는지 확인해야 한다.

문제 보기에 $A=E$를 대입해 보자.
$(E+B)(E+B^{-1})=4E$
식을 전개하면 $E+B^{-1}+B+E=4E$가 된다.
정리하면 $B+B^{-1}=2E$가 된다. 양변에 B를 곱하여 역행렬을 없애 보자.
$B^2+E=2B \rightarrow B^2-2B+E=O$가 된다.

이 식은 무엇을 의미하는가? 식을 보고 자연스럽게 $(B-E)^2=O$을 생각할 수 있다. 이 식은 수리영역을 공부하다 보면 많이 봤을 식인데, 아주 쉬운 다음 두 문제를 풀어 보자.

1. $(b-1)^2=0$ 일 때, $b$는?
2. $(B-E)^2=O$ 일 때, $B$는?

1번의 답은 쉽게 구할 수 있을 것이다. $b=1$이다. 그러나 2번의 답을 $B=E$라고 답한다면, 행렬 공부를 제대로 하지 않은 것이다. **행렬에서 "나눗셈은 없다." 대신, 역행렬이 있을 뿐이다.** 이 문제에서 $B-E$의 역행렬이 존재하는지 아닌지는 알 수 없다. 그러므로 $B-E$로 "약분"한다는 것은 불가능하다. 그러므로 여기서 **$B$는 구할 수가 없다.**

다시 문제로 돌아가면 $B=E$라는 ㄴ번의 보기는 틀렸다. 이 문제에서는 알 수가 없다. 확인을 위해서 반례를 들려면 $A^2=O$이 되는 행렬 중(위에 써 둔 것) 하나를 $B-E$로 삼으면 되겠다.

**→ 거짓**

ㄷ. $AB=\frac{1}{2}E$ 이면 $A^2+B^2=E$ 이다.

이번에는 $AB=\frac{1}{2}E$이면 이라고 나왔는데, 여기서 많은 것을 얻어 가야 한다. ㄱ번 보기가 기억이 나는가? 기억에서 $A^{-1}+B^{-1}$의 역행렬이 있는지 검사할 때 $AX=E$ 형태가 있는지를 확인했다. 이 보기는 반대로 $AX=E$ 형태를 주었는데 거꾸로 $A^{-1}=2B$, $B^{-1}=2A$임을 알 수 있어야 한다. ㄷ번 보기에서 막혔다면 이 내용에서 막혔을 확률이 높다. 아마 이 문제를 어렵게 생각한 사람들은 ㄷ번 보기를 제대로 이해하지 못하고 복잡하게 식만 계산하다가 막혔을 확률이 높다.

이 사실을 발견했다면 문제는 너무나도 쉽게 풀린다.
$(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=4E$에서, 보기 싫은 역행렬들을 제거하면
$(A+B)(2B+2A)=4E$가 된다.
식을 전개하면 $2AB+2A^2+2B^2+2BA=4E$인데, 여기서 $AB=BA$라는 사실은 앞에서 다룬 바 있다.
따라서 $AB=BA=\frac{1}{2}E$이고 이 식을 대입하면 $E+2A^2+2B^2+E=4E$, 따라서 $A^2+B^2=E$가 된다.

**→ 참**

# 요약

16. 역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 $A$, $B$가

① $(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=4E$

를 만족시킨다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $E$는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. ② $A^{-1}+B^{-1}$의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. ③ $A=E$이면 $B=E$이다.
ㄷ. ④ $AB=\frac{1}{2}E$이면 $A^2+B^2=E$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

① $AB=E$이면, $B=A^{-1}$라는 사실을 빠르게 확인. 여기서 막히면 그냥 문제 틀리는 것.
→ ② 바로 그 내용을 묻고 있는 보기가 ㄱ번. 잘 몰랐어도 ㄱ번에서 힌트를 얻어서 갔으면 해결책이 나왔을 수도
→ ③ 보기 ㄱ과는 큰 관련이 없지만, 행렬의 곱셈에 대한 교환법칙에 대한 보기. 눈치가 빨라야 하고, 틀렸다는 사실을 직관적으로 확인할 수 있어야 한다.
→ ④ 4점을 가르는 보기. 의외로 ㄱ번을 제대로 풀었다면 쉽게 계산이 되는 보기인데, 헤매다 보면 끝없는 미궁으로 빠졌을 수 있는 보기.

**Tip**
이 문제는 출제의도를 빨리 캐치하면 손쉽게 4점을 얻어갈 수 있지만, 아무 생각 없이 계산만 하고 있으면 시간만 잡아먹는 문제였다. 문제를 풀다가 너무 복잡해져간다 싶으면 풀이를 다시 한 번 점검해 보고, 시간 안배를 위해서 다른 문제를 풀었다가 나중에 다시 와서 푸는 것이 좋다.