* 2018년 3월 시행 교육청 모의고사 고3수학 가형 18번.

부등식 $\sum_{k=1}^{n}\{2k\times({}_nC_k)^2\} \ge 10\times{}_{2n}C_{n+1}$ 을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하는 과정

$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k\cdot x^k$ (단, $k=0,1,2,3,\cdots,2n$) 에서 x^n의 계수는 $k=n$일 때 ${}_{2n}C_n$

$(1+x)^n(1+x)^n$ 의 전개식에서 x^n의 계수는 $\sum_{k=0}^{n}({}_nC_k\times{}_nC_{n-k}) = \sum_{k=0}^{n}({}_nC_k)^2$

→ 좌측식에서 2차라면 우측식에서 $(n-2)$차가 곱해지면 결과가 n차가 된다.

$({}_nC_k)$라면 $({}_nC_{n-k})$

$\therefore\ {}_{2n}C_n = \sum_{k=0}^{n}({}_nC_k)^2$. (한쪽변은 Σ 없고, 한쪽 변은 Σ가 있다).

준식 $\sum_{k=1}^{n}\{2k\times({}_nC_k)^2\} = \sum_{k=1}^{n}\{k\cdot({}_nC_k)^2\} + \sum_{k=1}^{n}\{k\cdot({}_nC_k)^2\}$

$$= \sum_{k=1}^{n}\{k\cdot({}_nC_k)^2\} + \sum_{k=1}^{n}\{k\cdot({}_nC_{n-k})^2\}$$

$$= \{({}_nC_1)^2 + 2({}_nC_2)^2 + 3({}_nC_3)^2 + \cdots + (n-1)({}_nC_{n-1})^2 + n\cdot({}_nC_n)^2\}$$

$$+ \{({}_nC_{n-1})^2 + 2\cdot({}_nC_{n-2})^2 + 3\cdot({}_nC_{n-3})^2 + \cdots + (n-1)\cdot({}_nC_1)^2 + n\cdot({}_nC_0)^2\}$$

$$= n\cdot({}_nC_0)^2 + ({}_nC_1)^2 + (n-1)({}_nC_1)^2 + 2({}_nC_2)^2 + (n-2)({}_nC_2)^2 + \cdots + n\cdot({}_nC_n)^2$$

$$= n\times\{({}_nC_0)^2 + ({}_nC_1)^2 + ({}_nC_2)^2 + \cdots + ({}_nC_n)^2\} = n\times\sum_{k=0}^{n}({}_nC_k)^2 = n\times{}_{2n}C_n.$$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}\{2k\times({}_nC_k)^2\} = n\times{}_{2n}C_n \ge 10\times{}_{2n}C_{n+1}$ 에서 $n\times\frac{(2n)!}{n!\,n!} \ge 10\cdot\frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!}$

$n\times\frac{(2n)!}{n!\,n!} \ge 10\cdot\frac{(2n)!\cdot n}{(n+1)\cdot n!\cdot(n-1)!\cdot n} \rightarrow 1 \ge \frac{10}{n+1}.\quad \therefore n \ge 9.$

(가) $= f(n) = {}_{2n}C_n$, (나) $= g(n) = n$, (다) $= 9$. $f(3)+g(3)+p(=9) = 20+3+9$

$= 32$//

* 2018년 3월 시행 교육청 모의고사 고3수학 나형 20번.

$a_n = \dfrac{(-1)^n + 3}{2} = 1, 2, 1, 2, \cdots$ $\longrightarrow$ 진동 $\Rightarrow$ 발산.

$b_n = p \times (-1)^{n+1} + q = p+q, -p+q, p+q, -p+q, \cdots$ $\longrightarrow$ 진동 $\Rightarrow$ 발산..

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$은 발산한다. $\rightarrow$ True.

ㄴ. 수열 $\{b_n\}$이 수렴하도록 하는 실수 p가 존재 $\rightarrow$ True. $(p=0)$.

ㄷ. 수열 $\{a_n+b_n\}$은 $1+p+q, 2-p+q, 1+p+q, 2-p+q, \cdots$

진동(발산)인 수열의 형태에서 내용 변화를 통해 수렴하는 형태로 나타나기 위해서는

그 진폭이 0이 되고, 모든 항이 같은 값을 가지면 된다..

$\therefore$ $1+p+q = 2-p+q$ 에서 $p = \frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ①.

수열 $\{a_nb_n\}$은 $p+q, -2p+2q, p+q, -2p+2q$.

$\therefore$ 같은 맥락으로 계산하면 $p = \frac{q}{3}$. $\therefore$ $q = \frac{3}{2}$ $\cdots$ ② $\therefore$ $b_n = 2, 1, 2, 1, \cdots$

$\therefore$ $\{a_n\}^2 + \{b_n\}^2 = 1+4, 4+1, 1+4, 4+1, \cdots$

$\lim_{n\to\infty} \{(a_n)^2 + (b_n)^2\} = 5$. ㄷ$\rightarrow$ False.