* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 30번.

수열 $\{a_n\}$, 수열 $\{b_n\}$, 자연수 n

(가) $a_{2n} = b_n + 2$

(나) $a_{2n+1} = b_n - 1$

(다) $b_{2n} = 3a_n - 2$

(라) $b_{2n+1} = -a_n + 3$

$a_{48} = 9$, $\sum_{n=1}^{63} a_n - \sum_{n=1}^{31} b_n = 155$, $b_{32} = ?$

(가), (나) 에서 $a_{2n} = a_{2n+1} + 3$ $(\therefore a_{49} = 6)$

(다), (라) 에서 $b_{2n} = -3b_{2n+1} + 7$.

(가)+(나) = $a_{2n} + a_{2n+1} = 2b_n + 1$

(다)+(라) = $b_{2n} + b_{2n+1} = 2a_n + 1$

$a_{2n} - b_{2n} + a_{2n+1} - b_{2n+1} = -2(a_n - b_n)$

$a_{2n} + b_{2n} + a_{2n+1} + b_{2n+1} = 2(a_n + b_n + 1)$

$$\sum_{n=1}^{63} a_n = a_1 + \sum_{n=1}^{31}(a_{2n} + a_{2n+1}) = a_1 + \sum_{n=1}^{31}(2b_n + 1) = a_1 + 31 + \sum_{n=1}^{31} 2b_n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{63} a_n - \sum_{n=1}^{31} b_n = a_1 + 31 + \sum_{n=1}^{31} b_n = a_1 + 31 + b_1 + \sum_{n=1}^{15}(b_{2n} + b_{2n+1}) = a_1 + b_1 + 31 + \sum_{n=1}^{15}(2a_n + 1)$$

$$= 3a_1 + b_1 + 46 + 2\sum_{n=1}^{7}(a_{2n} + a_{2n+1}) = 3a_1 + b_1 + 46 + 2\sum_{n=1}^{7}(2b_n + 1)$$

$$= 3a_1 + b_1 + 60 + 4\sum_{n=1}^{7} b_n = 3a_1 + 5b_1 + 60 + 4\sum_{n=1}^{3}(b_{2n} + b_{2n+1})$$

$$= 3a_1 + 5b_1 + 60 + 4\sum_{n=1}^{3}(2a_n + 1) = 3a_1 + 5b_1 + 72 + 8\sum_{n=1}^{3} a_n$$

$$= 11a_1 + 5b_1 + 72 + 8 \cdot \sum_{n=1}^{1}(a_{2n} + a_{2n+1}) = 11a_1 + 5b_1 + 72 + 8\sum_{n=1}^{1}(2b_n + 1)$$

$$= 11a_1 + 21b_1 + 80 = 155. \quad \therefore 11a_1 + 21b_1 = 75.$$

$a_{48} = b_{24} + 2 = 9$ $\therefore b_{24} = 7 \rightarrow b_{24} = 3a_{12} - 2$. $\therefore a_{12} = 3 \rightarrow a_{12} = b_6 + 2$. $\therefore b_6 = 1$

$b_6 = 3a_3 - 2$. $\therefore a_3 = 1 \rightarrow a_3 = b_1 - 1$. $\therefore b_1 = 2$. $\therefore a_1 = 3$.

$\therefore b_{32} = 3a_{16} - 2$, $a_{16} = b_8 + 2$,

$= 3b_8 + 4$, $b_8 = 3a_4 - 2$.

$= 9a_4 - 2$, $a_4 = b_2 + 2$.

$= 9b_2 + 16$. $b_2 = 3a_1 - 2 = 7$.

$\therefore b_{32} = 63 + 16 = 79$ //

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 29번.

A(철학) → 10권
B(사회과학) → 10권.
C(자연과학) → 10권.
D(문학) → 10권.
E(역사) → 10권.

24권 선택. (각각 10권이 최대라는 점을 놓치면 안된다)

(가) $a \ge 4,\ b \ge 4,\ c \ge 4.$

(나) $d = 0$ or $d \ge 4.$

(다) $e = 0$ or $e \ge 4.$

총 4개의 case로 분류 가능.

→ case를 나눌 수 있으면 (가능한 배반) 나눠서 계산하는 것이 안전하다.

(i) $a \ge 4,\ b \ge 4,\ c \ge 4,\ d = 0,\ e = 0.$

$a' + b' + c' = 12 \quad (0 \le a' \le 6,\ 0 \le b' \le 6,\ 0 \le c' \le 6)$

$0 + (6+6)$ → 1가지.

$1 + (6+5)$, $(5+6)$ → 2가지.

......

$6 + (0+6)$, $(6+0)$ → 7가지.

$_7H_2 = {}_8C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$

(ii) $a \ge 4,\ b \ge 4,\ c \ge 4,\ d = 0,\ e \ge 4.$

$a' + b' + c' + e' = 8.$ (조건은 위와 동일) → 전체에서 불가능한 경우를 빼는 여사건으로 접근.

∴ $_4H_8$에서 $(8,0,0,0)$ $(= {}_4C_1 = 4$가지$)$, $(7,1,0,0)$ $({}_4C_1 \times {}_3C_1 = 12$가지$)$ 경우를

제외하면 $_4H_8 \left(= {}_{11}C_3 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2} = 165\right) - 4 - 12 = 149$

(iii) (ii)와 동일 맥락. ∴ 149.

(iv) $a \ge 4,\ b \ge 4,\ c \ge 4,\ d \ge 4,\ e \ge 4.$

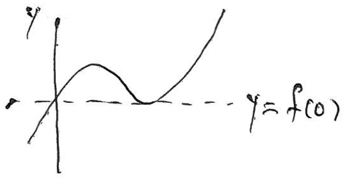
$a' + b' + c' + d' + e' = 4.$ → $_5H_4 = {}_8C_4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70$

∴ (i) + (ii) + (iii) + (iv) $= 28 + 149 \times 2 + 70 = 98 + 298 = 396$

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 나형 30번.

$t>0$, $f(x)=x^3+\cdots$, $g(t)=\dfrac{f(t)-f(0)}{t}$ → $\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}$, ∴ $g(t)$는 $(0, f(0))$과 $(t, f(t))$를 잇는 직선의 기울기이다.

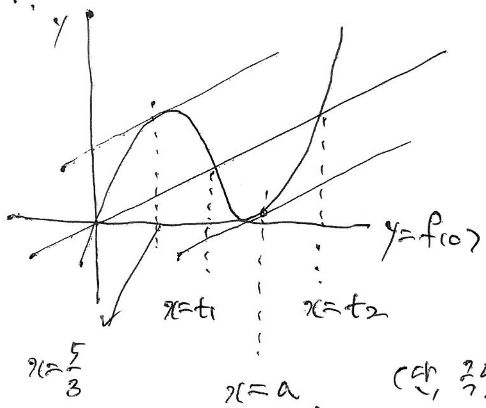
(가) 함수 $g(t)$의 최솟값은 0 이다.



(나) 방정식 $f'(x)=g(a)$의 해는 $x=a$, $x=\frac{5}{3}$ (단, $a>\frac{5}{3}$).

→ m이 자연수일 때, $A_m=\{x \mid f'(x)=g(m),\ 0<x\le m\}$, $n(A_m)=2$ 를 만족시키는 m의 합?

1) $g(t)$ 함수의 이해.



→ 세 직선의 기울기는 동일하다.

이 때 $f'(\frac{5}{3})=f'(a)$이고, 이 값과

$g(t_1)=g(t_2)=f'(\frac{5}{3})=f'(a)$ 이다.

(단, 극댓값의 x좌표는 $\frac{5}{3}$ 이상, 극솟값의 x좌표는 a 이하)

2) 식의 작성.

극솟값을 갖는 x를 $x=k$라 하면 $(k>0)$, $f(x)=x\cdot(x-k)^2+f(0)$, $f'(x)=(x-k)(3x-k)$,

$$g(a)=\frac{f(a)-f(0)}{a}=\frac{a\cdot(a-k)^2}{a}=(a-k)^2 \quad (\because a\neq 0)$$

∴ $(x-k)(3x-k)=(a-k)^2$ 의 방정식을 만족시키는 x가 $x=\frac{5}{3}$, $x=a$ 이다.

(i) $x=a$ 일 때 $a=k$ 이면 성립. $a\neq k$ 이면 $3a-k=a-k$ 에서 $a=0$ (조건 위배)

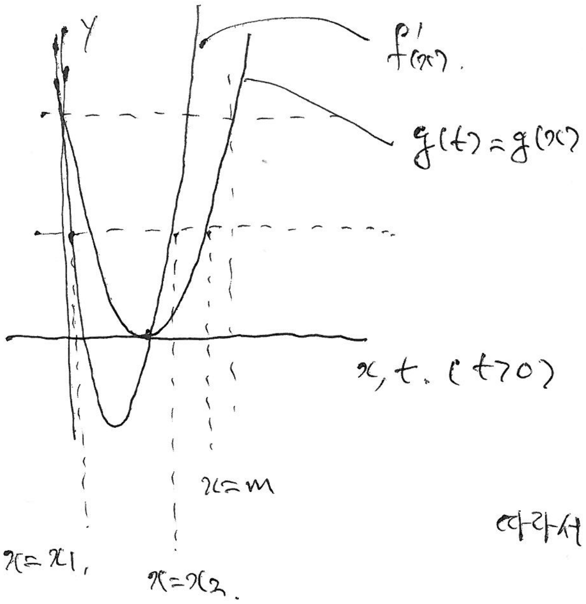
∴ $a=k$, $x=\frac{5}{3}$일 때 $(\frac{5}{3}-k)(5-k)=(a-k)^2=(k-k)^2=0$. ∴ $k=a=5$ $(>\frac{5}{3})$

따라서 $f(x)=x(x-5)^2+f(0)$ 이 된다. 또한 $g(t)=\dfrac{t(t-5)^2}{t}=(t-5)^2$.

위의 (1) $g(t)$ 함수의 이해에서 $x=t_1$ 인 경우 즉 $x=t_1=m$인 경우 불가능.

($a=k=5$인 점과 이전과 이후 모두 불가능하다는 점 확인할 것)

따라서



∴ $m=10$일 때 $x_1=0$ 이므로 조건에 위배.

$m=5$일 때 $0<x_1<x_2<m=5$ 이므로 조건 충족.

∴ $m=5, 6, 7, 8, 9$.

따라서 모든 자연수 m의 값의 합은 $7\times5=35$ //

→ 평소와 달리(?) 교육청 해설이 매우 authentic 하게 설명되어 있음. 꼭 참고할 것.

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 21번.

자연수 k, $A_k=\left\{\sin\frac{2(m-1)}{k}\pi \;\middle|\; m\text{은 자연수}\right\}$ ∴ $A_k=\left\{\sin\frac{0}{k}\pi,\ \sin\frac{2}{k}\pi,\ \sin\frac{4}{k}\pi,\ \sin\frac{6}{k}\pi,\ \cdots\right\}$.

(i) $k=1$. $A_1=\{0\}$.

(ii) $k=2$. $A_2=\{0\}$.

→ 근이 아니고 y값에 해당되므로 한 주기에 대해서 파악하면 된다.

(iii) $k=3$. $A_3=\left\{0,\ \sin\frac{2}{3}\pi,\ \sin\frac{4}{3}\pi\right\}$.

(iv) $k=4$. $A_4=\left\{0,\ \sin\frac{2}{4}\pi,\ \sin\frac{6}{4}\pi\right\}$.

→ A_k의 원소의 개수 $n(A_k)=k$인데, 중복되는 경우 (중근X)를 제외하고 생각해야 한다. 예를 들어 $k=4$일 때 $\sin\frac{4}{4}\pi$는 이미 0을 원소로 확인한 다음이면 고려할 필요가 없다.

ㄱ. → True.

ㄴ. $\sin\frac{\pi}{2}$가 원소가 되려면 4등분, 8등분, 12등분 등의 형태여야 한다. ∴ $4\times3=12$ 에서 $4\times24=96$까지 22개. (3~24)

→ 한 주기의 sine함수를 k등분 한다고 생각가능.

→ True. → ㄴ에서 k값의 변화를 4개 단위로 확인하라는 힌트를 준 것이다.

ㄷ. $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=3$, $a_4=3$.

$a_5=5$, $a_6=3$, $a_7=7$, $a_8=5$

$a_9=9$, $a_{10}=5$, $a_{11}=11$, $a_{12}=7$.

↓ $a_k=11$. 이 line에서는 불가.

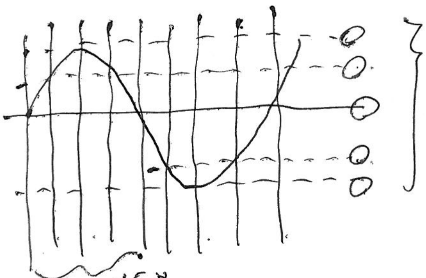
↓ $a_{22}=11$

↓ $a_{20}=11$

모든 k값은 11, 22, 20.

ㄷ → False.

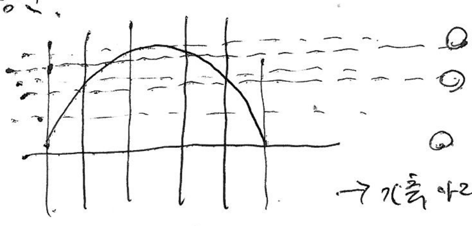
ex1) 8등분.



5개.

4등분.

ex2) 10등분.



5개.

→ x축 아래 2개 추가.

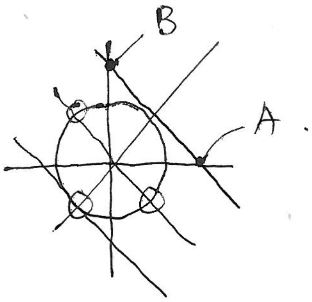
ex3) 홀수 등분인 경우 한 주기 안에서는 y값이 모두 다르다. $a_{27}=27$, $a_{63}=63$. 이런 형태가 된다.

이 해설은 귀납적 추론으로 수열의 규칙성을 사용한 것이고 연역적 접근 (교육청 해설), 단위원 활용 등등 여러가지 접근이 가능하다.

* 2020년 4월(5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 나형 21번.

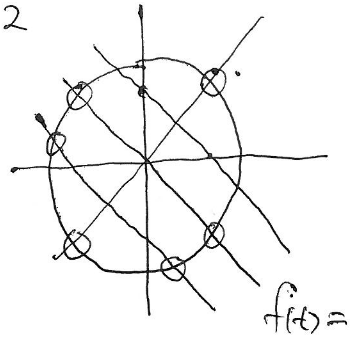
$O(0,0)$, $A(\sqrt{2},0)$, $B(0,\sqrt{2})$. $\therefore \overline{AB}=2$. $\overline{AB}$와 원점과의 거리는 1.

ex) $t=1$



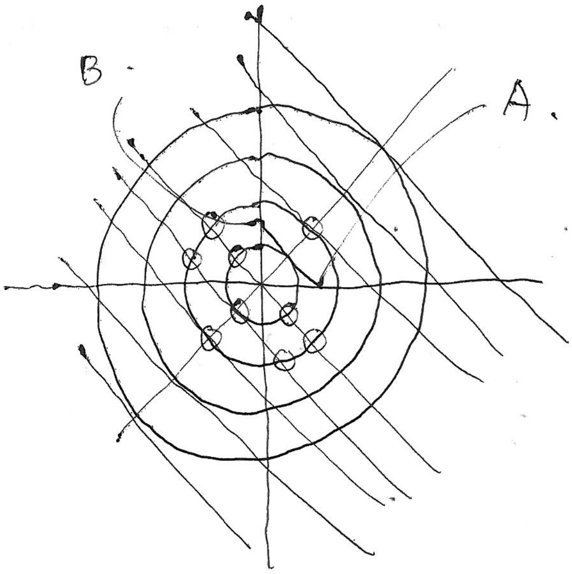
$f(t)=3$.

ex) $t=2$



$f(t)=6$.

○친 부분이 점P일 경우 △ABP의 넓이가 자연수가 된다.



$0<t<1$	$f(t)=2$.
$t=1$.	$f(t)=3$.
$1<t<2$	$f(t)=4$
$t=2$.	$f(t)=6$
$2<t<3$	$f(t)=8$
$t=3$	$f(t)=10$
$3<t<4$	$f(t)=12$
$t=4$	$f(t)=14$.

....

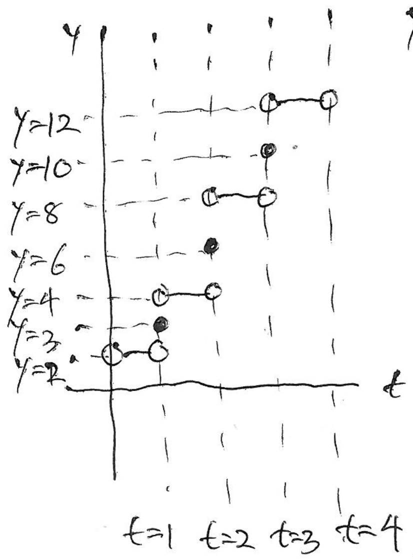
t는 반지름의 길이이므로 $t>0$. $t=0$인 경우 원이 성립하지 X.

ㄱ. $f(\frac{1}{2})=2$ → True.

ㄴ. $\lim_{t\to 1+} f(t)=4$, $f(1)=3$. → True.

ㄷ. $a=1$, $a=2$, $a=3$일 때 불연속.

→ True.



$y=f(t)$.

$(0<t<4)$

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 20번.

$X=\{1,2,3,4,5\}$. $f: X \to X$ 의 치역을 A, $f \circ f$ 의 치역을 B, 함수 f의 개수는?

(ㄱ) $n(A) \geq 3$.

(ㄴ) 집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수.

(ㄷ) $n(A) > n(B)$

$n(A)=3$ 인 경우, $\{1,2,3\}, \{1,3,5\}, \{2,3,4\}, \{3,4,5\}$

$n(A)=4$ 인 경우, $\{1,2,4,5\}$.

$n(A)=5$ 인 경우 → X (∵ 자동으로 $n(B)=5$ 가 된다).

(i) $n(A)=4$, $n(B)=3$ ($n(B)=2$는 X, $n(B)=2$라면 $n(A)=n(B)+n(f(3)) = n(B)$ or $n(B)+1$)

$B=\{1,2,4\}$ 라 하면 (B선택 ${}_4C_3$) $\{f(1), f(2), f(4), f(5)\} = \{1,2,4\}$.

→ 공역이 $\{1,2,4\}$인 경우에서 → 이 경우 $f(3)=5$는 자동으로 결정.

치역의 원소의 개수가 2 또는 1인 경우를 제하면 치역이 $\{1,2,4\}$인 경우 (전사함수 개념)

$\therefore 3^4-(2^4-2)\times 3-(1^4)\times 3 = 81-42-3=36$. 그러므로 (i)에서 f의 개수는 ${}_4C_3 \times 36 = 144$ = (다).

(ii) $n(A)=3$, $n(B)=2$ (예를 들어 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2\}$라 하면)

(i)에서와 같은 맥락으로 $2^3-(1^3)\times 2 = 6$ → $6\times 5 = $ (나).

이 때 $f(4)$와 $f(5)$ 중 적어도 하나는 그 값이 3이어야 한다. → 5가지.

$\therefore$ (ii)에서 f의 개수는 ${}_3C_2 \times 6\times 5\times 4 = 360$. ⇒ 4는 $n(A)=3$ 인 경우 4가지.

(iii) $n(A)=3$, $n(B)=1$ (예를 들어 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1\}$라 하면)

(i)에서와 같은 맥락으로 $1^3=1$

이 때 $f(4)$와 $f(5)$의 값은 2 또는 3, → 2가지 = (가).

$\therefore$ (iii)에서 f의 개수는 ${}_3C_1 \times 1\times 2\times 4 = 24$.

따라서 함수 f의 개수는 $144+360+24 = 168+360 = 528$ //

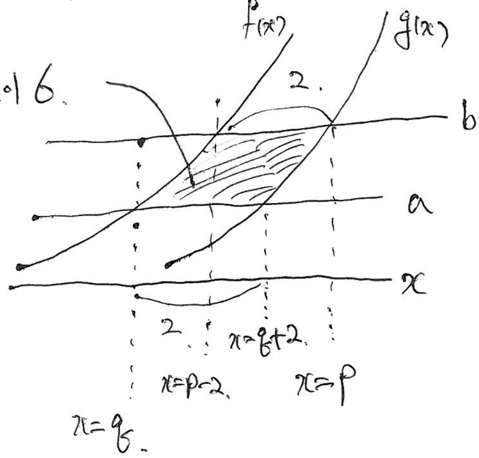
박스에 맞춰 진행시키면 (가)$=2$, (나)$=30$, (다)$=144$.

* 2020년 4월 (5월시행) 교육청 모의고사 고3수학 나형20번.

$f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-2}$, ∴ $g(x)$는 $f(x)$를 x축의 양의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

$(0<a<b)$

(가) 넓이 6.

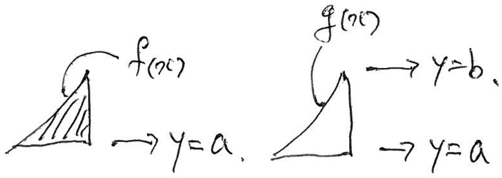


(나) $g(p)=b$, $f(q)=a$라 하면

$g^{-1}(b)=p$, $f^{-1}(a)=q$. ∴ $p-q=\log_2 6$.

$p-q=2+\log_2\frac{3}{2}$

(가)에서



두 부분의 넓이가 같다. ∴ $2\times(b-a)=6$

∴ $b-a=3$.

$f(q)=a$, $f(p-2)=b$ 이므로 $2^q=a$, $2^{q+\log_2\frac{3}{2}}=b$. $(\because p-2=q+\log_2\frac{3}{2})$

∴ $\frac{3}{2}a=b$. 따라서 $b-a=\frac{3}{2}a-a=\frac{a}{2}=3$. ∴ $a=6$, $b=9$. $a+b=15$//

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 나형 27번.

수열 $\{a_n\}$, $a_1=1$, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+3a_n=(-1)^n \times n.$$

$n=1$. $a_2+3a_1=a_2+3=-1$. $\therefore a_2=-4$.

$n=2$. $a_3+3a_2=a_2-12=2$. $\therefore a_3=14$.

$n=3$. $a_4+3a_3=a_4+42=-3$. $\therefore a_4=-45$.

$n=4$. $a_5+3a_3=a_5-135=4$. $\therefore a_5=139$ //

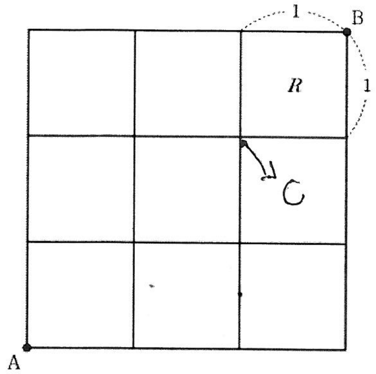
* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 13번.

$$\sum_{n=1}^{20}(-1)^n \cdot n^2 = -1+4-9+16-25+36-49+\cdots+400$$

$$= 3+7+11+\cdots+39. \rightarrow \text{일반항 } 4k-1.$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20}(-1)^n \cdot n^2 = \sum_{n=1}^{10}(4n-1) = 4\times\frac{10\cdot 11}{2}-10 = 220-10 = 210$$ //

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3수학 나형 29번.



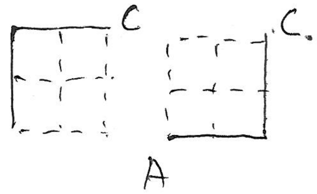
$A \to B \to A$ 최단경로로 이동하는 경우의 수

(가) 정사각형 R의 네 변을 모두 지나야 한다.

A를 $(0,0)$이라 했을 때 점B는 $(3,3)$이고, $(2,2)$를 점C라 하면 $C \to B \to C$ 경우의 수는 2이다.

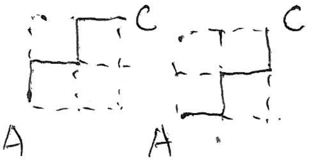
(나) 한 변의 길이가 1인 정사각형 (총 9개) 중 네 변을 모두 지나는 것은 R 뿐이다.

(i)



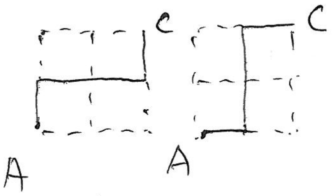
$\to (1\times2\times5)\times2=20$

(ii)



$\to (1\times2\times2)\times2=8$

(iii)



$\to (1\times2\times3)\times2=12$

40가지 //

○ 친 부분의 수는 각각의 케이스에 대한 $C \to A$로의 최단 경로 중 조건을 만족시키는 경우의 수이다.

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3수학 나형 19번.

→ Application

	Mon	Tue	Wed
1st			
2nd			
3rd			
4th			

ㄱ. A→ 3회, B→3회, C→6회

ㄴ. 1st에는 A, B, C 모두 신청 → 3!

ㄷ. 같은 요일에는 두 종류 이상의 봉사활동 신청

→ C를 제외한 A, B는 최대 3회이므로 결국 특정 요일의 네 번 신청하는 경우를 모두 C로 신청하지 않는다는 소리.

(i) 1st → 3!

(ii) 2nd 이후 → A 2회, B 2회, C 5회 $\Rightarrow \frac{9!}{2!2!5!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{2\cdot2} = 42\times18 = 840-84 = \underset{\substack{\shortparallel\\(가)}}{756}$

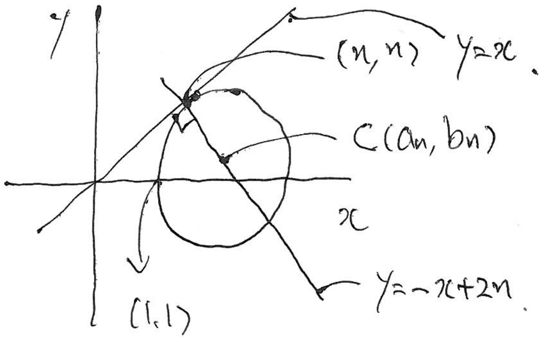
(iii) (ii)에서 구한 경우에서 조건에 위배되는 경우를 구해서 뺀다.

→ 1st에서 C를 신청한 요일의 2nd, 3rd, 4th는 자동으로 C로 결정

남는 경우는 A→2회, B→2회, C→2회. ∴ $\frac{6!}{2!2!2!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{2\cdot2} = 90 = (나)$.

∴ 구하는 경우의 수는 $3!\times(756-90) = 6\times666 = 3600+360+36 = 3996$.

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3수학 가형 27번.



(n, n)에서 $y=x$에 수직인 직선은

$y=-x+2n$, $\therefore$ 중심은 $C(a_n, b_n)=C(a_n, -a_n+2n)$

$r^2=(a_n-n)^2+(b_n-n)^2=(a_n-n)^2+(-a_n+n)^2$

$=2(a_n-n)^2=2a_n^2-4na_n+2n^2.$

또한 $r^2=(a_n-1)^2+(b_n-0)^2=(a_n-1)^2+(-a_n+2n)^2=2a_n^2-4na_n+1+4n^2-2a_n.$

$\therefore\ 2a_n-2n^2-1=0.$ $\quad\therefore\ a_n-b_n=2a_n-2n=2n^2+1-2n.$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-2n+1}{n^2}=2 \,//$$

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3수학 나형 18번.

1이 아닌 세 양수 a, b, c, 1이 아닌 두 자연수 m, n.

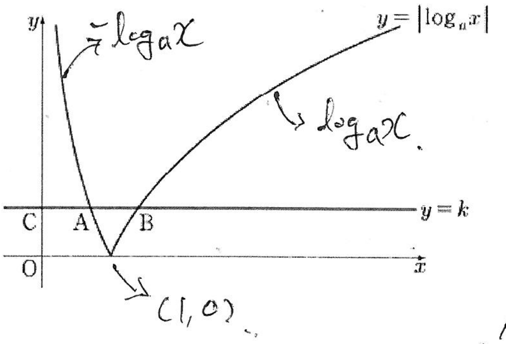
(가) $\sqrt[3]{a}$는 b의 m제곱근이다 $\rightarrow (\sqrt[3]{a})^m=b=a^{\frac{m}{3}}$

(나) $\sqrt{b}$는 c의 n제곱근이다 $\rightarrow (\sqrt{b})^n=c=b^{\frac{n}{2}}$

(다) c는 a^{12}의 네제곱근이다. $\rightarrow c^4=a^{12}.$ $\quad\therefore\ c=a^3=b^{\frac{n}{2}}=a^{\frac{mn}{6}}$

$\therefore\ mn=18.$ $\quad (m,n)=(2,9), (3,6), (6,3), (9,2) \rightarrow$ 4가지 //

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 28번.



$a>1$, $\therefore$ $(0<x<1)$, $(-\log_a x)$

$(x\geq 1)$, $(\log_a x)$.

$C(0,k)$, $\overline{OC}=\overline{CA}=\overline{AB}$ 이므로 $(k>0)$

$A(k,k)$, $B(2k,k)$

$\therefore \log_a k=-k$, $\log_a(2k)=k=\log_a 2+\log_a k$. $\therefore k=\dfrac{1}{a^k}$, $2k=\log_a 2$.

$a^{2k}=2$. $\rightarrow a^k=\sqrt{2}=\dfrac{1}{k}$ $\therefore k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. $\therefore a^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$.

따라서 $\log_a \alpha_1=2\sqrt{2}$, $-\log_a \alpha_2=2\sqrt{2}$ 일 때, $(\alpha_1>\alpha_2)$ $d=\alpha_1-\alpha_2$가 된다.

$\alpha_1=a^{2\sqrt{2}}=\left(a^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^4=(\sqrt{2})^4=4$, $\alpha_2=a^{-2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{a^{2\sqrt{2}}}=\dfrac{1}{\left(a^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^4}=\dfrac{1}{4}$.

$\therefore d=4-\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{4}$. $20d=5\times 15=75$ //

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 16번.

$f(x)=x^2-6x+11=(x-3)^2+2$, $g(x)=\log_3 x$,

정수 k, $k<g\circ f(n)<k+2$ 를 만족시키는 자연수 n의 개수 $=h(k)$, $h(0)+h(3)=?$

$\therefore k=0$일 때 $0<g(\triangle)<2$. $\rightarrow 1<\triangle=f(n)<9$. $\therefore n=3,4,5,\overset{(대칭)}{2,1}$. $\rightarrow h(0)=5$.

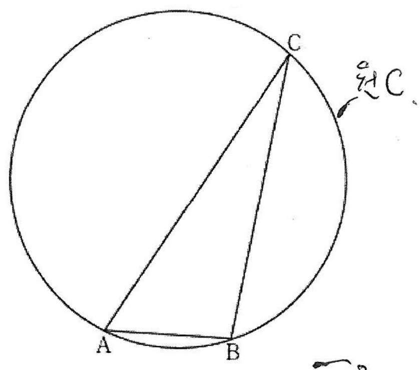
$k=3$일 때 $3<g(\triangle)<5$ $\rightarrow 27<\triangle=f(n)<243$.

$\therefore n=9,10,11,\cdots,18$. $\therefore h(3)=10$.

(주의: $n=-3,-4,-5,\cdots,-12$는 n은 자연수라는 조건에 위배)

$\therefore h(0)+h(3)=5+10=15$ //

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 19번.



$\overline{AB}=3$, $\angle BAC=\angle A=\frac{\pi}{3}$. $\therefore \cos A=\frac{1}{2}$, $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

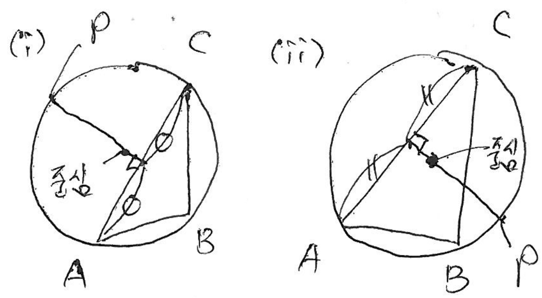
원C의 반지름을 R이라 하면 $\pi R^2=\frac{49}{3}\pi$에서 $R=\frac{7}{\sqrt{3}}$.

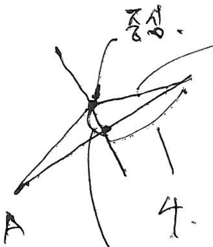
$\therefore \frac{\overline{BC}}{\sin A}=2R=\frac{14}{\sqrt{3}}$. $\therefore \overline{BC}=7$.

$\overline{BC}^2=49=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\cos A=\overline{AC}^2+9-3\overline{AC}$

$\therefore \overline{AC}^2-3\overline{AC}-40=0$에서 $\overline{AC}=8$.

현의 수직이등분선은 중심을 지나므로 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은 오른쪽과 같은 경우들이다.

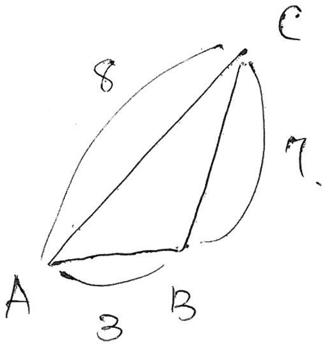




$R=\frac{7}{\sqrt{3}}$.

$\sqrt{\frac{49}{3}-16}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

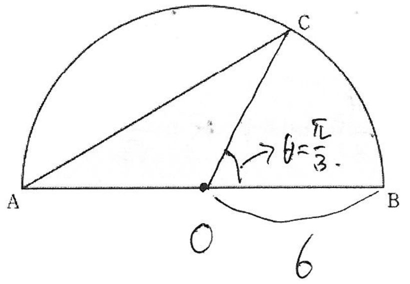
$\therefore Max=\frac{1}{2}\times 8\times\left(\frac{7}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{32}{\sqrt{3}}$ //



$64=9+49-2\cdot3\cdot7\cdot\cos B$. $\therefore \cos B<0$.

$\therefore \angle B>\frac{\pi}{2}$. ⇒ 위의 (i)과 (ii) 중에서 (i)에 해당된다.

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 나형 17번.



$\overline{AB}=12$ (지름). 중심을 O라 하면 $r=\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=6$

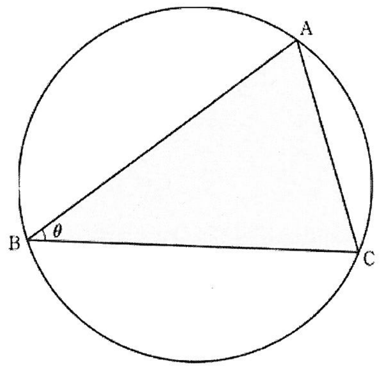
호 $\overset{\frown}{CB}$의 길이는 $r\theta$ (단, θ는 $\angle COB$) $=6\theta=2\pi$.

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

∴ 도형 ABC는 삼각형 AOC와 부채꼴 OBC의 합이므로.

$$\frac{1}{2}\times6^2\times\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\pi}{3}=18\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=9\sqrt{3}+6\pi \text{ //}$$

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 나형 13번.

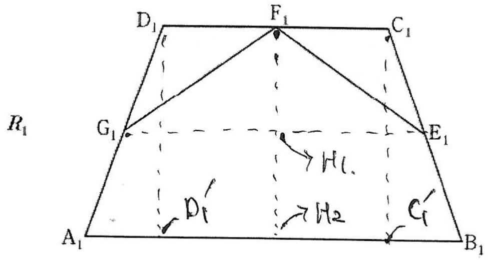


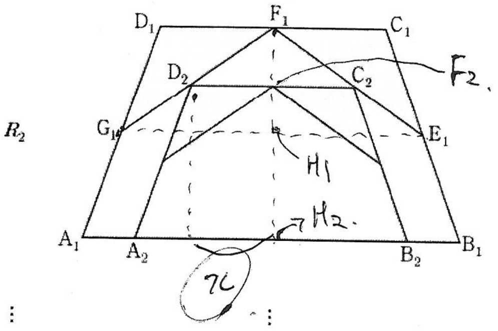
$\triangle ABC$의 외접원의 반지름은 4.

$\overline{AC}=5$. $\therefore \frac{\overline{AC}}{\sin B}=\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=\frac{5}{\sin\theta}=2R=8$,

$\therefore \sin\theta=\frac{5}{8}$ //

* 2020년 4월(5월시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 18번.





$\overline{D_1C_1} = \overline{A_1D_1} = \overline{C_1B_1} = 6$, 점 E_1, 점 F_1, 점 G_1은 각각 속해있는 선분의 중점.

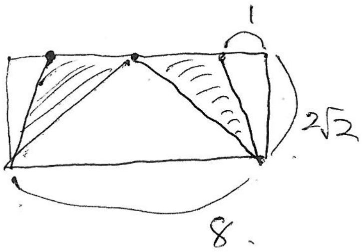
점 F_1에서 선분 A_1B_1에 내린 수선의 발을 H_2라 하고, 그 수선과 선분 G_1E_1의 교점을 H_1이라 하자.

점 D_1과 점 C_1에서 선분 A_1B_1에 내린 수선의 발을 각각 D_1', C_1'이라 하면

$\overline{G_1E_1} = 4$, $\overline{D_1D_1'} = \overline{F_1H_2} = \overline{C_1C_1'} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. $\overline{F_1H_1} = 2\sqrt{2}$.

1) $n: 2 \to 2$. $\therefore n = 1$.

2) a:



$\to 8\times 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 1\times 2 - \frac{1}{2}\times 8\times 2\sqrt{2}$.

$= 16\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

3) l_r: $\overline{D_2F_2} = x$라 하면 길이의 변화는 $\overline{D_1F_1} \to \overline{D_2F_2}$ 이므로 $3 \to x$. $\therefore l_r = \frac{x}{3}$, $S_r = \frac{x^2}{9}$.

□ $D_1C_1C_1'D_1'$ 이 정사각형이 아니므로 높이인 $\overline{F_2H_2}$를 따로 구해야 한다. (일반은 $2x$).

$\overline{F_1C_1} : \overline{F_1H_2} = \overline{F_2C_2} : \overline{F_2H_2} \to 3 : 4\sqrt{2} = x : \overline{F_2H_2}$. $\therefore$ 높이인 $\overline{F_2H_2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}x$.

$\triangle G_1H_1F_1$과 $\triangle D_2F_2F_1$은 닮음이므로 (여기서 $\overline{F_1F_2}$의 길이 표현을 위해 $\overline{F_2H_2}$를 구한것임)

$\overline{G_1H_1} : \overline{H_1F_1} = \overline{D_2F_2} : \overline{F_2F_1} \to 4 : 2\sqrt{2} = x : 4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3}x$. $\therefore \frac{22\sqrt{2}}{3}x = 16\sqrt{2}$.

$\therefore x = \frac{24}{11}$. $\therefore l_r = \frac{x}{3} = \frac{8}{11}$. $S_r = \frac{64}{121}$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1 - S_r \times n} = \frac{\frac{6\sqrt{2}}{1}}{1 - \frac{64}{121}} = \frac{\frac{6\sqrt{2}}{1}}{\frac{57}{121}} = \frac{6\times 121\times\sqrt{2}}{57} = \frac{242\sqrt{2}}{19} \quad //$$

* 2020년 4월 (5월시행) 교육청 모의고사 고3수학 가형 17번.

등비수열 $\{a_n\}$, $a_n>0$, ∴ $a_1>0$, $r>0$

(가) $\sum_{k=1}^{4} a_k = a_1+a_2+a_3+a_4 = \frac{a(1-r^4)}{1-r} = 45$.

(나) $\sum_{k=1}^{6}\frac{a_2\times a_5}{a_k} = a_2\times a_5\times\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_6}\right) = \frac{ar\cdot ar^4}{a}\times\frac{\left(1-\left(\frac{1}{r}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{r}} = ar^5\times\frac{\frac{r^6-1}{r^6}}{\frac{r-1}{r}}$

$= \frac{a(r^6-1)}{r-1} = \frac{a(r^2-1)(r^4+r^2+1)}{r-1} = 189$.

∴ $\frac{(가)}{(나)}$ 를 계산하면 $\frac{r^2+1}{r^4+r^2+1} = \frac{45}{189} = \frac{5}{21}$. ∴ $5r^4+5r^2+5=21r^2+21$ 에서

$5r^4-16r^2-16=(5r^2+4)(r^2-4)=0$. ∴ $r^2=4$, $r=2$ (∵ $r>0$)

(가)에서 $\frac{a(1-16)}{1-2}=45$ 이므로 $-15a=-45$ 에서 $a=3$. ∴ $a_n=3\cdot2^{n-1}$. $a_3=12$//

* 2020년 4월 (5월시행) 교육청 모의고사 고3수학 가형 15번.

등차수열 $\{a_n\}$. $a_1>0$, $d=3$. ∴ $a_n>0$. 수열 $\{b_n\}$, $b_n>0$. $a_1=?$

(가) 모든 자연수 n. $\log a_n+\log a_{n+1}+\log b_n=0$. ∴ $a_n\cdot a_{n+1}\cdot b_n=1$, $b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$

(나) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{d}\times\left(\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right)\right\}$

$= \frac{1}{d}\times\frac{1}{a_1} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{a_1} = \frac{1}{12}$. ∴ $a_1=4$// $a_n=3n+1$.

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3수학 나형 28번.

$f(x) = x^3-6x^2+ax+10$, $g(x) = \begin{cases} b-f(x) & (x<3) \\ f(x) & (x \geq 3) \end{cases}$. $g(x)$는 미분가능. $g(x)$의 극솟값은?

$b-f(x)$: $f(x)$를 x축에 대하여 대칭이동시키고 y축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨다.

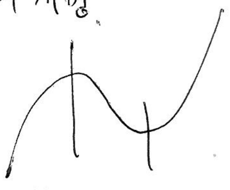
$\therefore f'(3)=0$ (그래프를 통해서도 이해해야 하고, 식을 통해서도 이해할 수 있어야 한다)

$f'(x)=3x^2-12x+a$. $\therefore f'(3)=27-36+a=0$ 에서 $a=9$.

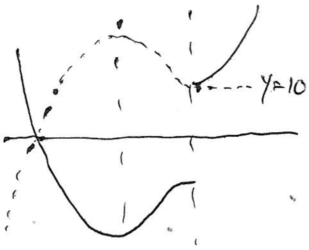
(미분가능 $\Longrightarrow$ 연속)

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+9x+10$. $f'(x)=3(x-1)(x-3)$. $f(3)=10$. $\therefore b-10=10$ 에서 $b=20$.

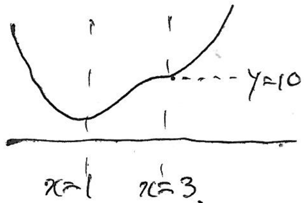
$f(x)$의 개형



(x<3) 1st x축 대칭.



(x<3) y축 평행이동.



$\therefore g(x)$의 극솟값은 $g(1)$.

$g(1) = b-f(1)$

$= 20-f(1)$

$= 20-14 = 6$.

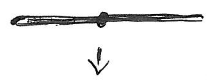
* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3수학 나형 26번.

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$v(t) = -4t+8$.

$t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리. (거리는 음수가 X)

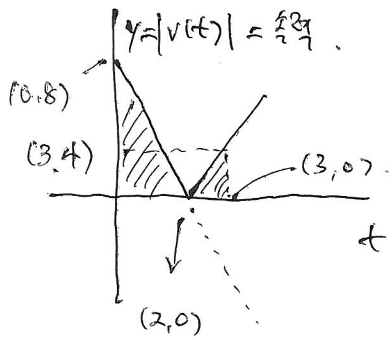
점P의 운동은 다음과 같이 수평운동임



$v(t)>0$ 이면 $\longrightarrow$

$v(t)<0$ 이면 $\longleftarrow$

거리는 속력 (|속도|)을 적분한 것이고, 속도 적분은 위치이다.



$\rightarrow \frac{1}{2}\times2\times8 + \frac{1}{2}\times1\times4 = 8+2$

$= 10$ //

or $\int_0^3 |-4t+8|\,dt$

$= \int_0^2 \{-4t+8\}\,dt + \int_2^3 \{4t-8\}\,dt$

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 나형 16번.

사차함수 $f(x)$, 모든 실수 x에 대하여 $3xf(x) = 9\int_1^x f(t)dt + 2x$.

$x=1$ 대입. $3f(1) = 2$.

양변 미분. $3f(x) + 3xf'(x) = 9f(x) + 2$.

$x=1$ 대입. $3f(1) + 3f'(1) = 9f(1) + 2 = 8$.

$3f(1) = 2$ 이므로 $3f'(1) = 6$. $\therefore f'(1) = 2$ //

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 나형 14번.

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 3$. $\rightarrow f(x) = 3x^2 + ax + b$.

$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{(x-2)(x+1)} = 6$. $\rightarrow f(x)$는 $x-2$를 인수로 가져야 하므로

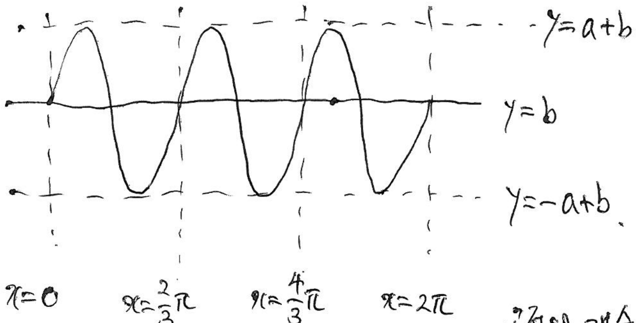
$f(x) = (x-2) \times 3 \times (x - \frac{b}{6})$

$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3(x-\frac{b}{6})}{x+1} = 2 - \frac{b}{6} = 6$. $\therefore b = -24$.

$\therefore f(0) = b = -24$ //.

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 26번.

함수 $y=a\sin 3x+b$, 정의역 $[0, 2\pi]$. → $a>0$, $b>0$. 주기 $\frac{2\pi}{3}$. ∴ 정의역은 세 주기에 해당.



두 직선 $y=9$, $y=2$. → 모두 x축과 평행.

$y=a\sin 3x+b$ 가 x축과 평행한 직선과의 교점의 개수가 3인 경우는 $y=a+b$ or $y=-a+b$ 이고 교점의 개수가 7인 경우는 $y=b$ 뿐이다.

∴ $a+b=9$, $b=2$. ∴ $a=7$. $a\times b=14$ // ($-a+b<b$ 이므로 $-a+b\neq 9$).

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 12번.

$\pi<\theta<2\pi$. $\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\tan\theta}=1$. ∴ $\frac{\sin\theta\cos\theta\cdot(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}+\frac{\cos\theta\cdot(1-\cos\theta)}{\sin\theta}=\frac{\cos\theta+\cos^2\theta+\cos\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}=1$. ∴ $\sin\theta=2\cos\theta$. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=5\cos^2\theta=1$.

$\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{5}}$ (∵ $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{2}>0$. ∴ θ는 제 3사분면의 각)

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 나형 15번.

$f(x)=\cos(ax)+1$. $a>0$, → 주기 $=\frac{2\pi}{a}$.

$g(x)=|\sin 3x|$. → 주기 $=\left(\frac{2\pi}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$.

∴ $a=6$.

주의: $\left|\sin 3x+\frac{1}{2}\right|$ → 이런 경우라면 주기는 $\frac{2}{3}\pi$ 이다.

즉, 절댓값 기호로 인해 접어 올려지는 부분이 절대값 기호와 무관한 부분과 평행이동으로 겹쳐질 수 있을 때만 주기에 영향을 미친다. 그래프로 확인할 것.