

AWESOME & RENDEZVOUS

2021학년도 대비 4월 학평 리빌드



etoos 대치이강학원 정현경

대구 송원학원 황보백

4평 Origin

1) 두 함수

$$f(x) = 2^x, g(x) = 2^{x-2}$$

에 대하여 두 양수 a, b ($a < b$)가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값은?

(가) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 두 직선 $y=a$, $y=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 6이다.

(나) $g^{-1}(b) - f^{-1}(a) = \log_2 6$

- ① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

[2020년 4월 모의고사 나형 20번]



2) 두 함수

$$f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = \log_2 x + n \quad (n > 0)$$

에 대하여 두 양수 a, b ($a < b$)가 다음 조건을 만족시킬 때, n 의 값은?

(가) 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 와 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 $5n$ 이다.

(나) $\frac{g^{-1}(b)}{f^{-1}(a)} = 8$

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

4평 Origin

3) 좌표평면에서 세 점 $O(0, 0)$, $A(\sqrt{2}, 0)$, $B(0, \sqrt{2})$ 가 있다. 점 O 를 중심으로 하는 원 C 의 반지름의 길이가 t 일 때, 삼각형 ABP 의 넓이가 자연수인 원 C 위의 점 P 의 개수를 함수 $f(t)$ 라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, 점 P 는 직선 AB 위에 있지 않다.)

| 보기 |

ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

ㄴ. $\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) \neq 1$

ㄷ. $0 < a < 4$ 인 실수 a 에 대하여 함수 $f(t)$ 가 $t = a$ 에서 불연속인 a 의 개수는 3이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2020년 4월 모의고사 나형 21번]



4) 좌표평면에서 $|x| + |y| = 1$ 이 나타내는 그래프를 도형 A이라 하고 실수 a 에 대하여 도형 A와 원 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 1$ 이 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(a)$ 이라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

- ㄱ. $f(0) = 4$
- ㄴ. $\lim_{a \rightarrow \frac{-1+\sqrt{2}}{2}} f(a) = 2$
- ㄷ. $-2 < t < 2$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $f(a)$ 가 $a = t$ 에서 불연속인 t 의 개수는 4이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4평 Origin

5) 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + 10$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} b - f(x) & (x < 3) \\ f(x) & (x \geq 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분 가능할 때, 함수 $g(x)$ 의 극솟값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

[2020년 4월 모의고사 나형 28번]



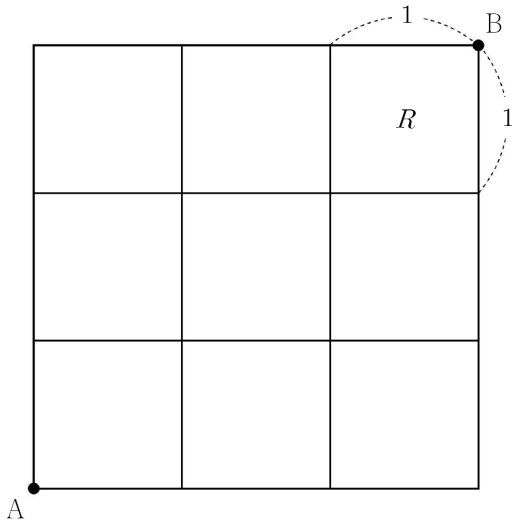
6) 함수 $f(x) = x^2(x-a)^2 + 2$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} b - f\left(x - \frac{a}{2}\right) & (x < a) \\ f(x) & (x \geq a) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분 가능할 때, 함수 $g(x)$ 의 극댓값이 3이다. $a+b$ 의 값을 구하십시오. (단, $a > 0$, b 는 상수이다.)

4평 Origin

7) 그림과 같이 바둑판 모양의 도로망이 있다. 이 도로망은 정사각형 R 와 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 9개로 이루어진 모양이다.



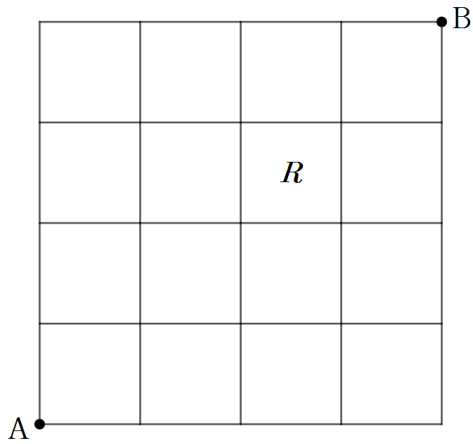
이 도로망을 따라 최단거리로 A지점에서 출발하여 B지점을 지나 다시 A지점까지 돌아올 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오.

- (가) 정사각형 R 의 네 변을 모두 지나야 한다.
- (나) 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나게 되는 정사각형은 오직 정사각형 R 뿐이다.

[2020년 4월 모의고사 나형 28번]



8) 그림과 같이 바둑판 모양의 도로망이 있다. 이 도로망은 정사각형 R 와 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 16개로 이루어진 모양이다.



이 도로망을 따라 최단거리로 A지점에서 출발하여 B지점을 지나 다시 A지점까지 돌아올 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오.

- (가) 정사각형 R 의 네 변을 모두 지나야 한다.
- (나) 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나게 되는 정사각형은 오직 정사각형 R 뿐이다.

4평 Origin

9) 양의 실수 t 와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t}$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$ 의 최솟값은 0이다.

(나) x 에 대한 방정식 $f'(x) = g(a)$ 를 만족시키는 x 의 값은 a 와 $\frac{5}{3}$ 이다. (단, $a > \frac{5}{3}$ 인 상수이다.)

자연수 m 에 대하여 집합 A_m 을

$$A_m = \{x \mid f'(x) = g(m), 0 < x \leq m\}$$

이라 할 때, $n(A_m) = 2$ 을 만족시키는 모든 자연수 m 의 값의 합을 구하시오.

[2020년 4월 모의고사 나형 30번]



10) 0이상의 실수 t 와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$tg(t) - f(t) = 0$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$ 의 최솟값은 0이다.

(나) x 에 대한 방정식 $f'(x) = g(k)$ 를 만족시키는 x 의 값은 0과 2와 k 이다. (단, $k > 2$ 인 상수이다.)

실수 α 에 대하여 집합 A_α 을

$$A_\alpha = \{x \mid g(x) = f'(\alpha), 0 < x \leq \alpha\}$$

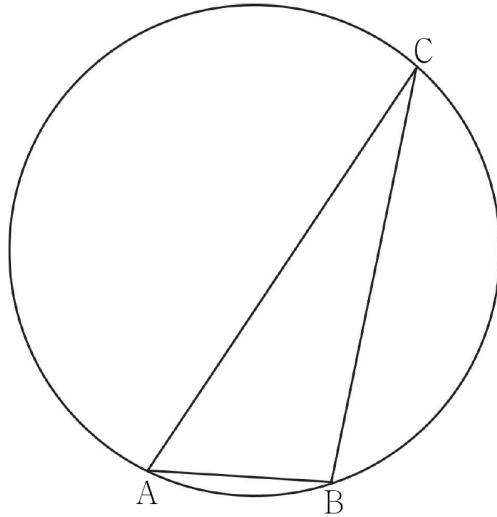
이라 할 때, $n(A_\alpha) = 2$ 을 만족시키는 α 의 범위는 $p < \alpha < q$ 이다.

$p+q$ 의 최댓값이 $m + \sqrt{n}$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 실수이고 m 과 n 은 유리수이며 \sqrt{n} 은 무리수이다.)

4평 Origin

- 11) 그림과 같이 원 C 에 내접하고 $\overline{AB}=3$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 원 C 의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$ 일 때, 원 C 위의 점 P 에 대하여 삼각형 PAC 의 넓이의 최댓값은?
(단, 점 P 는 점 A 도 아니고 점 C 도 아니다.)

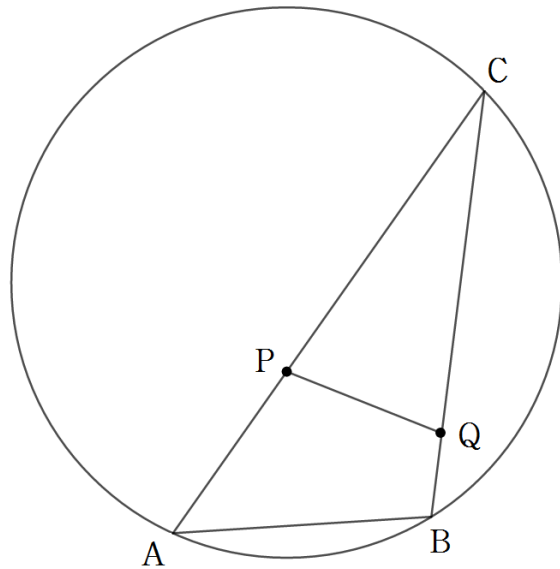


- ① $\frac{32}{3}\sqrt{3}$ ② $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$ ④ $\frac{38}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{3}$

[2020년 4월 모의고사 기형 19번]



12) 그림과 같이 원 O에 내접하고 $\overline{AB}=3$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 원 O의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$ 일 때, 선분 AC 위의 점 P와 선분 BC 위의 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}=2$ 이면서 \overline{PC} 가 최대가 되도록 하는 두 점 P, Q를 각각 P', Q'이라 하자. 삼각형 CP'Q'의 넓이는?



- ① $\frac{25}{9}\sqrt{3}$ ② $\frac{26}{9}\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$ ④ $\frac{28}{9}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{29}{9}\sqrt{3}$

4평 Origin

13) 자연수 k 에 대하여 집합 A_k 를

$$A_k = \left\{ \sin \frac{2(m-1)}{k} \pi \mid m \text{은 자연수} \right\}$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $A_3 = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

ㄴ. 1이 집합 A_k 의 원소가 되도록 하는 두 자리 자연수 k 의 개수는 22이다.

ㄷ. $n(A_k) = 11$ 을 만족시키는 모든 k 의 값의 합은 33이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2020년 4월 모의고사 가형 21번]



14) 자연수 k 에 대하여 집합 A_k 를

$$A_k = \left\{ \cos \frac{2(m-1)}{k} \pi \mid m \text{은 자연수} \right\}$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. 집합 A_5 의 1이 아닌 모든 원소의 합을 p 라 할 때, $p < 0$ 이다.

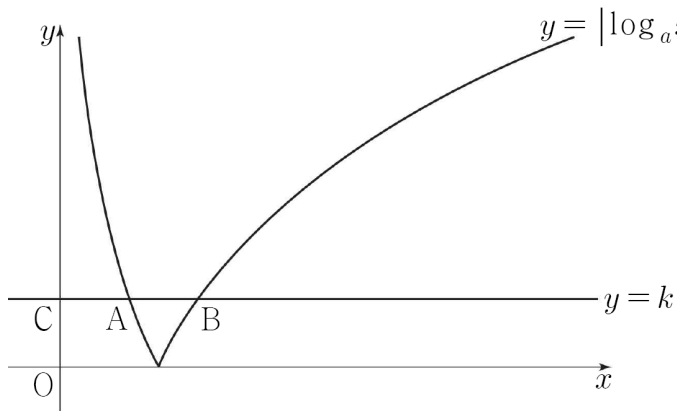
ㄴ. 집합 A_k 의 모든 원소의 곱이 0이 되도록 하는 100이하의 k 의 개수는 25이다.

ㄷ. $n(A_k) = 15$ 을 만족시키는 모든 k 의 값의 합은 57이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4평 Origin

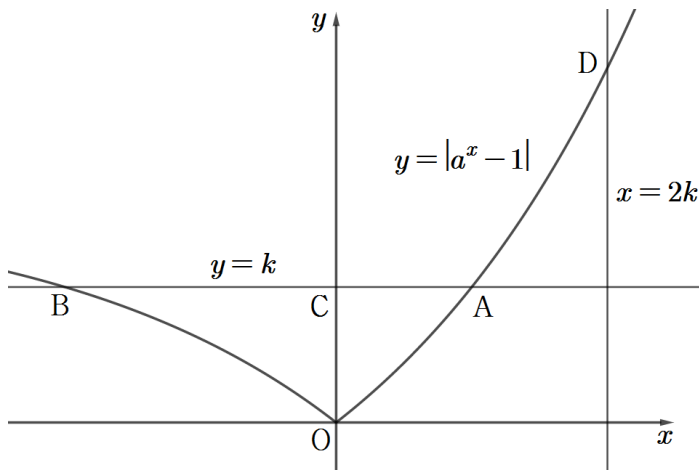
15) 그림과 같이 1보다 큰 실수 a 에 대하여 곡선 $y = |\log_a x|$ 가 직선 $y = k$ ($k > 0$)과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y = k$ 가 y 축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{OC} = \overline{CA} = \overline{AB}$ 일 때, 곡선 $y = |\log_a x|$ 와 직선 $y = 2\sqrt{2}$ 가 만나는 두 점 사이의 거리는 d 이다. $20d$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 A의 x 좌표는 점 B의 x 좌표보다 작다.)



[2020년 4월 모의고사 기형 28번]



16) 그림과 같이 1보다 큰 실수 a 에 대하여 곡선 $y = |a^x - 1|$ 가 직선 $y = k$ ($0 < k < 1$)과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y = k$ 가 y 축과 만나는 점을 C라 할 때, $\overline{OC} : \overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 1 : 2$ 이다. $x = 2k$ 와 $y = |a^x - 1|$ 가 만나는 점을 D라 할 때, 선분 CD의 길이는 l 이다. l^2 의 값은? (단, O는 원점이고, 점 A의 x 좌표는 점 B의 x 좌표보다 크다.)

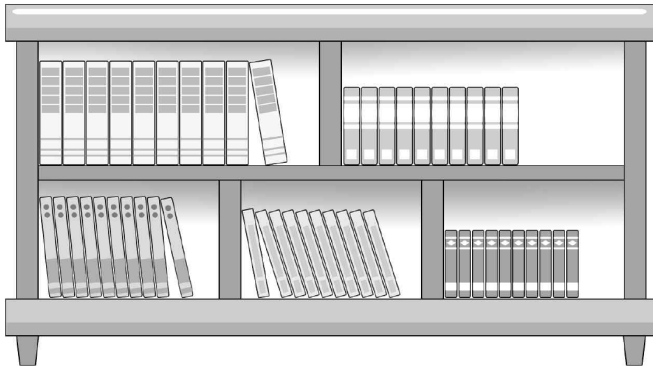


- ① $5 - 2\sqrt{5}$ ② $3 - \sqrt{5}$ ③ $4 - \sqrt{5}$ ④ $7 - 2\sqrt{5}$ ⑤ $9 - 2\sqrt{5}$

4평 Origin

17) 어느 학교 도서관에서 독서프로그램 운영을 위해 철학, 사회과학, 자연과학, 문학, 역사 분야에 해당하는 책을 각 분야별로 10권씩 총 50권을 준비하였다. 한 학급에서 이 50권의 책 중 24권의 책을 선택하려고 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 분야에 해당하는 책은 서로 구별하지 않는다.)

- (가) 철학, 사회과학, 자연과학 각각의 분야에 해당하는 책은 4권 이상씩 선택한다.
- (나) 문학 분야에 해당하는 책은 선택하지 않거나 4권 이상 선택한다.
- (다) 역사 분야에 해당하는 책은 선택하지 않거나 4권 이상 선택한다.



[2020년 4월 모의고사 기형 29번]



18)대치이강학원 N스쿨 종강파티를 위해 신라면, 진라면, 너구리, 안성탕면, 삼양라면을 각각 10개씩 총 50개를 준비하였다. 그 학급에서 이 50개의 라면 중 27개의 라면을 선택해서 27개를 끓일 수 있는 냄비에 라면을 끓으려고 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 선택하는 경우의 수는 a 이다. $\frac{a}{8}$ 의 값을 구하시오. (단, 같은 종류의 라면은 서로 구별하지 않는다.)

- (가) 신라면, 진라면, 너구리는 3개 이상씩 선택한다.
- (나) 안성탕면은 선택하지 않거나 3개 이상 선택한다.
- (다) 삼양라면은 선택하지 않거나 3개 이상 선택한다.

3평 Origin

19) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $a_{2n} = b_n + 2$
- (나) $a_{2n+1} = b_n - 1$
- (다) $b_{2n} = 3a_n - 2$
- (라) $b_{2n+1} = -a_n + 3$

$a_{48} = 9$ 이고 $\sum_{n=1}^{63} a_n - \sum_{n=1}^{31} b_n = 155$ 일 때, b_{32} 의 값을 구하시오.

[2020년 4월 모의고사 기형 30번]

☑ COMMENT 이 문제는 문제가 많다. 조건 제시의 방법이 상당히 초보적이며, 교육과정에 준한다고 볼 수도 없다. 현 교육과정에 명시되기를 “복잡한 점화식에 대한 예제를 다룰 수 없음”이라고 했는데 이런 류의 문제를 30번에 딱 넣어두신 것은 오바다. 라는 생각이다.

하지만 출제자도 할 말은 있을 거다. 나 이게 작년 수능 나형 21번 보고 만든 건데?

물론 작년 수능 21번도 이게 뭐지? 하는 느낌이 있었고

그걸 딱라한 이 문제를 맞출 순 없을 것 같다.

아무래도 이판식으로 계속 낸다면 고생할 것 같으니 이런 류의 문제를 정리하는 방법을 연구해 볼 필요는 있겠다.



20) 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \ a_{4n-2} + a_{4n} = a_n - 3$$

$$(나) \ a_{4n-1} + a_{4n+1} = a_n + 3$$

$\sum_{n=1}^{341} a_n = 93$ 일 때, a_1 의 값을 구하시오.



21) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \ a_{n+1} = 2a_n + b_n$$

$$(나) \ b_{n+1} = a_n - 2b_n$$

$\sum_{n=1}^{10} (a_n - b_n) = 1562$ 일 때, $a_1 + a_2 - b_1 - b_2$ 의 값을 구하시오.

어썸 정형경

