

* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 20번.

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $f: X \rightarrow X$ 의 치역을 A, $f \circ f$ 의 치역을 B, 함수 f 의 개수는?

(ㄱ) $n(A) \geq 3$.

(ㄴ) 집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수.

(ㄷ) $n(A) > n(B)$

$\left. \begin{array}{l} \text{(ㄱ)} \\ \text{(ㄴ)} \\ \text{(ㄷ)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} n(A)=3 \text{인 경우, } \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\} \\ n(A)=4 \text{인 경우, } \{1, 2, 4, 5\}. \\ n(A)=5 \text{인 경우} \rightarrow X \text{ (}\because \text{ 자동적으로 } n(B)=5 \text{가 된다.)} \end{array}$

(i) $n(A)=4, n(B)=3$ ($n(B)=2$ 는 X, $n(B)=2$ 라면 $n(A)=n(B)+n(f(B))=n(B)$ or $n(B)+1$)

$B = \{1, 2, 4\}$ 라 하면 (B 선택 $\#C_3$) $\{f(1), f(2), f(4), f(5)\} = \{1, 2, 4\}$.

\rightarrow 공역이 $\{1, 2, 4\}$ 인 경우에서

\rightarrow 이 경우 $f(3)=5$ 는 자동적으로 결정.

치역의 원소의 개수가 2 또는 1인 경우를 제외하면 치역이 $\{1, 2, 4\}$ 인 경우 (전사 함수 개념)

$\therefore 3^4 - (2^4 - 2) \times 3 - (1^4) \times 3 = 81 - 42 - 3 = 36$. 그러므로 (i)에서 f 의 개수는 $\#C_3 \times 36 = 144$.

(ii) $n(A)=3, n(B)=2$ (예를 들어 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$ 라 하면)

(i)에서와 같은 맥락으로 $2^3 - (1^3) \times 2 = 6$. $\rightarrow 6 \times 5 = 30$.

이때 $f(4)$ 와 $f(5)$ 중 적어도 하나는 3 값이 3이어야 한다. $\rightarrow 5$ 가지.

\therefore (ii)에서 f 의 개수는 $3C_2 \times 6 \times 5 \times 4 = 360$. $\rightarrow 4$ 는 $n(A)=3$ 인 경우 4가지.

(iii) $n(A)=3, n(B)=1$ (예를 들어 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1\}$ 라 하면)

(i)에서와 같은 맥락으로 $1^3 = 1$

이때 $f(4)$ 와 $f(5)$ 의 값은 2 또는 3, $\rightarrow 2$ 가지 = (가).

\therefore (iii)에서 f 의 개수는 $3C_1 \times 1 \times 2 \times 4 = 24$.

따라서 함수 f 의 개수는 $144 + 360 + 24 = 528$ //

박스에 맞춰 진행시키면 (가) = 2, (나) = 30, (다) = 144.