

[나승민/한성은 모의고사]

| 6월 모의고사(가형) 연습 (2/2) |

| 나승민 (성균관대 수학과)

이투스앤써, 이투스 네오

6명까지 열심히 공부하세요! 6명을 잘 보면 기분이 좋습니다.

이제 개학이 코 앞입니다. 응원합니다.

instagram @cremath_david

| 한성은 (POSTECH 수학과)

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

이곳에 쓸 멘트를 정하는 것은 매우 어려운 일입니다.

웹툰 작가의 말이 비어있는 것이 이해가 돼요.

hansungeun.com

- 저자소개, 학습자료, 교재판매

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.

- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역(가형)

5지선다형

1. $\tan \frac{4}{3}\pi$ 의 값은? [2점]

- ① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4n^2}{1+n^2}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3. 실수 p 가 모든 양수 a 에 대하여

$$\frac{\sqrt[4]{a^6}}{\sqrt[3]{a}} = a^p$$

를 만족시킬 때, p 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{6}$
④ $\frac{7}{6}$ ⑤ 1

4. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}, \quad P(B|A) = \frac{1}{5}$$

일 때, $P(A)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{6}{7}$ ③ $\frac{7}{8}$
④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-2x} \right)^{\frac{1}{x}}$ 의 값은? [3점]

- ① e ② e^2 ③ e^3
 ④ e^4 ⑤ e^5

7. $\left(2x + \frac{1}{2x} \right)^7$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는? [3점]

- ① 162 ② 164 ③ 166
 ④ 168 ⑤ 170

6. 세 숫자 1, 2, 3을 중복 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 홀수인 자연수의 개수는? [3점]

- ① 58 ② 56 ③ 54
 ④ 52 ⑤ 50

8. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 두 곡선 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 와 $y = \sin 2x$ 가

만나는 점의 개수는? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

9. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + a_2 = 12, \quad \sum_{n=2}^{\infty} a_n = 8$$

일 때, a_1 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2
 ④ 4 ⑤ 8

10. 함수 $f(x) = \tan 2x$ 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(kh) - f(0)}{h} = 10$$

을 만족시키는 실수 k 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

11. 함수 $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{x+a}$ 의 극솟값이 e 일 때,
함수 $f(x)$ 의 극댓값은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
④ $2e$ ⑤ $3e$

12. 2와 20 사이에 n 개의 수를 넣어 만든 등차수열

$$2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, 20$$

의 모든 항의 합이 143일 때, a_6 의 값은? [3점]

- ① 10 ② $\frac{21}{2}$ ③ 11
④ $\frac{23}{2}$ ⑤ 12

13. $\sin\theta \times \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) < 0$ 이고 $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ 일 때,

$\tan(\pi + \theta) \times \sin(\pi + \theta)$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{9}{20}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{20}$
 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{9}{20}$

14. 수열 $\{a_n\}$ 가

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 15, \quad \sum_{k=1}^{10} k a_k = 25$$

이고 $a_{11} = \frac{1}{10}$ 을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} k^2 (a_k - a_{k+1})$ 의

값은? [4점]

- ① 15 ② 20 ③ 25
 ④ 30 ⑤ 35

6

수학 영역(가형)

15. 약의 과학자 석태가 만들어낸 신종 바이러스
 모르나19에 의한 감염병은 회복이 불가능하다.
 전 인구의 1%가 모르나19에 감염되어 있는 때부터
 t (일) 후 모르나19에 감염된 사람의 비율 p 는

$$p = \frac{a^t}{99+a^t} \quad (\text{단, } a \text{는 } 1 \text{보다 큰 상수이다.})$$

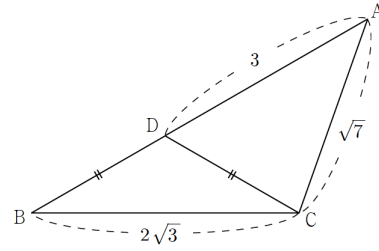
를 만족시킨다. 전 인구의 20%가 감염된 때부터 20일
 후 전 인구의 50%가 감염되었다면, 전 인구의 50%가
 감염된 때부터 30일 후 감염된 사람의 비율은? [4점]

- ① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{6}{7}$ ③ $\frac{7}{8}$
 ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

16. 그림과 같이 삼각형 ABC와 선분 AB 위의 점 D는

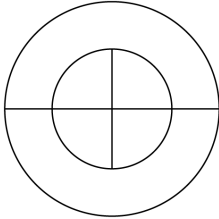
$$\overline{BC} = 2\sqrt{3}, \overline{CA} = \sqrt{7}, \overline{AD} = 3, \overline{BD} = \overline{CD}$$

를 만족시킨다. 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]



- ① $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ ② $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ③ 5
 ④ $\frac{5}{2}\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{5}{2}\sqrt{6}$

17. 그림과 같이 반지름의 길이가 서로 다른 동심원 두 개와 큰 원의 지름과 작은 원의 지름으로 나뉜 도형이 있다. 이 도형 내부에 만들어지는 6개의 영역에 각각 한 가지 색만을 이용하여 칠한다. 서로 다른 여섯 가지 색을 모두 사용하여 색칠할 수 있는 방법의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



- ① 360 ② 390 ③ 420
 ④ 450 ⑤ 480

18. 1부터 10까지의 숫자가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는 시행을 네 번 반복할 때 k 번째 꺼낸 공에 적힌 수를 a_k 라 하자. 다음은 $a_1 + a_2 + a_3$ 는 3의 배수가 아니고 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 는 3의 배수일 확률을 구하는 과정이다.

a_4 는 3의 배수일 수 없으므로
 a_4 를 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다.

(i) a_4 를 3으로 나눈 나머지가 1인 경우
 $a_1 + a_2 + a_3$ 를 3으로 나눈 나머지는 2이다.
 이는 세 수 a_1, a_2, a_3 를 3으로 나눈 나머지가

$\{0, 0, 2\}, \{0, 1, 1\}, \{1, 2, 2\}$

인 경우가 가능하다.
 이 경우의 확률은 $\boxed{\text{가}}$ 이다.

(ii) a_4 를 3으로 나눈 나머지가 2인 경우
 $a_1 + a_2 + a_3$ 를 3으로 나눈 나머지는 1이다.
 이는 세 수 a_1, a_2, a_3 를 3으로 나눈 나머지가

$\{0, 0, 1\}, \{0, 2, 2\}, \{1, 1, 2\}$

인 경우가 가능하다.
 이 경우의 확률은 $\boxed{\text{나}}$ 이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}} = \frac{63}{280}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q 라 할 때, $|p - q|$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{9}{280}$ ② $\frac{11}{280}$ ③ $\frac{13}{280}$
 ④ $\frac{3}{56}$ ⑤ $\frac{17}{280}$

19. 두 함수

$$f(x) = -x^2 + 8x + 3, \quad g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$$

에 대하여 $0 \leq x \leq 6$ 에서 정의된 함수 $h(x)$ 는

$$h(x) = (g \circ f)(x)$$

이다. $h(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 를 만족시키는 $0 \leq x \leq 6$ 인

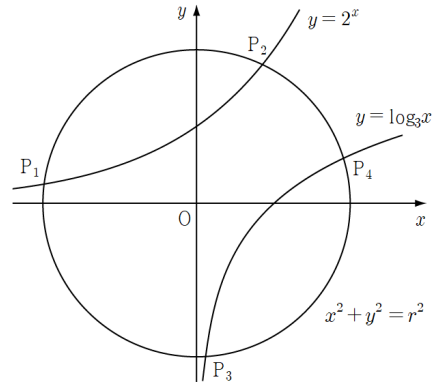
모든 실수 x 의 값들을 x_1, x_2, \dots, x_k 라 할 때,

$$k + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)$$

의 값은? (단, k 는 자연수이다.) [4점]

- ① 66 ② 70 ③ 74
- ④ 78 ⑤ 82

20. 그림과 같이 곡선 $y = 2^x$ 과 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 이 만나는 두 점을 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 곡선 $y = \log_3 x$ 와 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 이 만나는 두 점을 각각 $P_3(x_3, y_3), P_4(x_4, y_4)$ 라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $r > 1$ 이고 $x_1 < x_2, x_3 < x_4$ 이다.) [4점]



<보 기>

- ㉠. $x_3 < y_1$
- ㉡. $x_4 + y_4 < x_2 + y_2$
- ㉢. $x_1 - y_1 < x_2 - y_2$

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

21. 양의 실수 t 에 대하여 원점에서 곡선

$$y = k \ln(x-t)$$

에 접선을 그었을 때, 접점의 y 좌표가 1이 되도록 하는 실수 k 의 값을 $f(t)$ 라 하자. $f(a) = \frac{1}{2}$ 일 때, $a \times f'(a)$ 의 값은? [4점]

- ① -2 ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$
 ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{8}$

단답형

22. ${}_3H_4 \times {}_3C_2$ 의 값을 구하여라. [3점]

23. 실수 θ 가 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -2$ 를 만족시킬 때, $\tan\theta$ 의 값을 구하여라. [3점]

24. 두 양수 a, b 가

$$a^{-2}(a^2+ab)=3, \quad (a^3+b^3)(a+b)^{-2}=4$$

를 만족시킬 때, ab 의 값을 구하여라. [3점]

25. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라

하자. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n} = 2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n}$ 의 값을 구하여라.

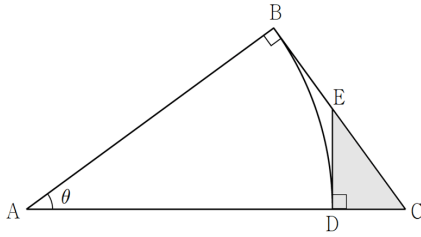
(단, 모든 자연수 n 에 대하여 $S_n \neq 0$ 이다.) [3점]

26. 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 카드가 각각 한 장씩 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 카드를 한 장씩 차례로 꺼낼 때, 첫 번째 카드에 적힌 수보다 큰 수가 적힌 카드가 네 번째에 처음으로 나올 확률은 p 이다. $60p$ 의 값을 구하여라. (단, 꺼낸 카드는 주머니에 다시 넣지 않는다.) [4점]

27. 그림과 같이 $\overline{AC}=1$, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC 가

있다. 중심이 A 이고 반지름의 길이가 \overline{AB} 인 원과 선분 AC 의 교점을 D 라 하고, 점 D 를 지나고 선분 AC 와 수직인 직선과 선분 BC 의 교점을 E 라 하자. $\angle BAC = \theta$ 라 할 때, 삼각형 CDE 의 넓이는 $S(\theta)$ 이다.

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = a$ 라 할 때, $32a$ 의 값을 구하여라. [4점]



28. 다음 조건을 만족시키는 8 이하의 자연수 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하여라. [4점]

(가) $a \leq b \leq c \leq d \leq e$

(나) $b+4=d$

29. 자연수 n 에 대하여 $n < x < n+1$ 를 만족시키고

$$\frac{x^2 + 4x}{4}$$

의 값이 정수가 되는 실수 x 의 개수를 a_n 이라 하자.

$\sum_{k=1}^{10} a_k a_{k+1}$ 의 값을 구하여라. [4점]

30. 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x) = f(x)e^x$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(|x|)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $g''(x)g''(-x) \geq 0$ 이다.

함수 $h(x) = |g(x) - 3|$ 이 $x = \alpha$, $x = \beta$ 에서 극댓값을 가지고 $h(\alpha) = h(\beta)$ 일 때, $f(6)$ 의 값을 구하여라. [4점]

[나승민/한성은 모의고사]
6월(가형) 연습(2/2) 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	⑤	02	④	03	④	04	①	05	②
06	③	07	④	08	②	09	⑤	10	③
11	②	12	③	13	①	14	③	15	④
16	②	17	①	18	①	19	⑤	20	⑤
21	⑤	22	45	23	3	24	32	25	1
26	5	27	4	28	100	29	160	30	24

COMMENT 16

$\overline{BD} = a$ 라 하면 $\cos(\angle DBC) = \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{12+(a+3)^2-7}{4\sqrt{3}(a+3)}$ 이다.

풀면 $a^3 + 6a^2 + 2a - 36 = 0$ 에서 $a = 2$ 이다.

COMMENT 18

$$p = \frac{9}{70}, \quad q = \frac{27}{280}$$

COMMENT 19

$g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 양수 x 값은 1, 3, 9, 11, 17, 19, 25, 27, ...이다. $0 \leq x \leq 6$ 일 때 $3 \leq f(x) \leq 19$ 이므로

$h(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 것은 $f(x)$ 의 값이 3, 9, 11, 17, 19일 때이고 이 중 17인 x 값은 2개다.

$k = 6$ 이고 $f(1) + f(2) + \dots + f(6) = 3 + 9 + 11 + 17 + 17 + 19 = 76$ 이다.

COMMENT 20

ㄱ, ㄴ : 곡선 $y = 3^x$ 과 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 의 두 교점은 $(y_3, x_3), (y_4, x_4)$ 이다.

ㄷ : 준 식은 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 1$ 이다.

COMMENT 21

접점의 x 좌표를 u 라 하면 $\frac{u}{u-t} = \ln(u-t)$ 이고 $k = \frac{u-t}{u} = \frac{1}{\ln(u-t)}$ 이다.

$k = \frac{1}{2}$ 일 때 $u-t = e^2$ 이고 $u = 2e^2, t = e^2$ 이다.

식 $\frac{u}{u-t} = \ln(u-t)$ 를 미분하고 값을 대입하면 $\frac{du}{dt} = \frac{3}{2}$ 이고 $f'(a) = -\frac{1}{8e^2}$ 이다.

※ 접점의 x 좌표를 $e^{\frac{1}{k}+t}$ 로 놓고 풀면 더 간단하다는 것은 비밀.

COMMENT 28

$d \leq e \leq 8 \Leftrightarrow b+4 \leq e \leq 8 \Leftrightarrow b \leq e-4 \leq 4$ 이므로

$$1 \leq a \leq b \leq e-4 \leq 4$$

에서 (a, b, d, e) 를 선택하는 경우의 수는 ${}_4H_3$ 이고

e 는 $b, b+1, b+2, b+3, b+4$ 의 다섯 가지 경우가 가능하다.

COMMENT 29

$n = 2k - 1$ 일 때, $2k - 1 < x < 2k$ 이고 이 범위에서 $\frac{x^2 + 4x}{4}$ 의 값은 $k^2 + k - \frac{3}{4}$ 보다 크고 $k^2 + 2k$ 보다 작다.

이 범위의 정수는 $k^2 + k$ 부터 $k^2 + 2k - 1$ 까지 k 개이므로 $a_n = k = \frac{n+1}{2}$ 이다.

$n = 2k$ 일 때, $2k < x < 2k + 1$ 이고 이 범위에서 $\frac{x^2 + 4x}{4}$ 의 값은 $k^2 + 2k$ 보다 크고 $k^2 + 3k + \frac{5}{4}$ 보다 작다.

이 범위의 정수는 $k^2 + 2k + 1$ 부터 $k^2 + 3k + 1$ 까지 $k + 1$ 개이므로 $a_n = k + 1 = \frac{n+2}{2}$ 이다.

COMMENT 30

조건 (가)에서 $g'(0) = 0$ 이고, 조건 (나)에서 $g''(x) = 0$ 의 두 근은 서로 뿔마다.

여기까지에서 $g(x) = a(x-2)^2 e^x$ 이고 $h(x)$ 를 췌려보면 함수 $g(x)$ 의 극댓값이 6이다.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 4x + 4)$$