

[권구승/한성은 모의고사]

| 6월 모의고사(나형) 연습 (2/2) |

| 권구승 (서울대)

이강학원(대치, 분당), 이투스앤써.

통제할 수 없는 외부 환경엔 신경을 끄고 할 수 있는 것에 집중.
기출과 연계교재는 당연히 다 풀었죠? 과목 간 밸런스 잘 챙기기!

| 한성은 (POSTECH 수학과)

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

열심히 생각하고 하나하나 스스로 납득하기.
문제 너무 많이 풀지 마시고 귀하게 푸세요.

hansungeun.com

- 저자소개, 학습자료, 교재판매

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역(나형)

1

5지선다형

1. ${}_4P_3$ 의 값은? [2점]

- ① 3 ② 4 ③ 6
④ 12 ⑤ 24

2. $\sin \frac{\pi}{6}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

3. $f(x) = x^3 + x^2 + x$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

4. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}, \quad P(A \cap B^c) = \frac{1}{3}$$

일 때, $P(B|A)$ 의 값은? (단, A^c 는 A 의 여사건이다.)

[3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2

수학 영역(나형)

5. $\log_3 2 = a$, $\log_2 5 = b$ 일 때, $\log_2 60$ 을 a , b 로 옳게 나타낸 것은? [3점]

- ① $a+b+2$ ② $a+b+\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{a}+b+2$
④ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2$ ⑤ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}$

6. 부등식 $3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 \leq 0$ 를 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합은? [3점]

- ① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

7. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\frac{6a_1}{a_2 + a_3} = 1$$

일 때, $\frac{a_4}{a_2} + \frac{a_8}{a_4}$ 의 값은? [3점]

- ① 20 ② 18 ③ 16
④ 14 ⑤ 12

8. $\tan\theta < 0$ 이고 $\sin\theta = \frac{3}{5}$ 일 때, $\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta}$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$
 ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

9. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x & (x < a) \\ x-4 & (x \geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $(x-2)f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

10. 어느 도시 시민의 2%가 신종 바이러스 코로나19에 감염되어 있다. 코로나19에 대한 진단검사는 감염자의 98%를 양성으로 진단하고, 비감염자의 4%를 양성으로 진단한다. 이 도시의 시민 중 임의로 1명을 선택하여 진단검사를 돌리는 시행을 한다. 진단결과 양성이 났을 때, 이 시민이 코로나19에 감염되어 있을 확률은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{5}{24}$ ③ $\frac{1}{4}$
 ④ $\frac{7}{24}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

11. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = -3t + 6$$

이다. $t=0$ 부터 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

- ① 8 ② 9 ③ 10
 ④ 11 ⑤ 12

12. 두 실수 a, c 와 양수 b 에 대하여 함수

$$f(x) = a \cos bx + c$$

의 최솟값은 0, 최댓값은 4이다. 방정식 $f(x) = 0$ 의 근 중 양수인 근 중 가장 작은 것이 π , 두 번째로 작은 것이 2π 일 때, abc 의 값은? [3점]

- ① -8 ② -4 ③ -2
 ④ 4 ⑤ 8

13. 반지름의 길이가 5인 원에 내접하는 삼각형 ABC의 넓이가 12이고 $\overline{BC}=8$ 이다. $\overline{AB}+\overline{AC}$ 의 값은? [3점]

- ① 12 ② $4\sqrt{10}$ ③ $4\sqrt{11}$
 ④ $8\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{13}$

14. 다항함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = 3x^2 + x \int_0^2 t f'(t) dt + \int_0^2 f(t) dt$$

를 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [4점]

- ① 8 ② 9 ③ 10
 ④ 11 ⑤ 12

15. 삼차함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = f(x) + ax$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 의 역함수가 존재하도록 하는 실수 a 의 최솟값은? [4점]

- ① 11 ② 12 ③ 13
- ④ 14 ⑤ 15

16. 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는 시행을 네 번 반복할 때 k 번째 꺼낸 공에 적힌 수를 a_k 라 하자. 다음은 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 가 12의 배수일 때, $a_1 a_2 a_3$ 가 12의 배수가 아닐 확률을 구하는 과정이다.

$a_1 a_2 a_3 a_4$ 가 12의 배수인 사건을 A , $a_1 a_2 a_3$ 가 12의 배수인 사건을 B 라 하자.

(i) 사건 A 는 네 수 a_1, a_2, a_3, a_4 의 조합이 $\{1, 2, 2, 3\}, \{2, 2, 2, 3\}, \{2, 2, 3, 3\}$ 인 경우이므로 $P(A) = \boxed{\text{(가)}}$ 이다.

(ii) 사건 B 는 세 수 a_1, a_2, a_3 의 조합이 $\{2, 2, 3\}$ 인 경우이므로 $P(B) = \frac{1}{14}$ 이다.

구하는 확률은 $P(B^c|A)$ 이다.

$$P(B^c|A) = 1 - P(B|A) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

이고 $P(A \cap B) = P(B)$ 이므로

$$P(B^c|A) = \boxed{\text{(나)}}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q 라 할 때, pq 의 값은? [4점]

- ① $\frac{4}{63}$ ② $\frac{2}{21}$ ③ $\frac{8}{63}$
- ④ $\frac{10}{63}$ ⑤ $\frac{4}{21}$

17. 1, 2, 3, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 있다. 이 카드 중 한 장을 꺼내어 확인하고 다시 넣는 시행을 2번 반복할 때, 2장의 카드에 적힌 숫자의 평균이 3일 확률은? [4점]

- ① $\frac{2}{25}$ ② $\frac{3}{25}$ ③ $\frac{4}{25}$
 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{6}{25}$

18. 사차함수 $f(x) = x(x-2)(x-5)(x-8)$ 에 대하여

$$\int_m^{m+2} f'(x) dx < 0$$

를 만족시키는 모든 자연수 m 의 값의 합은? [4점]

- ① 8 ② 10 ③ 12
 ④ 14 ⑤ 16

19. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을

S_n 이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$ 의 값은 $m=10$, $m=11$ 일 때

동일한 최댓값을 갖는다. $\sum_{k=m}^{m+4} |S_k|$ 의 값이 최소가

되도록 하는 자연수 m 의 값은? [4점]

- ① 21 ② 22 ③ 23
 ④ 24 ⑤ 25

20. 집합 $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 모든 일대일 대응 $f: X \rightarrow X$ 중 임의로 하나를 선택할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

집합

$\{x | f(x) < f(0), x \text{는 집합 } X \text{의 홀수인 원소}\}$
 의 원소의 개수는 2이다.

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\{x \mid f(x)f'(x) = 0, x \text{는 실수}\} = \{0, 3\}$
 (나) 모든 실수 t 에 대하여

$$\int_0^t f'(x) dx = f(t) + f(0)$$
 이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 어떤 열린 구간에서 감소한다.
 ㄴ. $f(3) = 27$
 ㄷ. 방정식 $f(x) - f'(k)x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k 의 합은 12이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. $\left(x + \frac{2}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^2 의 계수를 구하여라. [3점]

23. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = a_n + (2n - 1)$$

을 만족시킨다. $a_4 = 6$ 일 때, $a_3 + a_6$ 의 값을 구하여라.
 [3점]

24. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 의 극댓값이 7일 때, 상수 a 의 값을 구하여라. [3점]

25. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_4 = 32, \quad \sum_{n=1}^8 a_n = 4 \sum_{n=3}^{10} a_n$$

를 만족시킬 때, a_6 의 값을 구하여라. [3점]

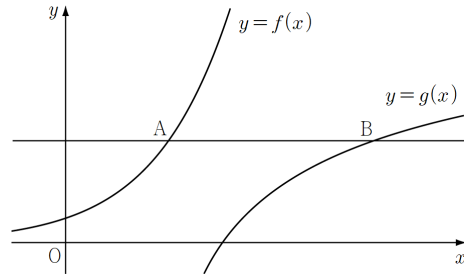
26. 그림과 같이 x 축에 평행한 직선이 두 함수

$$f(x) = 2^{x-1}, \quad g(x) = \log_2(x-2)$$

와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 두 점 A, B는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\overline{AB} = 4$
- (나) 점 A의 x 좌표는 점 B의 y 좌표와 같다.

점 B의 x 좌표를 구하여라. [4점]



27. 곡선 $y = -2x^2 + 5x$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 다음 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하여라. [4점]

(가) $a \leq b \leq c \leq d \leq e$

(나) $2(b-a) = e-d$

29. 수열 $\{a_n\}$ 은 a_1 이 자연수이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - d & (a_n \geq 0) \\ a_n + d & (a_n < 0) \end{cases} \quad (d \text{는 자연수})$$

이다. $a_n < 0$ 이 되도록 하는 n 의 최솟값을 m 이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$ 과 m 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 + a_{m-2} = 28$
 (나) $\sum_{k=1}^{m-1} a_k = 126$

$\sum_{k=1}^n a_{2k} \geq 50$ 을 만족시키는 모든 자연수 p 의 값의 합을 구하여라. (단, m 은 3 이상의 자연수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, 0)$ 에서의 접선은 x 축이다.
 (나) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선 $y = \frac{1}{3}x$ 는 점 $(4, \frac{4}{3})$ 에서 곡선과 만난다.

$f(6)$ 의 값을 구하여라. [4점]

[권구승/한성은 모의고사]
6월(나형) 연습(2/2) 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	⑤	02	④	03	③	04	②	05	③
06	①	07	①	08	④	09	②	10	⑤
11	⑤	12	①	13	②	14	④	15	②
16	④	17	⑤	18	③	19	③	20	②
21	④	22	60	23	23	24	5	25	8
26	6	27	11	28	325	29	52	30	20

COMMENT 14

$\int_0^2 t f'(t) dt = a$, $\int_0^2 f(t) dt = b$ 라 두면 $f(x) = 3x^2 + ax + b$ 이다.

$\int_0^2 t(6t+a) dt = a$, $\int_0^2 (3t^2 + at + b) dt = b$ 를 연립하여 푼다.

COMMENT 16

$$p = \frac{29}{126}, \quad q = \frac{20}{29}$$

COMMENT 17

모두 다른 것으로 봐야 한다. 전체 경우의 수는 5×5 이고,

숫자의 평균이 3인 경우의 수 : $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(3_a, 3_a)$, $(3_b, 3_b)$, $(3_a, 3_b)$, $(3_b, 3_a)$ 의 6가지

COMMENT 19

S_n 은 $n=12$, $n=13$ 일 때 최댓값을 가진다. 대칭축이 $x=12.5$ 이므로 $S_n = ax(x-25)$ 이다.

S_{25} 주변을 적당히 살펴보면, $\sum_{k=m}^{m+4} |S_n|$ 의 값은 $m=23$ 일 때 최소이다.

COMMENT 20

사건의 경우의 수는 다음과 같다.

$$\text{Case1) } f(0) = 2 : {}_3C_2 \times 2! \times 4! = 144$$

$$\text{Case2) } f(0) = 3 : {}_3C_2 \times {}_3C_1 \times 3! \times 3! = 324$$

$$\text{Case3) } f(0) = 4 : {}_3C_2 \times {}_3C_2 \times 4! \times 2! = 432$$

$$\text{Case4) } f(0) = 5 : {}_3C_2 \times 5! = 360$$

구하는 확률은 $\frac{1260}{7!} = \frac{1}{4}$ 이다.

별해 : 네 수 $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ 중 $f(0)$ 이 두 번째 큰 수가 되어야 한다.

COMMENT 21

$f(0) = 0$ 이고 $|f'(x)| = f'(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 증가함수이다. 켤러보면 $f(x) = (x-3)^3 + 27$ 이다.

방정식 $f(x) - f'(k)x = 0$ 에서 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 k 는

곡선과 직선의 접점의 x 좌표가 $x=0$ 일 때 0, 6이고 접점의 x 좌표가 $\frac{9}{2}$ 일 때 $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$ 이다.

COMMENT 28

$b-a$ 와 $e-d$ 에 대하여 분류하자. b 와 d 가 결정되면 a 와 e 는 하나로 결정된다.

$$\text{Case1) } b-a=0, e-d=0 \text{ 일 때, } 1 \leq b \leq c \leq d \leq 10 \text{ 에서 } {}_{10}H_3 = 220 \text{ 이다.}$$

$$\text{Case2) } b-a=1, e-d=2 \text{ 일 때, } 2 \leq b \leq c \leq d \leq 8 \text{ 에서 } {}_7H_3 = 84 \text{ 이다.}$$

$$\text{Case3) } b-a=2, e-d=4 \text{ 일 때, } 3 \leq b \leq c \leq d \leq 6 \text{ 에서 } {}_4H_3 = 20 \text{ 이다.}$$

$$\text{Case4) } b-a=3, e-d=6 \text{ 일 때, } 4 \leq b \leq c \leq d \leq 4 \text{ 에서 } {}_1H_3 = 1 \text{ 이다.}$$

COMMENT 29

잘 살펴보면 a_1 부터 a_{m-1} 까지는 등차수열을 이룬다.

(가)에서 $m-1$ 개의 수 a_1, a_2, \dots, a_{m-1} 의 평균은 14이다.

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_k = 14 \times (m-1) \text{이므로 } m = 10 \text{이다.}$$

$a_5 = 14, a_9 > 0, a_{10} \leq 0$ 을 만족하는 자연수 d 는 3이다. $\{a_n\}$ 은

26, 23, 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, -1, 2, -1, 2, -1, 2, ...

이고 $\sum_{k=1}^p a_{2k} \geq 50$ 을 만족시키는 자연수 p 는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10이다.

COMMENT 30

$f(x) = k(x-3)^2(x-a)$, 점 P를 $\left(t, \frac{1}{3}t\right)$ 라 두자.

$f(t) = \frac{1}{3}t, f'(t) = \frac{1}{3}, f(4) = \frac{4}{3}$ 을 연립하여 k, a, t 를 구한다.

$$f(x) = \frac{4}{9}(x-1)(x-3)^2 \text{이다.}$$