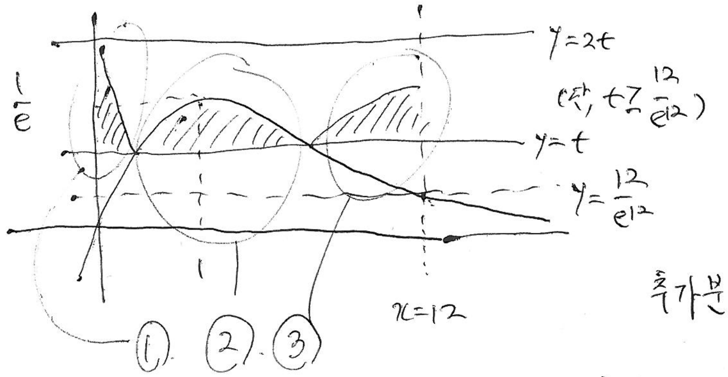
* 2019학년도 사관학교 수학 가형 30번.

$f(x) = \frac{x}{e^x} = xe^{-x}$

$(t \ge \frac{12}{e^{12}})$, $g(t) = \int_0^{12} |f(x) - t|\, dx$

적분함수 $g(t)$는 t에 대한 함수.

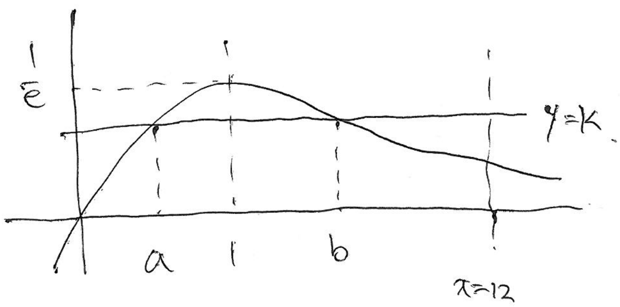
적분 $\int_0^{12} |f(x) - t|\, dx$는 x에 대한 적분.



$g(t)$는 왼쪽 그림에서 빗금친 부분을 의미.

$(\frac{12}{e^{12}} < t < \frac{1}{e})$ 에서는 ①, ③ 부분에서 증가분이 나타나고, ② 부분에서 감소분이 나타난다.

→ 증가분 = 감소분 : 극값. (pot: 극소!)



그러므로 증가분은 $(a-0)+(12-b) = 12+a-b$ 이고, 감소분은 $b-a$ 이다. 따라서 $g'(t)=0$ 인 경우는 $12+a-b = b-a = 6$ 인 경우이다.

(pot: 미분가능!)

$(0 < a < 1 < b < 12)$

$\therefore \frac{a}{e^a} = k$, $\frac{b}{e^b} = k$, $b = a+6$ 이므로 $\frac{b}{e^b} = \frac{a+6}{e^{a+6}} = \frac{a}{e^a}$. $\therefore a = \frac{a+6}{e^6}$.

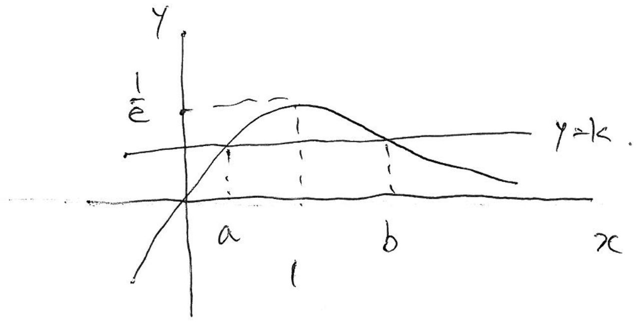
$e^6 \cdot a = a+6$ 에서 $a = \frac{6}{e^6 - 1}$. $\therefore \frac{6}{a} = e^6 - 1$ 이고 $\ln(\frac{6}{a}+1) = \ln e^6 = 6$.

$(t > \frac{1}{e})$ 에서 $g(t) = \int_0^{12} \{t - f(x)\}\, dx = \int_0^{12} t\, dx - \int_0^{12} f(x)\, dx = 12t - \int_0^{12} f(x)\, dx$.

$\therefore g'(t) = 12$. ($\int_0^{12} f(x)\, dx$는 상수)

(그래프를 통해 $t > \frac{1}{e}$ 에서 증가·감소되는 부분은 $(0 \le x \le 12)$ 부분으로 생각할 수도 있다).

$\therefore g'(1) + \ln(\frac{6}{a}+1) = 12 + 6 = 18$ //



* $b-a=6$을 그래프가 아니고 식으로 찾을 때.

$(0 \le x < a)$ $g(t) = \int_0^a \{t - f(x)\}dx \rightarrow g'(t) = a$

$(a \le x < b)$ $g(t) = \int_a^b \{f(x) - t\}dx \rightarrow g'(t) = -b+a$

$(b \le x \le 12)$ $g(t) = \int_b^{12} \{t - f(x)\}dx \rightarrow g'(t) = 12-b$.

$\therefore g'(t) = 12+2a-2b$.

$\therefore g'(t) = 12+2a-2b = 0$ 에서 $b-a=6$. $\therefore \frac{a}{e^a} = \frac{b}{e^b} = k$.

($12-2(b-a)$ $(=g'(t))$ 에서 $b-a=6$을 기준으로 부호가 바뀐다).

* 2019학년도 사관학교 수학 가형 29번.

평면 α : $2x+y+2z-9=0$

구 S : $(x-4)^2+(y+3)^2+z^2=2=(\sqrt{2})^2$.

구의 중심을 C라 하면 $C(4,-3,0)$이고

평면과의 거리는 $\dfrac{|8-3+0-9|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{4}{3}$ $(<\sqrt{2})$.

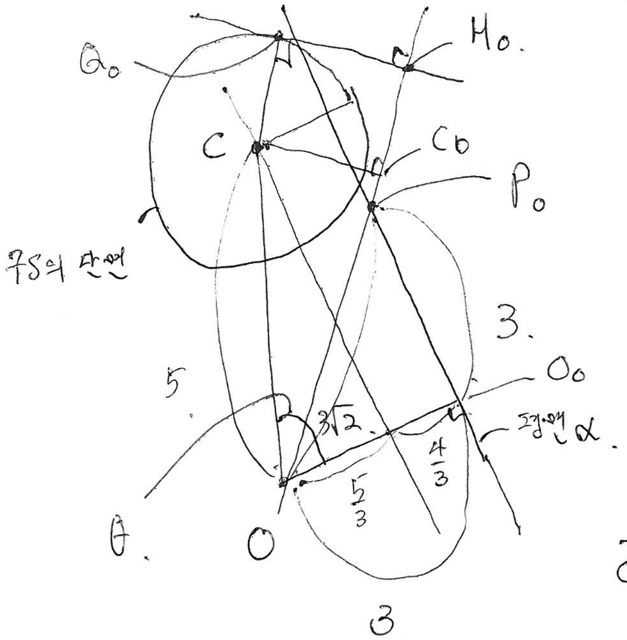
$|\overrightarrow{OP}| \le 3\sqrt{2}$ 인 α 위의 점 P, 구 위의 점 Q.

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 최댓값이 $a+b\sqrt{2}$.

$\overline{OC} = 5$.

원점 O와 평면 α의 거리는 $\dfrac{|-9|}{3} = 3$.

점 P는 평면 α 위에서 반지름 3인 원과 원 내부의 점으로 나타난다.



$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$의 값이 최대일 때 P를 P_0, Q를 Q_0라 하면

왼쪽 그림에서 P_0와 Q_0에 해당한다.

$\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \overline{OP_0} \times \overline{OH_0}$.

$\angle COO_0 = \theta$라 하면 $\left(\cos\theta = \dfrac{1}{3},\ \sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$\overline{OC_0} = 5 \times \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$. $\left(\because \angle H_0OO_0 = \dfrac{\pi}{4}\right)$.

$\overline{CQ_0} = \overline{C_0H_0} = \sqrt{2}$ 이므로

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \overline{OP_0} \times \overline{OH_0} = \overline{OP_0} \times (\overline{OC_0} + \overline{C_0H_0})$$

$$= 3\sqrt{2} \times \left(5 \times \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\right)$$

$$= 3\sqrt{2} \times \left(5 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2}\right)$$

$$= 3\sqrt{2} \times \left(5 \times \frac{(4+\sqrt{2})}{6} + \sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2} \times \frac{20+11\sqrt{2}}{6}$$

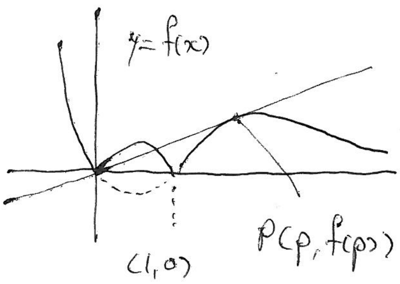
$$= \frac{22+20\sqrt{2}}{2} = 11+10\sqrt{2} \text{ //}$$

* 2019 학년도 사관학교 수학 가형 21번.

$f(x) = |x^2-x|\, e^{4-x} = |(x^2-x)e^{4-x}|$ ($\because e^{4-x} > 0$). $\rightarrow (0,0), (1,0)$ 만족.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \leq kx) \\ kx & (f(x) > kx) \end{cases} \quad (k>0).$$

$\rightarrow$ $g(x)$는 $f(x)$와 원점을 지나는 직선 kx 중 작거나 같은 값을 나타내는 함수이다.



함수 $f(x)$의 개형은 왼쪽 그림과 같고, 점 $P(p, f(p))$ (단, $p>1$) 에서의 접선이 원점을 지날 때, $(0,1)$ 구간에서 접선과 $f(x)$와의 교점 유무에 따라 $g(x)$가 달라진다.

$f(x) = |z(x)|$ 라 하면 $z(x) = (x^2-x)e^{4-x}$.

$z'(x) = (-x^2+3x-1)e^{4-x}$. $\therefore z'(p) = (-p^2+3p-1)e^{4-p}$.

$\therefore$ 접선 $y = (-p^2+3p-1)e^{4-p}(x-p) + (p^2-p)e^{4-p}$ $\leftarrow (0,0)$을 지난다.

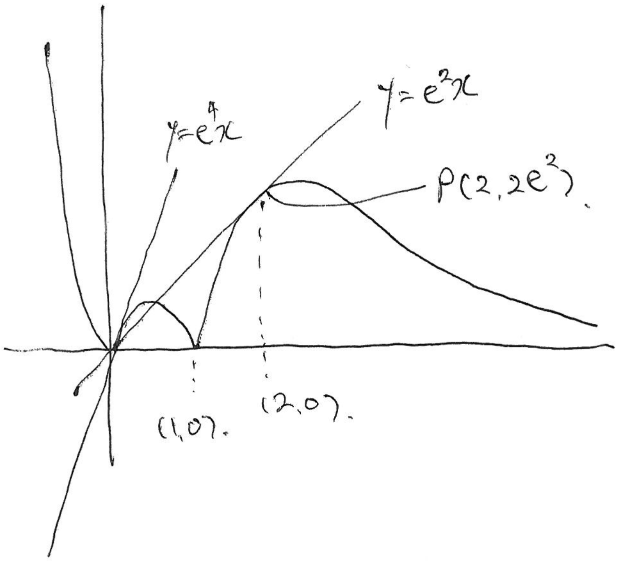
$\therefore (p^3-3p^2+p)e^{4-p} + (p^2-p)e^{4-p} = 0$ 에서 $(p^3-2p^2)e^{4-p} = 0$.

$\therefore p=2$. 점 $P(2, 2e^2)$. 이 때 직선의 기울기는 e^2.

$z'(0) = -e^4$ 이므로 $f'(0) = e^4$. $(> e^2)$

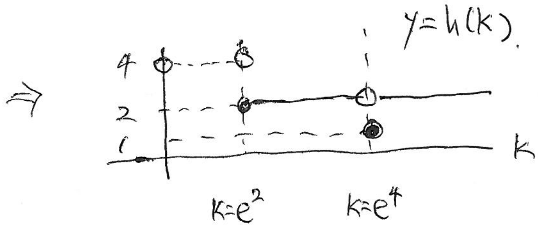
$\therefore$ 점 P에서의 접선 (원점을 지나는)은 위의 그림과 마찬가지로 $(0,1)$ 구간에서 $f(x)$와 교점 (접하지 않는)을 갖는다.

$\rightarrow$ 양수 k에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$의 미분가능하지 않은 x의 개수를 $h(k)$라 하자.

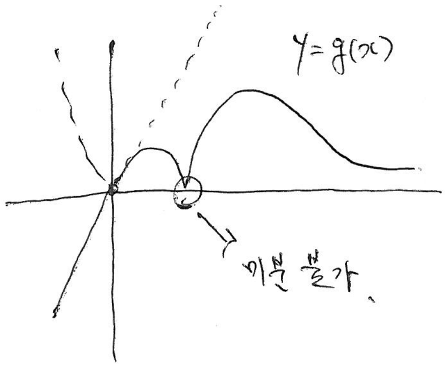


- $(k>e^4)$ $\quad h(k)=2$
- $(k=e^4)$ $\quad h(k)=1$
- $(e^2<k<e^4)$ $\quad h(k)=2$
- $(k=e^2)$ $\quad h(k)=2$
- $(0<k<e^2)$ $\quad h(k)=4$

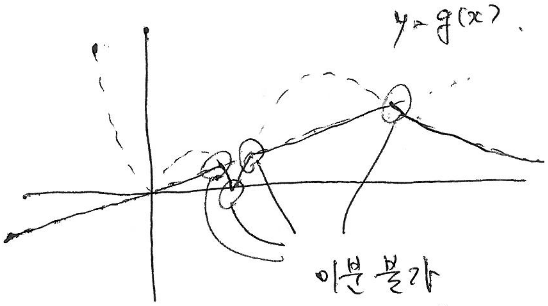
$\Rightarrow$



(sample 1) $k=e^4$.



(sample 2) $0<k<e^2$.



즉, $g(x)$의 의미와 개형을 이해할 수 있는가?를 묻는 문제.

ㄱ. $k=2$, $(0<2<e^2)$ $\therefore h(2)=4$, $f(2)=2e^2$, $g(2)=4$.

$\to$ True. $\qquad (\because y=kx=2x=g(x))$.

ㄴ. $h(k)$의 최댓값은 4 $\to$ True.

ㄷ. $h(k)=2$를 만족시키는 k의 값의 범위는 $e^2\leq k<e^4$, $k>e^4$

or $(k\geq e^2,\ k\neq e^4)$.

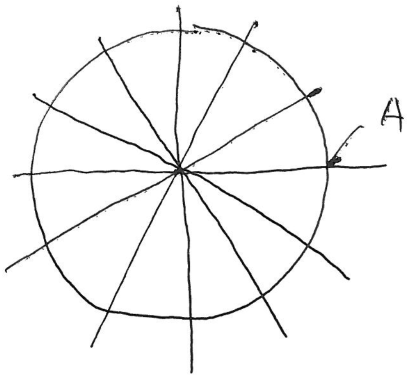
$\to$ False.

* 2019학년도 사관학교 수학 가형 28번.

전체 All : ${}_{11}C_2=55$.

$A(1,0)$, $B\left(\cos\frac{m}{6}\pi,\ \sin\frac{m}{6}\pi\right)$, $C\left(\cos\frac{n}{6}\pi,\ \sin\frac{n}{6}\pi\right)$

$(m<n)$.



$\overline{AB}=\overline{BC} \to (1,2),(2,4),(3,6),(4,8),(5,10) \cdots ①$

$\overline{AB}=\overline{AC} \to (1,11),(2,10),(3,9),(4,8),(5,7) \cdots ②$

$\overline{BC}=\overline{AC} \to (2,7),(4,8),(6,9),(8,10),(10,11) \cdots ③$

$\therefore \frac{13}{55}$ //

$(m,n)=(4,8)$ 인 경우 정삼각형이 된다.

$\Rightarrow \overline{AB}^2=\left(\cos\frac{m}{6}\pi-1\right)^2+\left(\sin\frac{m}{6}\pi\right)^2=2-2\cos\frac{m}{6}\pi$

$\overline{AC}^2=\left(\cos\frac{n}{6}\pi-1\right)^2+\left(\sin\frac{n}{6}\pi\right)^2=2-2\cos\frac{n}{6}\pi$

$\overline{BC}^2=\left(\cos\frac{n}{6}\pi-\cos\frac{m}{6}\pi\right)^2+\left(\sin\frac{n}{6}\pi-\sin\frac{m}{6}\pi\right)^2=2-2\cos\frac{n}{6}\pi\cos\frac{m}{6}\pi-2\sin\frac{n}{6}\pi\sin\frac{m}{6}\pi=2-\cos\left(\frac{n}{6}\pi-\frac{m}{6}\pi\right)$

(i) $\frac{m}{6}\pi=\frac{n}{6}\pi \to$ 없음 $(\because m<n)$

(ii) $\frac{m}{6}\pi=2\pi-\frac{n}{6}\pi \to ②$

(iii) $\frac{m}{6}\pi=\frac{n}{6}\pi-\frac{m}{6}\pi \to ①$

(iv) $\frac{m}{6}\pi=2\pi-\frac{n}{6}\pi+\frac{m}{6}\pi \to$ 없음.

(v) $\frac{n}{6}\pi=\frac{n}{6}\pi-\frac{m}{6}\pi \to$ 없음.

(vi) $\frac{n}{6}\pi=2\pi-\frac{n}{6}\pi+\frac{m}{6}\pi \to ③$

$\therefore$ 15개에서 정삼각형인 경우 3가지 중 2가지를 제외시키면 총 13가지.

$\therefore \frac{13}{55}$ 에서 $p+q=68$ //

← 삼각방정식의 일반해의 형태를 생각할 것.

(왜 (i) ~ (vi) 로 분류했는가?)

* 삼각방정식의 일반해

임의의 정수 n에 대하여 다음 각 삼각방정식의 한 특수해가 α일 때 (일반적으로 방정식의 해 중에서 절댓값이 가장 작은 것을 α로 잡는다)

1) $\sin x = a \ (|a| \le 1) \rightarrow x = n\pi + (-1)^n \alpha$

2) $\cos x = a \ (|a| \le 1) \rightarrow x = 2n\pi \pm \alpha$

3) $\tan x = a \ (-\infty < a < \infty) \rightarrow x = n\pi + \alpha$

→ 원래 일반해는 주기에서 시작하므로 sine 함수, sine 방정식 역시 $2n\pi$로 정리되지만 특성상 $(-1)^n$을 활용하면 더 간단해지고, 일반적으로 sine 방정식의 일반해는 위와 같이 설명한다.

→ 문제에서 $1 \sim 11$ 까지이므로 cosine 의 일반해를 활용할 때, $2n\pi \pm \alpha$에서 $n=0$일 때, $n=1$일 때로 나눠서 적용해야 한다.

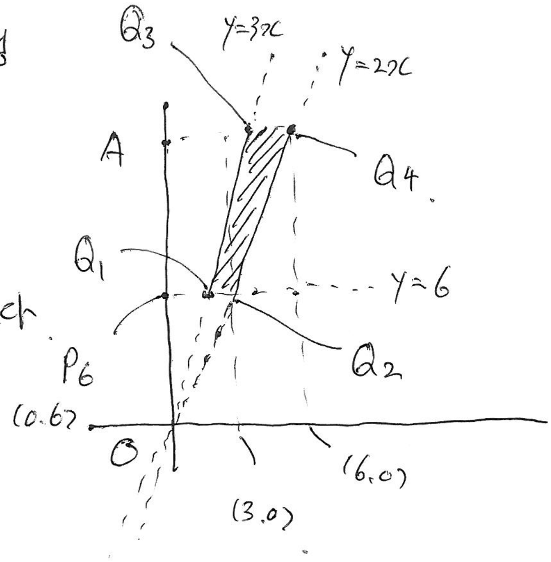
* 2019학년도 사관학교 수학 가형 20번.

$A(0,12)$, $O(0,0)$, $P(0,t)$,

(가) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$ → 직선 PQ는 x축과 평행

(나) $\frac{t}{3}\le|\overrightarrow{PQ}|\le\frac{t}{2}$.

∴ $6\le t\le12$에서 점 Q의 존재영역은 다음과 같다.



$t=6$일 때 $Q_1(2,6)$, $Q_2(3,6)$

$t=12$일 때 $Q_3(4,12)$, $Q_4(6,12)$.

∴ $|\overrightarrow{AQ}|$의 M은 $Q=Q_2$일 때 ($\because \overline{AQ_4}=\overline{AP_6}=6$, $\overline{AQ_2}>6$)

" 의 m은 점 A와 $(2,6)\sim(4,12)$ 즉 선분 Q_1Q_3 와의 거리.

∴ $M=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$. $m=\frac{|-12|}{\sqrt{10}}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$ ($\because$ $3x-y=0$, $(0,12)$)

따라서 $Mm=3\sqrt5\times\frac{6\sqrt{10}}{5}=\frac{3\sqrt5\times6\times\sqrt2\times\sqrt5}{5}=18\sqrt2$ //

* 2019학년도 사관학교 수학 나형 30번.

$f(x) = x^4 + \cdots$

$f'(0) = 0$

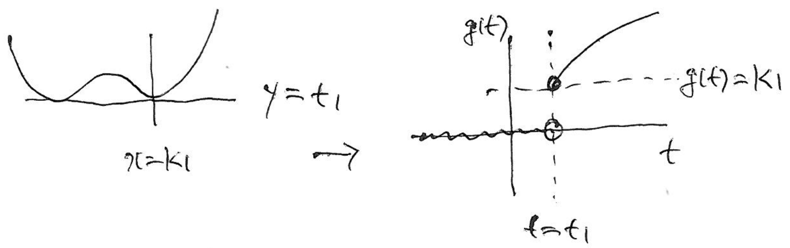
(가) 방정식 $f(x) = t$, 실근 X $\rightarrow$ $g(t) = 0$

(나) 방정식 $f(x) = t$, 실근 O $\rightarrow$ $g(t)$ = 실근의 최솟값.

$g(t)$는 $t=k$, $t=30$ 에서 불연속, $\lim_{t \to k+} g(t) = -2$, $\lim_{t \to 30+} g(t) = 1$, $k = ?$ $(k < 30)$

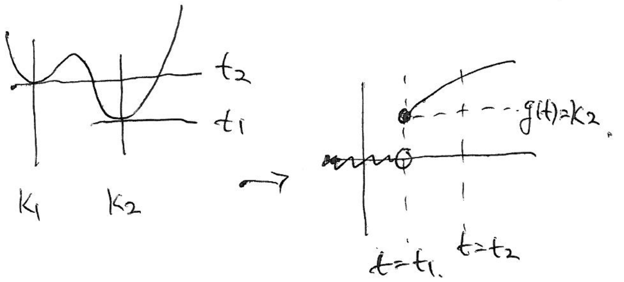
위 $f(x)$와 상관없이 $g(t)$의 의미를 정리해 보면

(i)



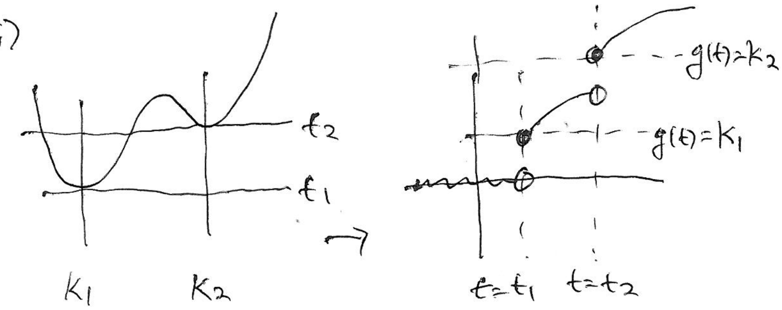
(단, t_1과 k_1의 부호에 따라 위치는 달라진다).

(ii)



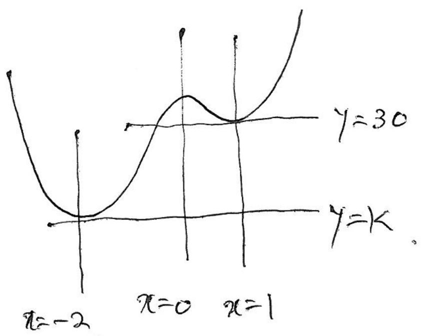
$g(t)$가 불연속인 점이 2개가 되려면 (iii)과 같이 4차함수가 극소 2곳, 극대 1곳이면서 오른쪽의 극솟값이 왼쪽의 극솟값보다 커야 한다.

(iii)



그 외 4중근, 3중근 등의 형태를 갖는 4차함수에서 파생되는 $g(t)$는 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 문제의 $f(x)$와 연계지은 개형은 다음과 같다.



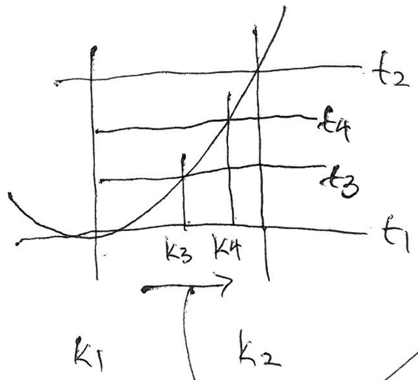
$\therefore f'(x) = 4(x+2) \cdot x \cdot (x-1) = 4x^3 + 4x^2 - 8x$

$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + C$. $f(1) = 1 + \frac{4}{3} - 4 + C = 30$.

$\therefore C = \frac{95}{3}$. $\therefore f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + \frac{95}{3}$.

$k = f(-2) = 16 - \frac{32}{3} - 16 + \frac{95}{3} = \frac{63}{3} = 21$ //

* $g(t)$ 의 그래프의 개형이 무리함수 비슷하게 나오는 과정

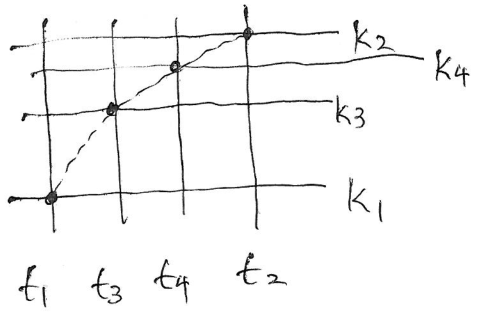


$g(t)$ 에서는 이 변화가 가로축 변화가 된다.

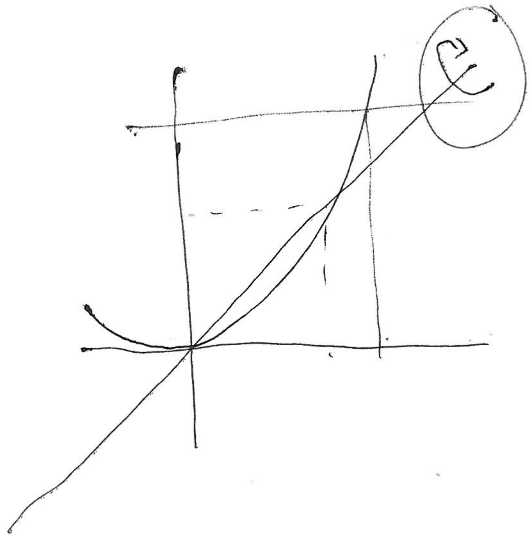
$g(t)$ 에서는 이 변화가 세로축 변화가 된다. k_1을 기본 세로축 값이라 하면 t값이 커짐에 따라 k값이 커지는 정도가 점점 줄어든다.

$t_3 - t_1 = t_4 - t_3 = t_2 - t_4$: 즉, 구간 $[t_1, t_2]$를 3등분 했을 때 ($g(t)$에서의 가로축)

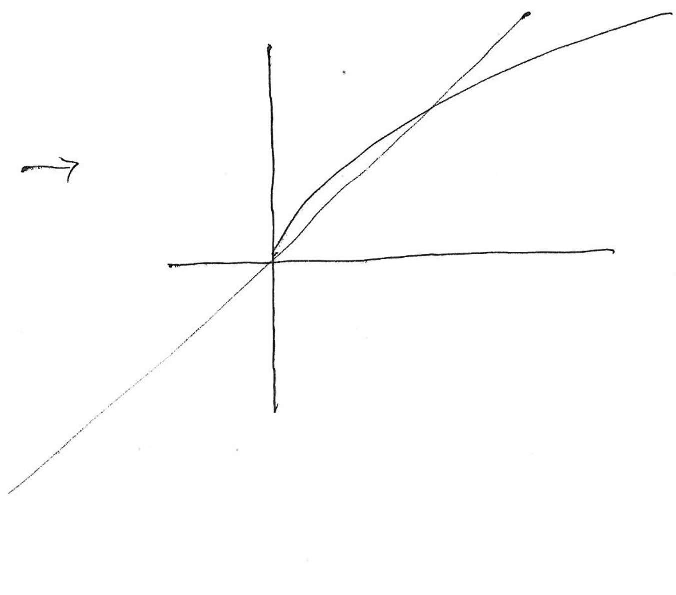
$k_3 - k_1 > k_4 - k_3 > k_2 - k_4$: 나타나는 세로축 값들의 변화는 줄어든다.



위 설명이 이해되면 다음 처럼도 이해해 볼것.



$y=x$ 기준으로 회전, 대칭이동



* 2019학년도 사관학교 수학 나형 21번.

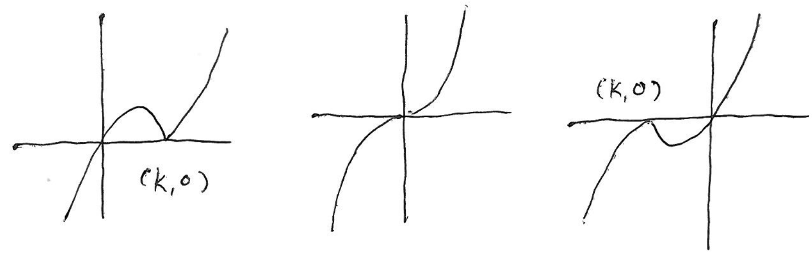
$f(x) = x|x-k|$

1) $x \in R$ 2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

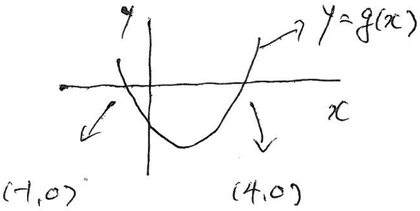
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

3) $(0,0)$, $(k,0)$

(i) $k>0$ (ii) $k=0$ (iii) $k<0$



$g(x) = x^2-3x-4 = (x-4)(x+1)$



$h(k)$는 $g \circ f(x)$와 x축과의 교점의 개수.

→ 방정식 $g \circ f(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수.

$g(\Delta) = 0$에서 $\Delta = -1$ or 4, ∴ $f(x) = -1$ or 4의 서로 다른 실근의 개수 ⇒ $h(k)$

$f(x)$에서 대칭축을 먼저 확인한다. (∵ 대칭축 주변에서 y값의 변화방향이 달라지므로 먼저 정리)

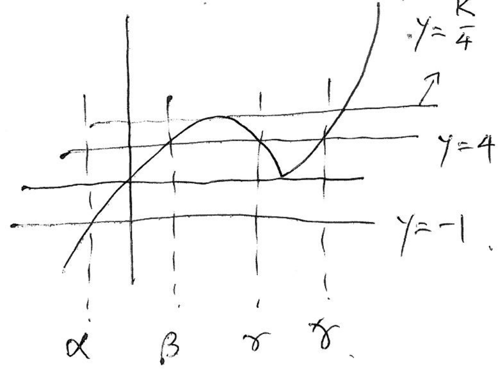
(i) $k>0$, 꼭짓점은 $\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2}{4}\right)$, (ii) $k=0$, 꼭짓점 없음. (iii) $k<0$, 꼭짓점은 $\left(\frac{k}{2}, -\frac{k^2}{4}\right)$

∴ (i)-1. $f(x) = -1$. → 실근 1개.

(i)-2. $f\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{k^2}{4} > 4$ → 서로 다른 실근 3개. ex)

$= 4$ → 〃 2개.

< 4 → 〃 1개.



∴ $k>4$, $h(k)=4$, $k=4$, $h(k)=3$, $0<k<4$. $h(k)=2$

(ii) $f(x)=-1$, $f(x)=4$ → 각각 실근 1개씩 ∴ $k=0$, $h(k)=2$.

(iii)-1, $f(x)=4$ → 실근 1개.

(iii)-2, $f\left(\frac{k}{2}\right) = -\frac{k^2}{4} > -1$ → 서로 다른 실근 1개

$= -1$ → 〃 2개.

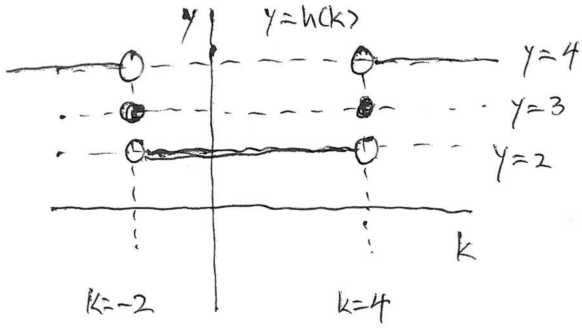
< -1 → 〃 3개.

∴ $k<-2$, $h(k)=4$

$k=-2$, $h(k)=3$,

$-2<k<0$. $h(k)=2$.

(i), (ii), (iii) 에 의한 함수 $h(k)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ) $h(2)=2$ → True.

ㄴ) $h(k)=4$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 5.

→ False.

ㄷ) $h(k)=3$을 만족시키는 모든 실수 k의 집합은

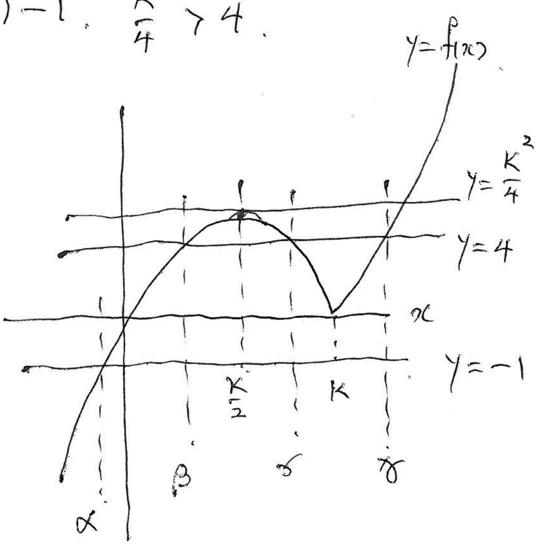
$\{-2, 4\}$. ∴ 그 합은 2. → True.

- 합성함수의 그래프를 (직접) 생각해 본다면 ......

$x \rightarrow f(x) \rightarrow g(x)$.

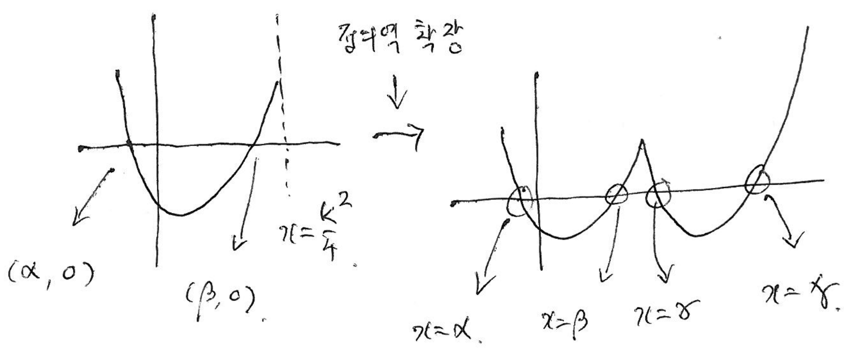
$(g(x)=(x+1)(x-4))$

(i)-1. $\frac{k^2}{4} > 4$.

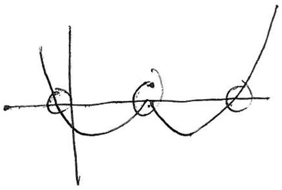


$(-\infty, \frac{k}{2})$ in x of $f(x)$ or in x under $f(x)$

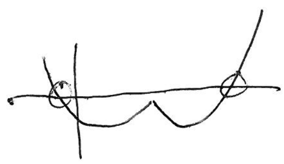
$\rightarrow (-\infty, \frac{k^2}{4})$ in x under $g(x)$.



(i)-2.



(i)-3



(ii), (iii)은 직접 해볼것.

합성함수 그래프는 $g(x)$의 개형만 유사할 뿐, 곡률은 많이 다를 수 있음에 주의.

* 2019학년도 사관학교 수학 나형 29번.

1열에 2개 좌석.
2열에 2개 좌석.
3열에 2개 좌석

6개 좌석 모두 unique.

∴ A, B, C, D, E, F 6명이 앉을 때 ⇒ All : $6! = 720$.

(가) A, B는 같은 열에.
(나) C, D는 다른 열에.
(다) E는 1열 X.

(i) A, B가 1열에 앉을 때 ~ (다) 제약을 고려할 필요 X.

∴ C 고정 D 선택 자리 (2), E 선택 자리 (2)

→ $4 \times 2 \times 2 = 16$

(ii) A, B가 2열에 앉을 때 → E는 3열

∴ 3열에 E하고 C 또는 E하고 D가 앉는다.

→ $2 \times 2 \times 2 = 8$

(EC or CE) × (DF or FD) × (1열 or 3열)

(iii) A, B가 3열에 앉을 때 → E는 2열

(ii)와 같은 맥락 $= 8$

(i) (ii) (iii) 모두에 대해 A와 B가 자리 바꾸는 경우 ⇒ ×2.

∴ 구하는 확률은 $\frac{(16+8+8)\times 2}{720} = \frac{8\times 4\times 2}{720} = \frac{4\times 2}{90} = \frac{4}{45}$ //

∴ $p+q = 49$ //

* 2019 학년도 사관학교 수학 나형 18번.

$\begin{cases} \circ, \circ, \circ, \\ \otimes, \otimes, \otimes, \otimes \end{cases}$, $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$.

(가) 상자 A에는 ○ 1개 이상

(나) ○만 있는 상자는 없다.

→ 주의 : ○⊗ 그룹으로 묶으면 안 된다. (∵ 상자안에 ○, ○, ⊗ 있을 수도 있음)

→ ○를 먼저 상자에 넣는다고 생각하고, case를 나눈다.

(i) A, B, C
○⊗, ○⊗, ○⊗ } 남는 것 ⊗ 1개. $\therefore {}_3H_1 = 3$

(ii) A, B, C
○⊗, ○○⊗, } 남는 것 ⊗ 2개. $\therefore {}_3H_2 = 6$

(iii) A, B, C
○⊗, , ○○⊗. } (ii)와 동일 $\therefore {}_3H_2$

(iv) A, B, C
○○⊗, ○⊗, } 〃 $\therefore {}_3H_2$

(v) A, B, C
○○⊗, , ○⊗ } 〃 $\therefore {}_3H_2$

(vi) A, B, C
○○○⊗, , } 남는 것 ⊗ 3개 $\therefore {}_3H_3 = 10$

$\therefore 3 + 6 \times 4 + 10 = 37$

* 2019학년도 사관학교 수학 나형 28번.

$f(x)$는 3차함수.

(가) $\lim_{x \to -2} \frac{1}{x+2} \int_{-2}^{x} f(t)\,dt = 12$. $\rightarrow$ $f(-2) = 12$.

(나) $\lim_{x \to \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x \to 0} \frac{f(x+1)}{x} = 1$, $\rightarrow$ $f(0) = 0$, $f(1) = 0$,

$\lim_{x \to \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = \triangle$ ($\triangle$는 상수) 라 하면 $f'(0) = \triangle$.

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x+1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+1) - f(1)}{(x+1) - 1} = f'(1) = \square$ ($\square$는 상수) 라 하면 $\triangle + \square = 1$.

$\therefore$ $f(x) = a \cdot x \cdot (x-1)(x-k)$ (단, $a \neq 0$)

$= ax(x^2 - (k+1)x + k) = ax^3 - a(k+1)x^2 + akx$.

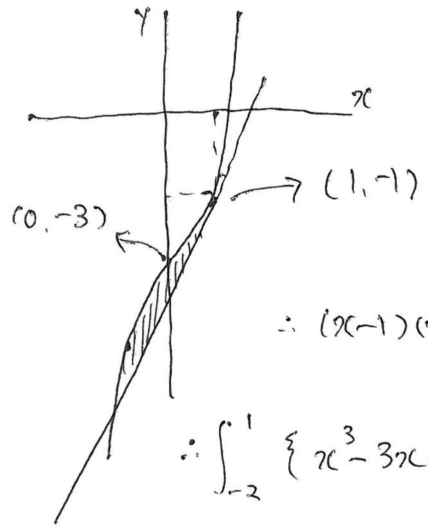
$f'(x) = 3ax^2 - 2a(k+1)x + ak$. $\therefore$ $\triangle + \square = ak + 3a - 2ak - 2a + ak = 1$.

$\therefore$ $a = 1$, $f(x) = x(x-1)(x-k)$, $f(-2) = (-2) \times (-3) \times (-2-k) = 12$.

$\therefore$ $k = -4$. $\therefore$ $f(x) = x(x-1)(x+4)$. $f(3) = 3 \times 2 \times 7 = 42$//

* 2019학년도 사관학교 수학 가형 27번.

$y = x^3 + x - 3$, $y' = 3x^2 + 1$ ($y' \neq 0$ 이므로 극값이 없다).



$(1, -1)$ 에서의 접선 $y_1 = 4x - 5$.

왼쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$.

$y = y_1$ 에서 $x^3 - 3x + 2 = 0$

$\therefore (x-1)(x-1)(x+2) = 0$ ($y - y_1 = 0$ 의 식은 $x = 1$ 에서 접한다)

$\therefore \int_{-2}^{1} \{x^3 - 3x + 2\}\, dx$ (넓이이므로 구간에서 y(곡선) $\geq y_1$(접선))

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right) - \left(4 - 6 - 4\right) = -\frac{5}{4} + 8 = \frac{27}{4}$ //

($\therefore p + q = 31$)

* 2019학년도 사관학교 수학 나형 14번.

다항함수 $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$. $\int_0^1 f(x)dx = k$ (k는 상수)

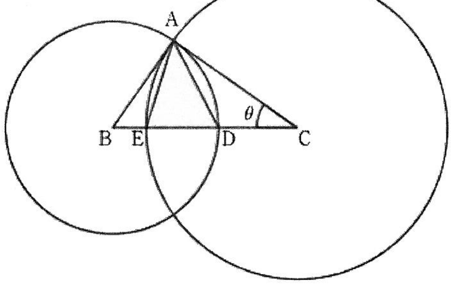
정적분 → 상수.
부정적분 → 함수.

$\therefore f(x) = \frac{3}{4}x^2 + k^2$

$\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^3 + k^2 x\right]_0^1 = \frac{1}{4} + k^2 = k$. $\therefore 4k^2 - 4k + 1 = (2k-1)^2 = 0$

$\therefore k = \frac{1}{2}$, $\therefore \int_0^2 f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x\right]_0^2 = \frac{8}{4} + \frac{2}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ //

* 2019학년도 사관학교 수학 가형 19번.

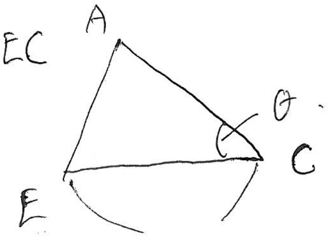


$\overline{BC}=8$, $\angle ACB=\theta$, $\therefore \angle ABC=\frac{\pi}{2}-\theta$.

$\overline{AB}=8\sin\theta$, $\overline{AC}=8\cos\theta$.

△ABD 와 △AEC 는 이등변삼각형.

△AEC

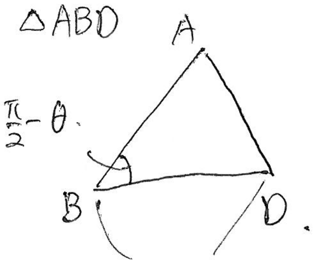


$\overline{AC}=\overline{EC}=8\cos\theta$.

$$\angle AEC=\frac{\pi-\theta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}.$$

$$\therefore \overline{AE}=2\times 8\cos\theta\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=16\cos\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2}.$$

△ABD



$\overline{AB}=\overline{BD}=8\sin\theta$.

$$\angle ADB=\frac{\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}.$$

$$\therefore \overline{AD}=2\times 8\sin\theta\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

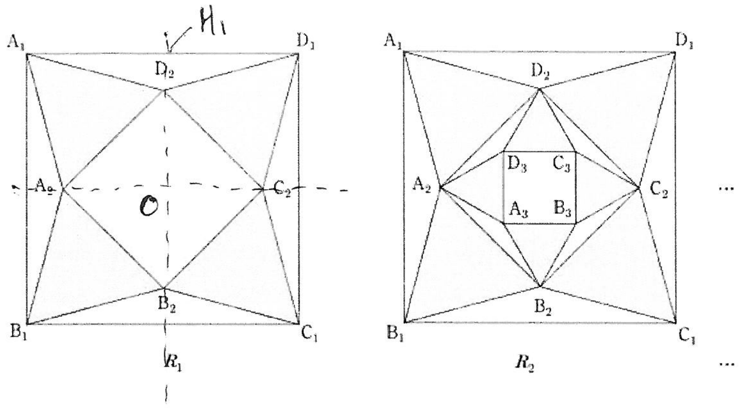
$$\angle EAD=\pi-\angle AEC-\angle ADB=\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{AD}\times\sin(\angle EAD)=\frac{1}{2}\times 16\cos\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cdot 16\sin\theta\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{2}\times16\cos\theta\times16\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times16\times16\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=16\times2=32$$

* 2019학년도 사관학교 수학 나형 19번.



1) $n: 4 \to 4$. $\therefore n=1$.

정사각형의 중심을 O라 하고, $\overline{A_1D_1}$의 중점을 H_1이라 하고, $\overline{H_1D_2}=a$라 하자.

이 때, $\triangle A_1D_2D_1$은 이등변삼각형, $\triangle A_2OD_2$는 직각이등변삼각형이므로 $\angle(A_1D_2H_1)=75°$, $\angle(A_2D_2O)=45°$.

$\therefore \angle A_2D_2A_1=60°$, $\angle D_2A_2A_1=60°$. $\therefore \triangle A_1A_2D_2$는 정삼각형이다.

$\overline{D_2O}=\overline{A_2O}=1-a$, $\therefore \overline{A_2D_2}=(1-a)\cdot\sqrt{2}$, $\overline{A_1D_2}=\sqrt{\overline{A_1H_1}^2+\overline{H_1D_2}^2}=\sqrt{1+a^2}$.

$\overline{A_2D_2}=\overline{A_1D_2}$이므로 $2(1-a)^2=2-4a+2a^2=1+a^2$에서 $a^2-4a+1=0$.

$\therefore a=\dfrac{4\pm\sqrt{12}}{2\cdot1}$에서 $a=2-\sqrt{3}$ $(\because a<1)$

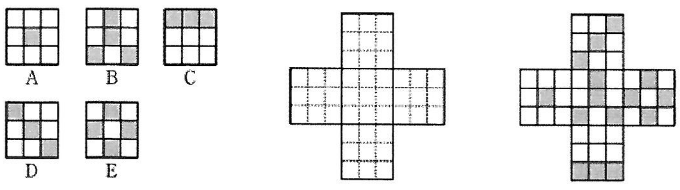
2) $l: 2 \to (1-a)\sqrt{2}$ $\therefore l_r=\dfrac{\sqrt{2}\times(\sqrt{3}-1)}{2}$, $S_r=\dfrac{2\times(4-2\sqrt{3})}{4}=2-\sqrt{3}$.

3) 초항 a는 한 변의 길이가 $(1-a)\sqrt{2}=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)=\sqrt{6}-\sqrt{2}$인 정삼각형 4개의 넓이이므로 $4\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=\sqrt{3}\times(8-4\sqrt{3})=8\sqrt{3}-12$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-r\times n}=\frac{8\sqrt{3}-12}{1-(2-\sqrt{3})}=\frac{4(2\sqrt{3}-3)}{\sqrt{3}-1}=\frac{4(2\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$=\frac{4}{2}\times(6-3+2\sqrt{3}-3\sqrt{3})=2\times(3-\sqrt{3})=6-2\sqrt{3}$$ //

* 2019학년도 사관학교 수학 가형 18번 (나형 20번)



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

A, E → 90° 단위로 돌리면 같은 모양새

B, C → 90° 단위로 돌려도 다른 모양새

D → 180° 단위로 돌릴때만 같은 모양새

∴ 중앙에 A or E가 올 때, B or C가 올 때, D가 올 때 원순열 계산이 달라진다 → 케이스 분류.

(i) (1) 중앙에 A 또는 E가 올 때 → $_2C_1$

(2) 주변에 나머지 스티커 4개 배열 → $\frac{4!}{4}=3!$

(3) 중앙에 자리잡은 스티커, 90° 단위로 돌려도 전체 모양새는 변화 없음. → 1

(4) 배열된 스티커들 각자의 회전형태 고려 (A가 중앙이라면)

E(1), B(4), C(4), D(2) → $1\times4\times4\times2$.

→ (i) 케이스인 경우, $2\times3!\times1\times1\times2\times4\times4$

(ii) (1) 중앙에 B 또는 C가 올 때 → $_2C_1$

(2) 3! (3) 4 (4) C(4), A(1), E(1), D(2) ⇒ $1\times1\times2\times4$

→ (ii) 케이스인 경우, $2\times3!\times4\times1\times1\times2\times4$ → (가) = 24 = a

(iii) (1) 중앙에 D가 올 때 → $_1C_1$

(2) 3! (3) 2 (4) A(1), E(1), B(4), C(4) ⇒ $1\times1\times4\times4$

→ (iii) 케이스인 경우, $1\times3!\times2\times1\times1\times4\times4$ (나) = 12 = b. (다) = 16 = c.

∴ $a+b+c=24+12+16=52$ //

* 2019학년도 사관학교 수학 나형 26번.

확률변수 X의 정의역 : 0~25 까지의 정수.

$0 < p < \frac{1}{2}$

확률질량함수 $P(X=x) = {}_{25}C_x p^x (1-p)^{25-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 25)$

$\rightarrow X \sim B(25, p)$

$E(X) = 25p, \quad V(X) = 25p \cdot (1-p) = 4.$

$25p^2 - 25p + 4 = (5p-4)(5p-1) = 0 \quad \therefore p = \frac{1}{5} \ (\because 0 < p < \frac{1}{2})$

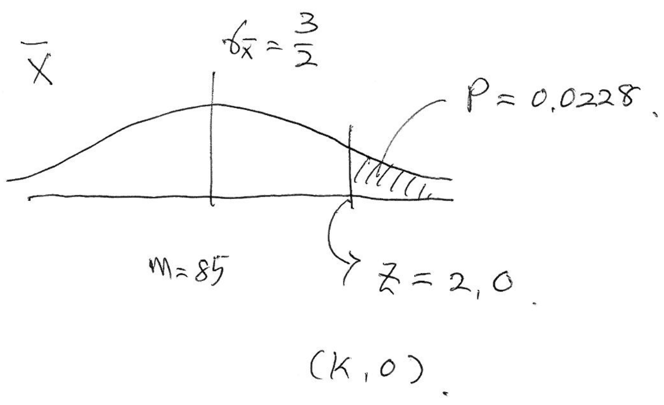
$E(X) = 5. \quad V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ (분산 = 제곱평균 - 평균제곱)

$4 = E(X^2) - 25 \qquad \therefore E(X^2) = 29.$

* 2019학년도 사관학교 수학 가형 25번 (나형 10번)

$X \sim N(85, 6^2)$

$\rightarrow$ size (=16) 추출, $\overline{X} \sim N(85, (\frac{3}{2})^2)$

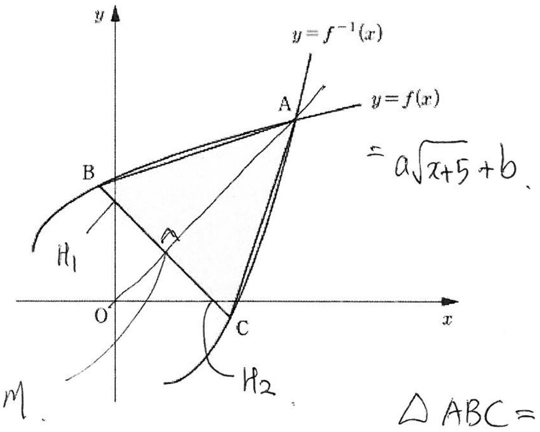


$z = \frac{거리}{\sigma} = \frac{거리}{\frac{3}{2}} = 2.0$

$\therefore$ 거리 $= 3.$

$\therefore k = 85 + 3 = 88$ //

* 2019학년도 사관학교 수학 나형 17번.



$\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로 점B와 점C는 $y=x$ 대칭이고,

$B(-1, 7)$ 이므로 $C(7, -1)$ 이다. $\overline{BC}$의 중점을 M 이라 하면 $M(3, 3)$ 이고, $\overline{OM} = 3\sqrt{2}$.

$\overline{BC} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$.

$\triangle ABC = 64 = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{MA} = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} \times \overline{MA}$. $\therefore \overline{MA} = \frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$.

$\therefore \overline{OA} = 11\sqrt{2}$, 점 A의 좌표는 $(11, 11)$ 이다.

($\because$ 증가함수와 그 역함수와의 교점은 $y=x$ 위에서 나타난다)

$$\left.\begin{array}{l} \text{점}B(-1, 7) \rightarrow 2a+b=7. \\ \text{점}A(11, 11) \rightarrow 4a+b=11. \end{array}\right\} \therefore a=2,\ b=3. \quad a \times b = 6$$

* 2019학년도 사관학교 수학 나형 15번.

$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A=\{3,4\}$, $B=\{4,5,6\}$.

$A\cup X=X \to A\subset X$.

$(B-A)\cap X=\{6\} \to 5\notin X,\ 6\in X$.

$n(X)=5$, $\therefore X=\{3,4,6,\triangle,\triangle\}$ (단, $\triangle\neq 5$)

$\therefore$ 1, 2, 7, 8 중에서 $\triangle$ 자리에 2개를 넣으면 되므로 집합 X의 개수는 ${}_4C_2=6$

* 2019학년도 사관학교 수학 나형 18번.

실수 x, $\begin{cases} p: x^2+ax-8>0 \\ q: |x-1|\le b \end{cases}$, $\sim p \Leftarrow q$.

$\therefore$ q에서 $-b\le x-1\le b$ 이고 $1-b\le x\le 1+b$, 이 구간이 $\sim p$와 동치이므로

$x^2+ax-8\le 0 \iff (x-(1-b))(x-(1+b))\le 0$

$\therefore$ $1-b^2=-8$ 에서 $b^2=9$, $\therefore b=3$ ($\because |x-1|\le b$ 에서 $b\ge 0$)

$a=-1+b-1-b=-2$. $\therefore b-a=3-(-2)=5$

* 2019학년도 사관학교 수학 나형 16번.

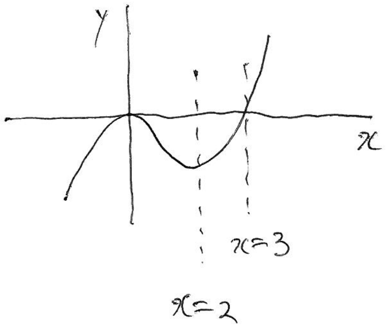
n은 자연수.

삼차함수 $y=n(x^3-3x^2)+k$ 와 $y=0$ (x축) 과의 교점의 개수 3

$\rightarrow$ $y_1=nx^3-3nx^2$ 과 $y=-k$ 와의 교점의 개수 3.

$Y_1=nx^3-3nx^2=nx^2(x-3)$

$Y_1'=3nx^2-6nx=3nx(x-2)$.



$\therefore$ 극댓값은 $Y_1\big|_{x=0}=0$

극솟값은 $Y_1\big|_{x=2}=8n-12n=-4n$.

$\therefore -4n<-k<0$

$\Rightarrow 0<k<4n$.

따라서 $a_1=3$, $a_2=7$, $a_3=11$, $a_4=15$, ---

$a_n=4n-1$. $\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{10}\{4n-1\}=4\times\frac{10\cdot 11}{2}-10=220-10$

$=210$ //

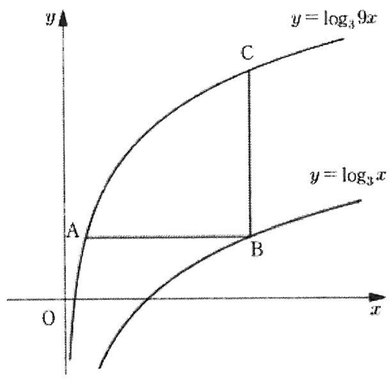
* 2019학년도 사관학교 수학 나형 25번.

실수 전체의 집합에서 연속인 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-8x+a}{x-6} & (x\neq 6)\\ b & (x=6)\end{cases}$

$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-8x+a}{x-6}=b$ (유한확정값) $\rightarrow \therefore 36-48+a=0$ 에서 $a=12$.

$\therefore \lim_{x\to 6}\frac{x^2-8x+12}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)(x-2)}{x-6}=\lim_{x\to 6}(x-2)=4=b$. $\therefore a+b=16$ //

* 2019학년도 사관학교 수학 가형 13번.



$y = \log_3 9x = 2 + \log_3 x$.

$A(a, b)$ 이면 $b = \log_3 9a$

$\therefore B(9a, \log_3 9a)$.

$y = \log_3 9x$ 는 $y = \log_3 x$ 그래프를 y축의 양의 방향으로

2만큼 평행이동한 그래프 이므로 $\overline{BC} = 2$. $\therefore \overline{AB} = 2$.

$9a - a = 2$. $\therefore a = \frac{1}{4}$.

$a + 3^b = a + 3^{\log_3 9a} = a + 9a = 10a$. $\therefore \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ //

* 2019학년도 사관학교 수학 가형 14번.

다항함수 $f(x)$, 함수 $g(x) = f(x) \cdot \sin x$

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) \cdot \sin x}{x^2} = 0.$

→ $f(x)$는 1차 다항함수 또는 상수함수. (∵ $\sin x$는 -1부터 1사이의 값을 가지므로 $\sin x = 1$일 때는 x값이 커지면서 반복해서 나타나므로 $f(x)$가 2차인 경우에는 진동하므로 발산이다)

∴ $f(x) = ax + b$ ($a = 0$ 이면 상수함수, $a \neq 0$ 이면 1차함수) (a, b는 상수)

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)\sin x + f(x)\cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{f'(x)\sin x}{x} + \frac{f(x)\cos x}{x} \right\} = 6.$

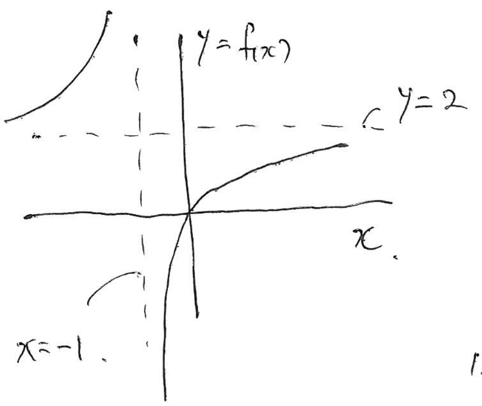
$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)\sin x}{x} = a$로 수렴하므로 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)\cos x}{x}$도 수렴해야 한다.

→ $f(x)$는 x를 인수로 갖는다. ∴ $f(x) = ax$, ∴ $\lim_{x \to 0} \frac{ax\cos x}{x} = a.$

따라서 $a + a = 6$. ∴ $f(x) = 3x$. $f(4) = 12$ //

* 2019학년도 사관학교 수학 가형 26번.

$f(x) = \frac{2x}{x+1}$, $f'(x) = \frac{2x+2-2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$ ∴ $f'(0) = 2$, $f'(1) = \frac{1}{2}$.

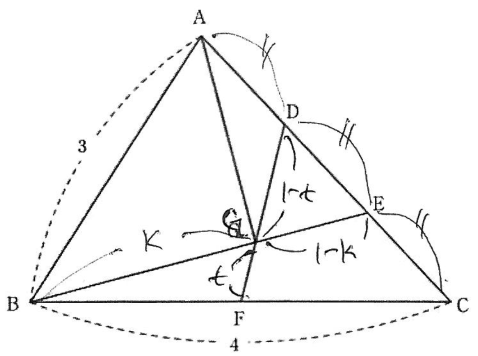


그러므로 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기 θ에 대해

$\tan\theta = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{3}{4}.$

$12\tan\theta = 12 \times \frac{3}{4} = 9$ //

* 2019학년도 사관학교 수학 가형 27번.



$|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ 가 주어졌으므로 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=0$ 을 활용할 때, 나머지 벡터 표현들은 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ 로 나타내는 게 유리하다.

(점G는 선분 FD를 $t:1-t$, 선분 BE를 $k:1-k$로 내분한다고 t, k를 설정)

$\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$. $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$. $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{FG}=t\overrightarrow{FD}\ (0<t<1)=-\frac{1}{6}t\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}t\overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{BG}=k\overrightarrow{BE}\ (0<k<1)=\frac{2}{3}k\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG}$

$\frac{2}{3}k\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{6}t\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}t\overrightarrow{BA}$.

$\therefore \frac{2}{3}k=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}t$ 에서 $4k=3-t$ ⋯ ①, $\frac{1}{3}k=\frac{2}{3}t$ 에서 $k=2t$ ⋯ ②

①, ② 에서 $t=\frac{1}{3}$, $k=\frac{2}{3}$. ∴ 점G는 선분 BE를 $2:1$로 내분한다.

$\therefore \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}=\frac{7}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=-\frac{7}{27}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{10}{27}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{8}{27}|\overrightarrow{BC}|^2=-\frac{63}{27}+\frac{10}{27}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{128}{27}=0$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{65}{10}=-\frac{13}{2}$.

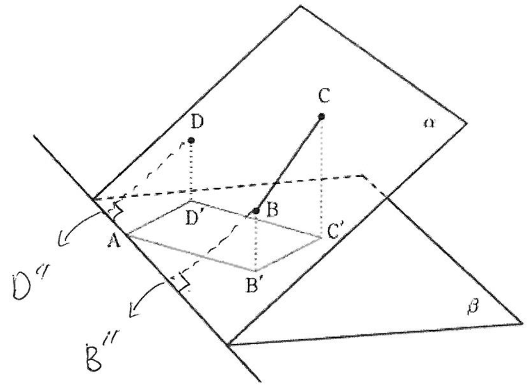
$|\overrightarrow{AC}|^2=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\cos(\angle ABC)=(|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|)^2=9+16+2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

$\therefore -24\cdot\cos(\angle ABC)=-13$ 에서 $\cos(\angle ABC)=\frac{13}{24}$ //

* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{13}{2}\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\angle ABC)=12\cos(\angle ABC)$

$\therefore \cos(\angle ABC)=\frac{13}{24}$ // ($\because$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{13}{2}$ 이면 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{13}{2}$ 이다)

* 2019학년도 사관학교 수학 가형 17번.



교선 l.

$\square AB'C'D'$ 은 정사각형, 한 변의 길이 $4\sqrt{2}$.

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AC'} = 8$. $\overline{AD} = \overline{BC}$.

$\overline{BB'} = \overline{DD'}$. $\therefore$ $\overline{BD} \parallel$ 교선 l $\parallel \overline{B'D'}$

점 D와 B에서 교선 l에 내린 수선의 발을 D'', B''이라 하면

$$\overline{D''D} = \overline{B''B}, \quad \overline{D''D'} = \overline{B''B'}$$

$\overline{AD'} = \overline{AB'}$, $\overline{BD} \parallel$ 교선 l $\parallel \overline{B'D'}$ 이므로 $\overline{D''A} = \overline{AB''}$,

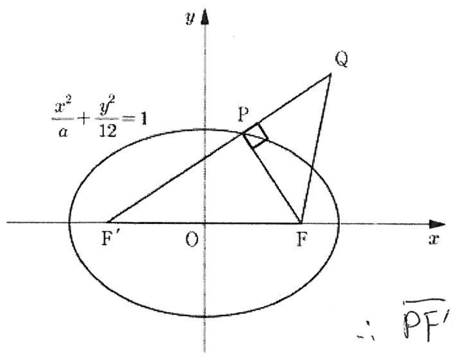
점 A는 선분 $D''B''$의 중점이고, $\angle D'AD'' = \angle B'AB'' = \frac{\pi}{4}$ $(=45°)$.

$\therefore$ $\overline{D'B'} = \overline{DB} = \overline{AC'} = 8$, $\overline{D''A} = \overline{AB''} = 4 = \overline{D''D'} = \overline{B''B'}$.

$\tan\theta = \frac{3}{4} = \frac{\overline{B'B}}{\overline{B''B'}} = \frac{\overline{B'B}}{4}$. $\therefore$ $\overline{B'B} = \overline{D'D} = 3$.

$\overline{BC} = \overline{AD}$ 이므로 $\overline{AD}^2 = \overline{AD'}^2 + \overline{DD'}^2 = (4\sqrt{2})^2 + 3^2 = 41$. $\therefore$ $\overline{BC} = \sqrt{41}$ //

✓ 2019학년도 사관학교 수학 가형 15번.



초점의 위치 관계상 $a>12$.

장축의 길이는 $2\sqrt{a} = \overline{PF'} + \overline{PF}$.

$\triangle PFQ$가 직각이등변삼각형 → $\overline{PF} = \overline{PQ}$ ($\because \angle QPF = \frac{\pi}{2}$)

$\therefore \overline{PF'} + \overline{PF} = \overline{PF'} + \overline{PQ} = \overline{F'Q} = 10$.

$\therefore 2\sqrt{a} = 10$ 에서 $\sqrt{a} = 5$, $a = 25$.

$F(\sqrt{a-12}, 0)$ 이므로 $\overline{F'F}^2 = 4(a-12) = \overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 = 52$.

$\overline{PF'} + \overline{PF} = 10$ 에서 $\overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 + 2 \cdot \overline{PF'} \cdot \overline{PF} = 100$ → $\therefore \overline{PF'} \cdot \overline{PF} = 24$.

$\therefore \overline{PF'}$, $\overline{PF}$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $t^2 - 10t + 24 = 0$.

$\therefore \overline{PF'} = 6$, $\overline{PF} = 4$ ($\because \overline{PF'} > \overline{PF}$, 점 P는 제1사분면에 존재).

$\therefore \triangle QF'F = \triangle QPF + \triangle FPF'$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 + \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 8 + 12 = 20$ //

* 2019학년도 사관학교 수학 가형 16번.

서로 다른 사탕 6개를 A, B, C에게 남김없이 다 나누어 줄 때 A가 받은 사탕 개수가 B가 받은 사탕 개수보다 많다. (누구나 1개 이상 받는다)

(i) A 2개, B 1개 $\rightarrow {}_6C_2 \times {}_4C_1 \times {}_3C_3 = 15 \times 4 = 60$

(ii) A 3개 B 1개 $\rightarrow {}_6C_3 \times {}_3C_1 \times {}_2C_2 = 20 \times 3 = 60$

(iii) A 4개 B 1개. $\rightarrow {}_6C_4 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 = 15 \times 2 = 30$

(iv) A 3개 B 2개. $\rightarrow {}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = 20 \times 3 = 60$

$\Big\}$ 210 //

→ A5개 B1개, A4개 B2개 등은 C가 사탕을 받지 못하므로 제외된다.

→ 계산기법이 단순 순열, 조합이든 중복이든 분할, 분배 등 케이스를 나눌 수 있으면

케이스를 나눠서 계산하는 것이 가장 안전하다.