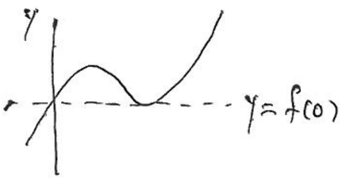
* 2020년 4월 (5월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 나형 30번.

$t>0$, $f(x)=x^3+\cdots$, $g(t)=\dfrac{f(t)-f(0)}{t}$ → $\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}$, ∴ $g(t)$는 $(0, f(0))$과 $(t, f(t))$를 잇는 직선의 기울기이다.

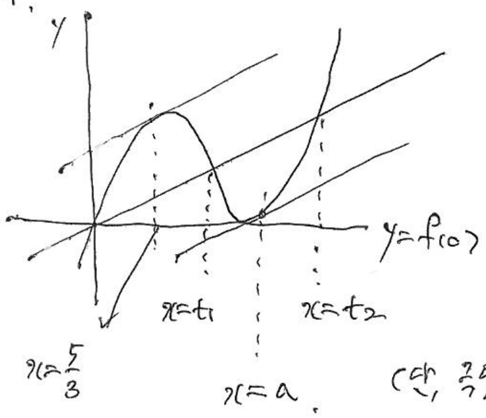
(가) 함수 $g(t)$의 최솟값은 0 이다.



(나) 방정식 $f'(x)=g(a)$의 해는 $x=a$, $x=\frac{5}{3}$ (단, $a>\frac{5}{3}$).

→ m이 자연수일 때, $A_m=\{x \mid f'(x)=g(m),\ 0<x\le m\}$. $n(A_m)=2$를 만족시키는 m의 합?

1) $g(t)$ 함수의 이해.



→ 세 직선의 기울기는 동일하다.

이 때 $f'(\frac{5}{3})=f'(a)$이고, 이 값과

$g(t_1)=g(t_2)=f'(\frac{5}{3})=f'(a)$ 이다.

(단, 극댓값의 x좌표는 $\frac{5}{3}$ 이상, 극솟값의 x좌표는 a 이하)

2) 식의 작성.

극솟값을 갖는 x를 $x=k$라 하면 $(k>0)$, $f(x)=x\cdot(x-k)^2+f(0)$, $f'(x)=(x-k)(3x-k)$,

$$g(a)=\frac{f(a)-f(0)}{a}=\frac{a\cdot(a-k)^2}{a}=(a-k)^2 \quad (\because a\neq 0)$$

∴ $(x-k)(3x-k)=(a-k)^2$ 의 방정식을 만족시키는 x가 $x=\frac{5}{3}$, $x=a$ 이다.

(i) $x=a$ 일 때 $a=k$ 이면 성립. $a\neq k$ 이면 $3a-k=a-k$ 에서 $a=0$. (조건 위배)

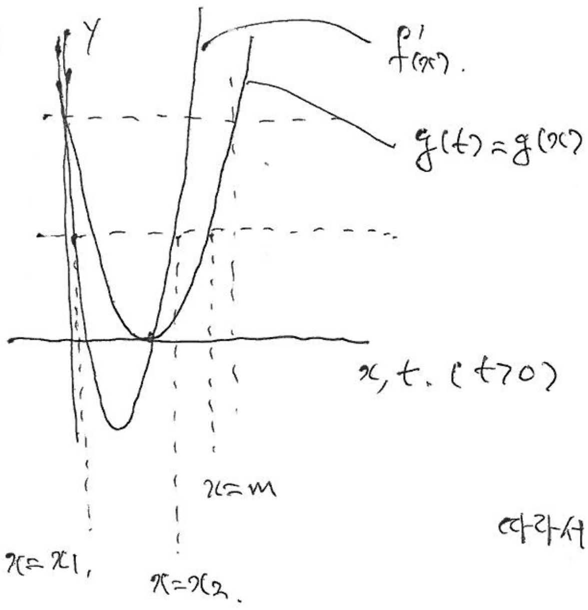
∴ $a=k$, $x=\frac{5}{3}$일 때 $(\frac{5}{3}-k)(5-k)=(a-k)^2=(k-k)^2=0$. ∴ $k=a=5$ $(>\frac{5}{3})$

따라서 $f(x)=x(x-5)^2+f(0)$ 이 된다. 또한 $g(t)=\dfrac{t(t-5)^2}{t}=(t-5)^2$.

위의 (1) $g(t)$ 함수의 이해에서 $x=t_1$ 인 경우 즉 $x=t_1=m$인 경우 불가능.

($a=k=5$인 경우와 이전과 이후 모두 불가능하다는 점 확인할 것)

따라서



∴ $m=10$일 때 $x_1=0$ 이므로 조건에 위배.

$m=5$일 때 $0<x_1<x_2<m=5$ 이므로

조건 충족.

∴ $m = 5, 6, 7, 8, 9$.

따라서 모든 자연수 m의 값의 합은 $7\times 5=35$ //

→ 평소와 달리 (?) 교육청 해설이 매우 authentic 하게 설명되어 있음. 꼭 참고할 것.