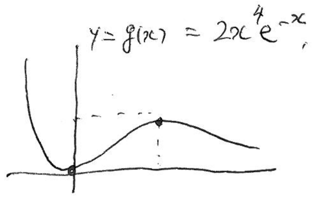
* 2019 학년도 평가원 9월 수학 가형 30번.

$f(x)=\frac{1}{2}x^4+\cdots$, $f(x)$의 최솟값은 0,

$g(x)=2x^4e^{-x}$, $h(x)=f\circ g(x)$



$g'(x)=(8x^3-2x^4)e^{-x}$

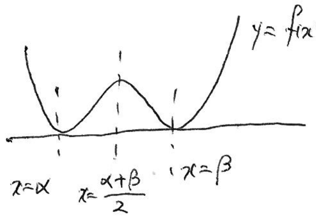
$=2x^3(4-x)e^{-x}$

(가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4.

$f(\triangle)=0$ 을 만족시키는 $\triangle$가 1개 뿐이면 불가 (∵ $g(x)=\triangle$를 만족시키는 서로 다른 x는 최대 3개)

∴ 최고차항의 계수가 양수인 4차함수의 최솟값이 0이고,

조건 (가)를 만족시키려면 개형은 오른쪽과 같다.



$y(=g(x))$ 값에 따른 서로 다른 실근의 개수는

① 1 ($y=0$), ② 3 ($0<y<512e^{-4}$), ③ 2 ($y=512e^{-4}$), ④ 1 ($y>512e^{-4}$) 와 같다.

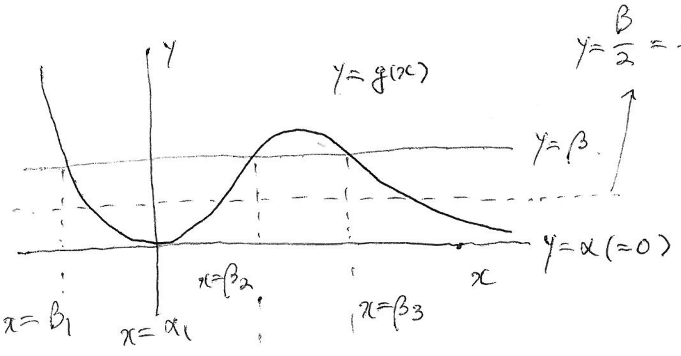
이 때, ①부터 ④를 이용하여 4개를 만드는 경우는

(i) ①+②, (ii) ②+④ 의 두가지 경우이다.

①,③은 중복불가, ②,④는 중복가능

(∵ ③+③의 경우는 불가능)

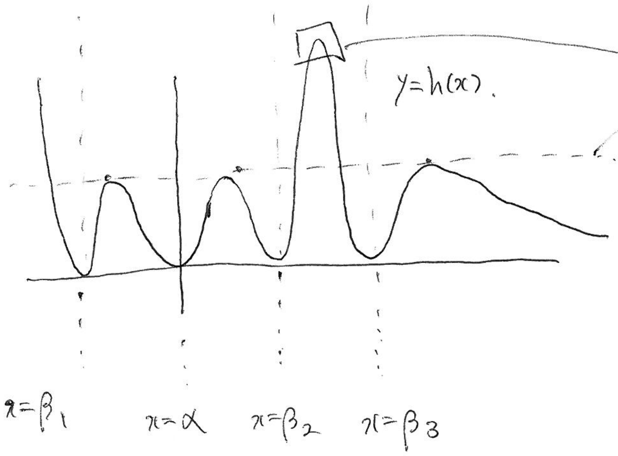
(i) $\alpha=0$, $0<\beta<512e^{-4}$



$y=\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$ (∵ $\alpha=0$)

$g(\alpha_1)=g(0)=0 \rightarrow f(0)=0$ (∵ $\alpha=0$)

$g(\beta_1)=g(\beta_2)=g(\beta_3)=\beta \rightarrow f(\beta)=0$



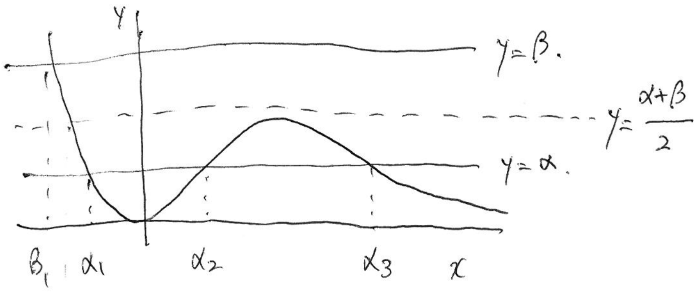
→ 이학정 상태, 지금까지의 정보로는 점선으로 표시된 극값보다 클수도, 작을수도 …

$y=f(x)$의 극댓값

⇒ $g(x)$의 함숫값이 $\frac{\beta}{2}$, ∴ $f(\frac{\beta}{2})$는 $f(x)$의 극댓값이 되고, $h(x)$값이 된다.

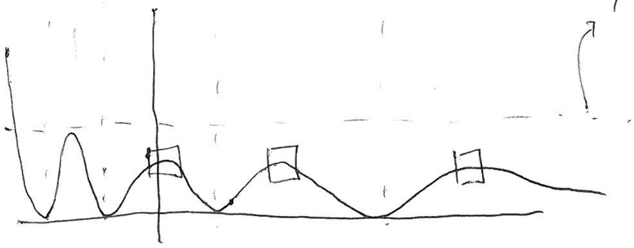
$h(\alpha)=h(0)$은 극솟값 → (나)조건 충족.

(ii) $0 < \alpha < 512e^{-4}$, $\beta > 512e^{-4}$.



→ 이 값이 $y=512e^{-4}$ 보다 클수도, 같을 수도, 작을 수도 있다. (미확정 상태)

$y=f(x)$의 극댓값.

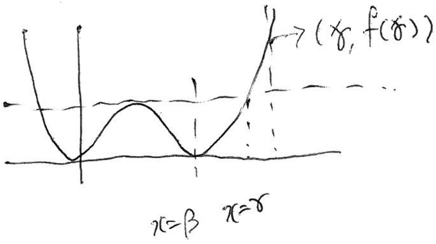


□ 부분은 미확정 상태

단, $g(0)=0$, $f(0)>0$ ($\because \alpha>0$, $f(0)$은 감소 상태)

→ (나) 조건을 충족시키지 못한다.

따라서 (ii) 경우는 불가능한 경우이다. ⇒ (i) 에서 미확정 상태인 $h(4)=f\circ g(4)=f(512e^{-4})$를 확인.

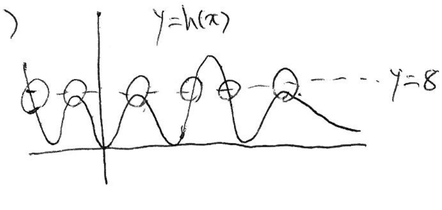


(ㄱ) $g(4)>\gamma \rightarrow h(4) > f(x)$의 극댓값 (예를 들어서 $x=\gamma$인 경우)

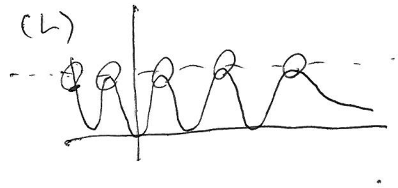
(ㄴ) $g(4)=\gamma$, (ㄷ) $g(4)<\gamma$.

$g(4)=512e^{-4}$.

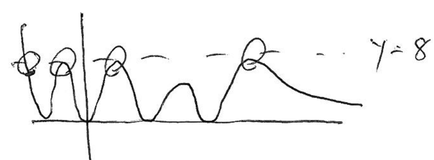
(ㄱ)



(ㄴ)



(ㄷ)



○ (=서로 다른 실근) 6개. ○ 5개. ○ 4개.

따라서 (ㄱ) 에서 조건 충족. $\therefore f(x)=\frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 = \frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2$. $f(\frac{\beta}{2})=8$ (극댓값)

$\frac{1}{2}\times\frac{\beta^2}{4}\times\frac{\beta^2}{4} = \frac{\beta^4}{32} = 8$. $\therefore \beta^4 = 2^8$. $\therefore \beta=4$ ($\because \beta>\alpha$ $(\alpha=0)$).

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2$.

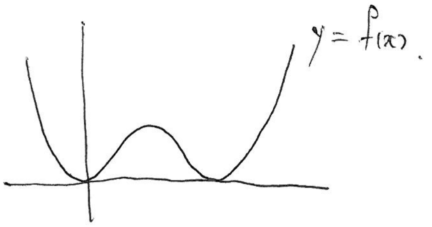
$f'(x)= x(x-4)^2 + x^2(x-4)$

$\therefore f'(5)= 5+25=30$ //

$h(x) = f \circ g(x)$. ∴ $x \to g(x) \to f(x) \to h(x)$.

$g(x)$ 함수는 주로 변수값을 생각하고, $f(x)$ 함수는 개형을 생각해서 $h(x)$ 개형을 추론한다.

(A)

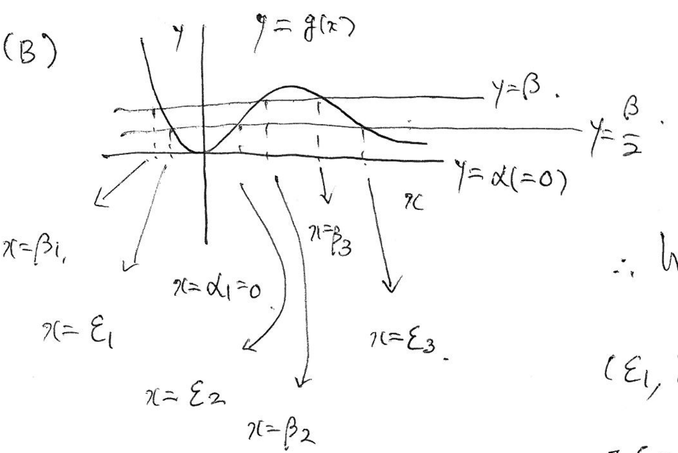


$g(\alpha_1)=g(0)=0$. $f(0)=0$.

$g(\beta_1)=g(\beta_2)=g(\beta_3)=\beta$, $f(\beta)=0$. (극솟값).

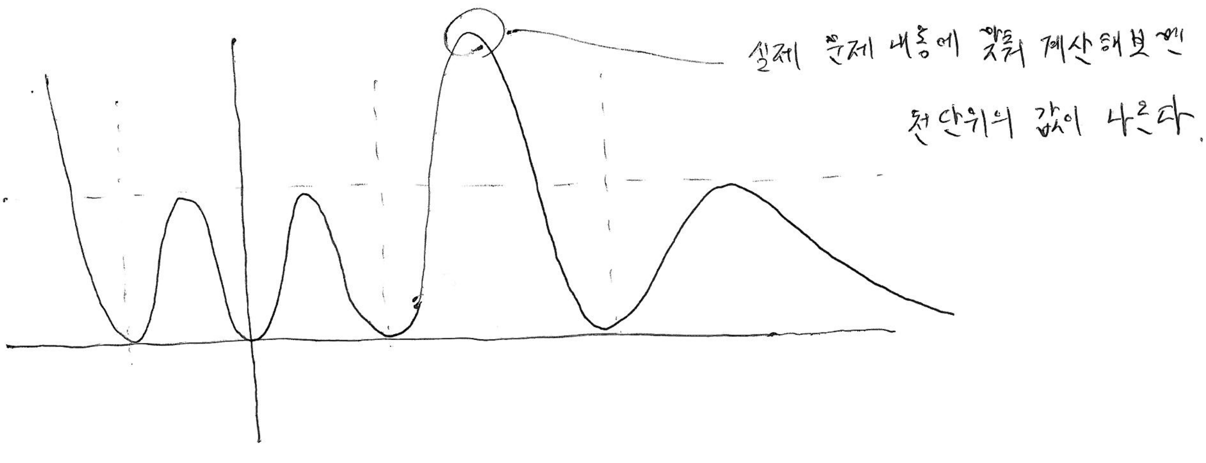
$g(\varepsilon_1)=g(\varepsilon_2)=g(\varepsilon_3)=\frac{\beta}{2}$, $f(\frac{\beta}{2})=k$ (극댓값).

(B)



∴ $h(x)$는 $(0,0)$, $(\beta_1, 0)$ $(\beta_2, 0)$, $(\beta_3, 0)$ (ε_1, k), (ε_2, k), (ε_3, k) 등을 지나고 각각의 점들은 $h(x)$에서 극점이 된다. (이외의 극점 존재함)

이와 같이 중간 기준점을 잡고 그래프를 도출하는 것이 편한 경우가 많다.



x값 변화시키면서 나오는 $g(x)$값에 맞춰서 $f(x)$값을 구한 뒤에 나타내는 방법도 생각해 볼 것. (ex: $x<\beta_1$ 이면 $g(x)>\beta$, $f(x)$에서는 두번째 극솟값의 오른쪽 증가하는 부분인데, $x\uparrow \to g(x)\downarrow \to f(x)\downarrow$. 즉, $h(x)$에서 $x<\beta_1$ 부분에서는 x값이 커지면 $f(x)$에서 오른쪽에서 왼쪽으로 ($f(x)$에서는 $x>\beta$) 가는 부분을 대칭시키는 형태이다.

* V2 - 합성함수의 그래프를 직접 그리지 않는 경우

(i) $\alpha=0$, $0<\beta<512e^{-4}$.

$\lim_{x\to0+} f\circ g(x) \to \downarrow$ ∴ $\lim_{x\to0+} f(0+) \to \downarrow$.

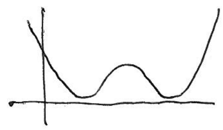
$\lim_{x\to0-} f\circ g(x) \to \downarrow$ ∴ $\lim_{x\to0-} f(0+) \to \downarrow$.

} $x=0$의 좌우에서 모두 $x\to0$ 상태에서 감소한다. ⇒ 극소 OK.

(ii) $0<\alpha<512e^{-4}$, $\beta>512e^{-4}$.

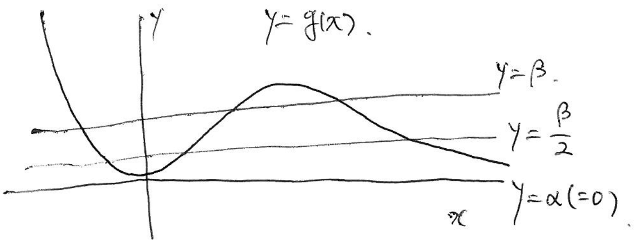
$\lim_{x\to0-}$ 살펴보지 않아도 극소 불가능.

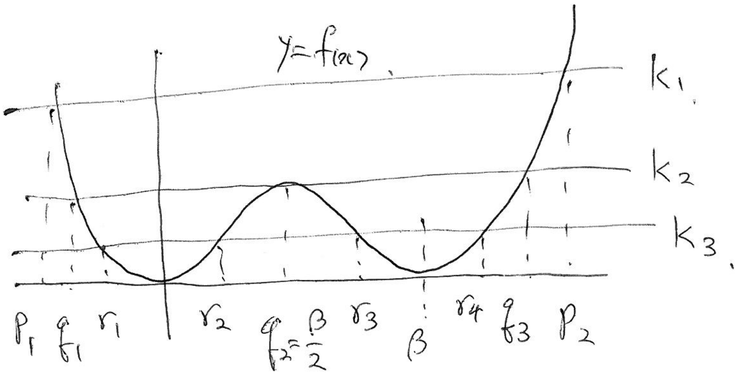
$\lim_{x\to0+} f\circ g(x) = \lim_{x\to0+} f(0+) \to \uparrow$



→ 이런 $f(x)$에서 $\lim_{x\to0+}$ 상황이면 값이 커진다.

∴ $\alpha=0$, $0<\beta<512e^{-4}$.





(i-1) $k_1=8$ ($p_1<0$, $p_2>0$) → 3개뿐.

(i-2) $k_2=8$ ($q_1<0$, $q_2=\frac{\beta}{2}>0$, $q_3>\beta$) → q_2, q_3에서 각각 3개씩이면 가능.

→ 즉, $y=g(x)$ 그래프에서 q_2는 3개, q_3는 $\beta<q_3<512e^{-4}$이면 3개.

(i-3) $k_3=8$ ($r_1<0$, $0<r_2<\frac{\beta}{2}$, $\frac{\beta}{2}<r_3<\beta$, $r_4>\beta$)

→ r_2, r_3에서 각각 3개, r_4에서 1개 이상.

∴ (다) 조건을 만족시키는 경우는 (i-2) 경우이고 $f(x)$의 극댓값 $f(\frac{\beta}{2})=8$이다.

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2$

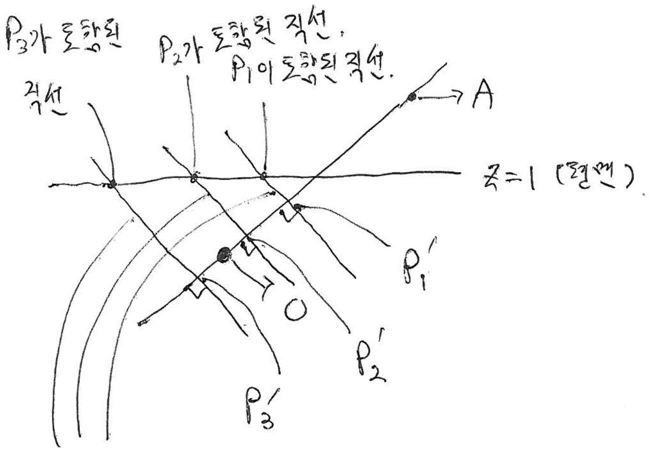
$f'(x)=x(x-4)^2+x^2(x-4)$

} ∴ $f'(5)=5+25=30$ //

* 2019학년도 평가원 9월 수학 가형 29번.

점 A $(3, \frac{1}{2}, 2)$, 평면 $z=1$ 위의 세 점 P_1, P_2, P_3.

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \frac{11}{3}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_2} = 1$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} = -\frac{7}{4}$.　$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{9+\frac{1}{4}+4} = \frac{\sqrt{53}}{2}$



세 점 P_1, P_2, P_3의 직선 OA 위로의 정사영을 P_1', P_2', P_3'이라 하고, xy 평면 위로의 정사영을 P_1'', P_2'', P_3''이라 하자.

평면 (∴ 평면이 직선으로 표현되는 각도 + 직선이 점으로 표현되는 각도).

따라서 세 점 P_1, P_2, P_3가 평면 $z=1$ 위에서 각각 포함된 직선들은 직선 OA를 평면 $z=1$ 위에서 정사영된 직선과 각각 수직이다. 직선 OA의 $z=1$ 평면 위로의 정사영된 직선의 기울기는 $\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$ 이므로, 세 점 P_1, P_2, P_3가 정사영된, 포함된 직선의 기울기는 모두 -6이 된다.

직선 l도 $z=0$ (xy평면) 평면에 정사영 시키면 $y=-6x+k$가 되므로 세 점 P_1, P_2, P_3가 포함된 평면 $z=1$ 위의 직선들을 $z=0$ 위에 정사영시키면 네 직선은 절편만 다르고 평행임.

∴ 점 $P_1(x_1, y_1, 1)$, 점 $P_2(x_2, y_2, 1)$, 점 $P_3(x_3, y_3, 1)$ 이라 하면

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} = 3x_1 + \frac{1}{2}y_1 + 2 = \frac{11}{3}$ 에서　$y = -6x + \frac{10}{3}$ (xy 평면 위로 정사영)

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_2} = 3x_2 + \frac{1}{2}y_2 + 2 = 1$ 에서　$y = -6x - 2$ (〃)

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} = 3x_3 + \frac{1}{2}y_3 + 2 = -\frac{7}{4}$ 에서　$y = -6x - \frac{15}{2}$ (〃)

k값은 정수이므로

$$\left.\begin{aligned} &k \geq \tfrac{10}{3} \text{ 에서 } k = 4, 5, 6, \cdots\cdots \\ &k \leq -\tfrac{15}{2} \text{ 에서 } k = -8, -9, -10, \cdots \end{aligned}\right\} \therefore m - M = 4-(-8) = 12$$

* 2019학년도 평가원 9월 수학 가형 21번.

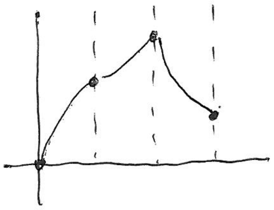
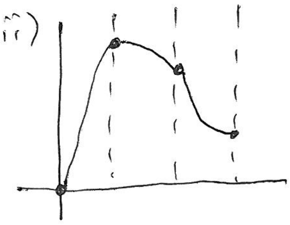
0이 아닌 세 정수 l, m, n / $|l|+|m|+|n| \le 10$ .... ①

$[0, \frac{3\pi}{2}]$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$, $f(0)=0$, $f(\frac{3}{2}\pi)=1$

$$f'(x) = \begin{cases} l\cos x & (0, \frac{\pi}{2}) \\ m\cos x & (\frac{\pi}{2}, \pi) \\ n\cos x & (\pi, \frac{3}{2}\pi) \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} l\sin x & (0, \frac{\pi}{2}) \\ m\sin x - m + l \; (= m\sin x + n + 1) & (\frac{\pi}{2}, \pi) \\ n\sin x + n + 1 & (\pi, \frac{3}{2}\pi) \end{cases}$$

$\therefore l = m+n+1$ .... ②

$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\,dx$ 의 값이 최대 ⇒ $f(x)>0$ 형태에서 $f(x)$의 넓이가 최대.

(i)  $\begin{pmatrix} l>0, \\ m<0, \\ n>0 \end{pmatrix}$ (ii)  $\begin{pmatrix} l>0, \\ m>0, \\ n>0 \end{pmatrix}$ ⇒ (i), (ii) 의 비교대상이 되는 순서쌍 (l, m, n)이 너무 많음. ⇒ 식 참조.

$$\therefore \int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (m\sin x + n + 1)\,dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (n\sin x + n + 1)\,dx$$

$$= \Big[-l\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[-m\cos x + (n+1)x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \Big[-n\cos x + (n+1)x\Big]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$= (0) - (-l) + (m + (n+1)\pi) - (0 + \frac{(n+1)}{2}\pi) + (0 + \frac{3(n+1)}{2}\pi) - (n + (n+1)\pi)$$

$= l + m - n + (n+1)\pi = 2m + 1 + (n+1)\pi$ (∵ ②) ...... ③

→ $m>0$, $n>0$ ($m<0$ 인 경우보다 $m>0$ 인 경우가 값이 더 크다)

∴ 그래프로 나타내면 (ii) 그래프가 최대가 된다.

①, ② 에서 $l+m+n \le 10$ 이고, $2m+2n+1 \le 10$ 이므로 $n=3$, $m=1$ 일 때 최대가 된다. (∵ $m=1$ or 2 or 3, $n=1$ or 2 or 3 에서 ③을 보면 m의 계수인 2보다 n의 계수인 π가 더 크므로 n이 클수록 적분값은 커진다. 그 때 $l=5$. ∴ $l=5$, $m=1$, $n=3$ //

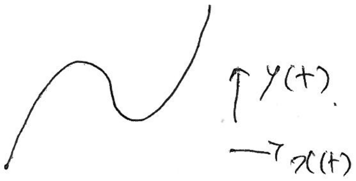
↳ 계산을 통한 증명도 해볼것.

* 2019학년도 평가원 9월 수학 나형 30번.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$,

방정식 $f\circ f(x)=x$ 의 모든 실근 → $0,\ 1,\ a,\ 2,\ b$ $(0<1<a<2<b)$ ⇒ 5개.

$f'(1)<0$, $f'(2)<0$ → 극대, 극소 존재, $f'(0)-f'(1)=6$. ($f(x)$의 개형)



$f\circ f(x)=k$ (단, k는 상수)의 근을 또는 근의 개수를 찾아야 하는

형태가 아니고, $f\circ f(x)=x$ (단, x는 변수)의 근을 찾아야 하는 형태임에 주의한다.

∴ ① $f(\triangle)=x$ 인 $\triangle$를 찾고, ② $f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$ (단, $\alpha\neq\beta$) 인

α, β를 찾아야 한다. ① 에서 3개, ② 에서 2개.

② 에서 4개인 경우는 불가능하다. 근들의 중간값인 a의 경우, (a, a)를 의미한다.

$x=1$ 과 $x=2$ 가 감소하는 구간에 속하므로 (극대점 x값 $<1<2<$ 극소점 x값)

① 에서 찾을 수 있는 근 $\triangle$에 해당되는 값이 $x=0$, $x=a$, $x=b$

② 에서 찾을 수 있는 근 α, β가 $x=1$, $x=2$ 가 된다.

따라서 $f(x)$는 $(0,0)$, $(1,f(1))$, (a,a), $(2,f(2))$, (b,b)

→ $(0,0)$, $(1,2)$, (a,a), $(2,1)$, (b,b)를 만족시킨다.

$f(x)=px^3+qx^2+rx$ 라 하면 (단, $p>0$, $f(0)=0$)

$f'(x)=3px^2+2qx+r$.

(i) $(1,2)$ → $p+q+r=2$

(ii) $(2,1)$ → $8p+4q+2r=1$.

$\Rightarrow 6p+2q=-3$.

(iii) $f'(0)-f'(1)$ ⇒ $-3p-2q=6$. $\Rightarrow 3p+2q=-6$

$\therefore p=1,\ q=-\frac{9}{2}$

$\therefore r=\frac{11}{2}$

그러므로 $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}x$, $f(5) = 125 - \frac{9}{2} \times 25 + \frac{11}{2} \times 5$

$$= 125 + \frac{-225+55}{2} = 125 - \frac{170}{2} = 125 - 85 = 40$$

→ 문제에서 a와 b를 이용한 식의 값을 묻지 않는 이유는 그 값을 구하는 것이 필수적인 경우가 아니기 때문이다.

→ a가 근의 중간값이므로 a부터 1까지의 거리와 a부터 2까지의 거리가 같아야 하는 내용이므로 $a=\frac{3}{2}$ 을 통해서 접근할 수도 있다.

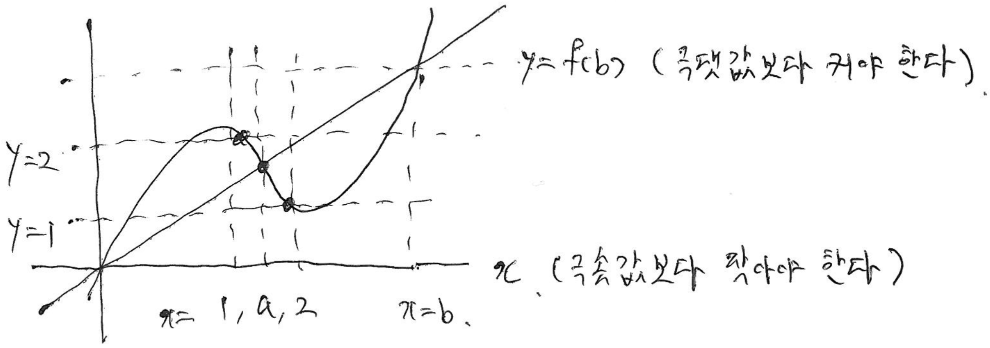
→ $f \circ f(x) = x$는 보통 역함수 풀기와 유사하지만 증가·감소가 모두 존재하는 경우에서는 역함수로 접근할 수 없기 때문에 문제에서도 방정식이라는 표현을 쓴 것이다.

(참고) $f(x)$와 $g(x)$가 역함수다 $\Rightarrow f(g(x)) = x$ (True)

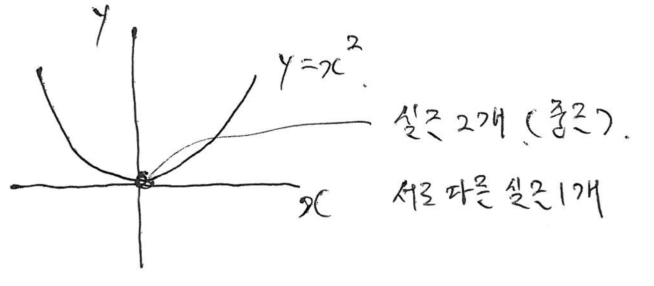
$f(g(x)) = x \Rightarrow f(x)$와 $g(x)$가 역함수다. (False) → 엄밀하게는 [같다고 할 수는 없다] 는 표현이 맞음.

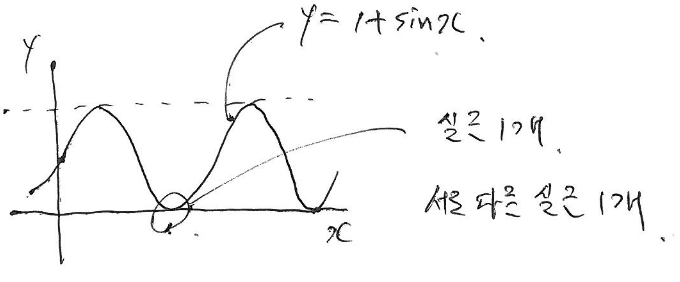
$\Rightarrow f(x)$와 $g(x)$가 $y=x$ 대칭이다. (True).

→ 문제 내용을 그래프에서 정리하면 다음과 같다.



※ 실근의 개수와 서로 다른 실근의 개수를 혼동하면 안 된다.





* 2019학년도 평가원 9월 수학 나형 21번.

$f(x)=x^4+ax^2+b \rightarrow f(x)=f(-x)$: y축 대칭.

$(x\ge 0)$, $g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}\,dt \longrightarrow \begin{cases} g(x)=0 & (f(t)\ge 0) \\ g(x)=\int_{-x}^{2x} 2f(t)\,dt & (f(t)<0) \end{cases}$

(가) $0<x<1$ 에서 $g(x)=C_1$ (상수함수)

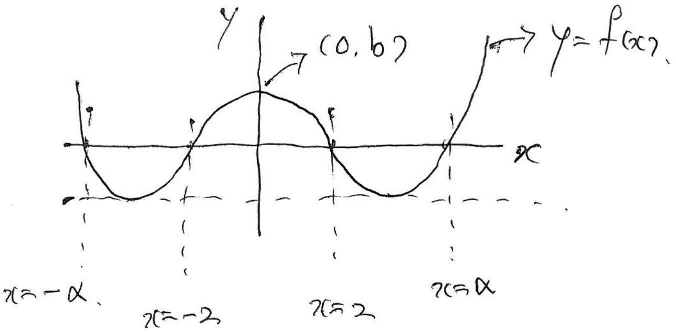
∴ 적분 시작인 0부터 상수함수가 되려면 피적분함수가 0인 상수함수이므로

$[-1,2]$ $f(x)\ge 0$ $\rightarrow$ $[-2,2]$ $f(x)\ge 0$ (∵ y축 대칭)

(나) $1<x<5$, $g(x)$는 감소 $\rightarrow$ $\int_{-1}^{2}$ 구간보다 확장되면 결과값은 음수 (∵ (가))

∴ $f(2)=0$, $\lim_{x\to 2+} f(x)=0(-)$, $\lim_{x\to 2-} f(x)=0(+)$.

$f(x)$의 개형은 다음과 같다.



→ $5\le\alpha\le 10$ → $\alpha=5$ ((다)조건 적용 후)

(∵ $\int_{-5}^{10}$ 계산값이 $\int_{-1}^{2}$ 부터 계속 음수가 나와야 $g(x)$가 감소함수가 된다.

(i) $\alpha=5$일 때 $\int_{-5}^{10}=\int_{-5}^{-2}+\int_{-2}^{2}+\int_{2}^{5}+\int_{5}^{10}=\int_{-5}^{-2}+\int_{2}^{5}$

(ii) $\alpha>5$일 때 $\int_{-\alpha}^{2\alpha}=\int_{-\alpha}^{-2}+\int_{-2}^{2}+\int_{2}^{\alpha}+\int_{\alpha}^{2\alpha}=\int_{-\alpha}^{-2}+\int_{2}^{\alpha}$

(다) $x>5$, $g(x)=C_2$ (상수함수)

→ $x>5$ 에서 기존에 대해서 ($\int_{-5}^{10}$) 그 바깥구간의 적분을 통해 추가되는 부분은 모두 0이라는 의미.

∴ $\alpha=5$. (∵ $\alpha>5$ 이라면 $\int_{-5}^{10}$에 대해서 $\int_{-\alpha}^{-5}$ 부분의 음수가 추가되므로 $g(x)$는 여전히 감소, 상수함수가 아니다).

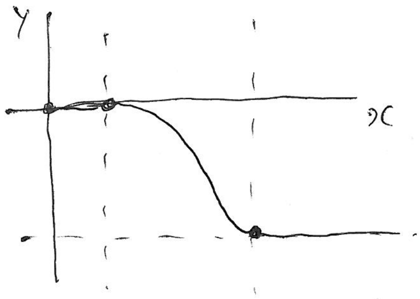
$\therefore\ \alpha=5$. 따라서 $f(x)=(x-2)(x+2)(x-5)(x+5)$

$=(x^2-4)(x^2-25)$

$=x^4-29x^2+100$. $\therefore\ a=-29,\ b=100$.

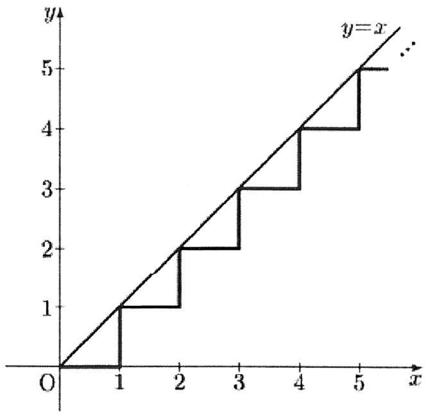
$f(\sqrt{2})=((\sqrt{2})^2-4)((\sqrt{2})^2-25)=(-2)\times(-23)=46$ //

→ $g(x)$의 개형은 다음과 같다.



$y=g(x)$.

* 2019학년도 평가원 9월 수학 나형 29번.



(i) $A_0\ (0, 0)$

(ii) $\overline{A_{n-1}A_n} = \dfrac{2n-1}{25}$.

A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점은 누적 이동거리가 2 or 4 or 6 or 8 …… 과 같이 짝수일 때이다.

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{25}(2k-1) = \frac{1}{25} \times (n(n+1)-n) = \frac{n^2}{25} = 2 \text{ or } 4 \text{ or } 6 \text{ or } 8 \text{ or } \cdots\cdots$ 을 만족시키는

자연수 n의 값들 중 두번째 값을 찾으라는 문제이다.

($\because$ 2일 때 (1, 1), 4일 때 (2, 2), 6일 때 (3, 3), ……)

25자체가 제곱수이므로 짝수들 중 짝수의 제곱수를 찾아야 하고, 그 값들은

$4(=2^2)$, $16(=4^2)$, $36(=6^2)$, ……

$\therefore\ n^2 = 100$ or 400 or 900 or …… $\therefore$ 두번째는 $n=20$일 때이고,

이동거리는 16일 때이므로 x좌표값 a는 8이다.

* 2019학년도 평가원 9월 수학 나형 26번.

등비수열 $\{a_n\}$, $a_n = a \cdot r^{n-1} > 0$.

$S_4 - S_3 = 2 = a_4$, $S_6 - S_5 = 50 = a_6$. $\therefore a_5^2 = a_4 \times a_6 = 100$. $\therefore a_5 = 10$ $(\because a_n > 0)$

(등비중항)

$\longrightarrow$

$a_4 = ar^3 = 2$, $a_6 = ar^5 = 50$. $\therefore r^2 = 25$. $r = 5$ $(\because a_n > 0)$

$\therefore ar^3 = 125a = 2$ 에서 $a = \frac{2}{125}$, $a_n = \frac{2}{125} \times 5^{n-1}$. $\therefore a_5 = \frac{2}{5^3} \times 5^4 = 10$.

* 2019학년도 평가원 9월 수학 나형 13번.

등차수열 $\{a_n\}$. $a_1 = -15$, $|a_3| - a_4 = 0$.

$\therefore a_4 > 0$, $a_3 < 0$. $(\because a_4 = 0$ 이면 $a_3 = 0$ 이 되고 $a_1 = 0$ 이어야 한다$)$

$\left.\begin{aligned} a_3 &= -15 + 2d \\ a_4 &= -15 + 3d \end{aligned}\right\}$ $a_4 = -a_3$ 에서 $-15 + 3d = 15 - 2d$ 이고 $5d = 30$. $\therefore d = 6$.

$\therefore a_n = 6n - 21$. $a_7 = 42 - 21 = 21$ //

* 2019학년도 평가원 9월 수학 가형 20번.

정의역 $(0, 2\pi)$, $f(x) = \cos x + 2x\sin x$. $\rightarrow x=\alpha$, $x=\beta$ 에서 극값.

실수 전체 정의역이라면

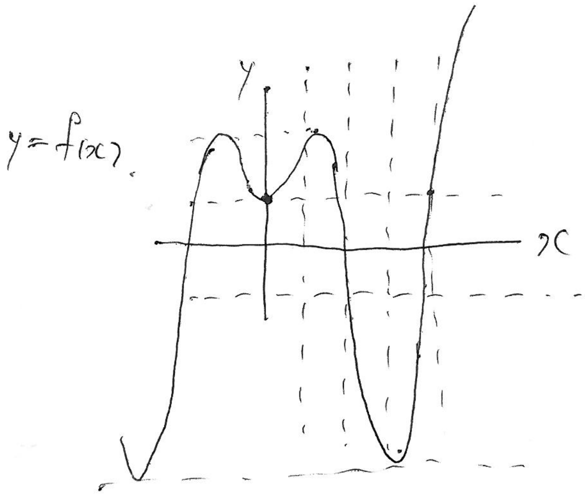
1) $x \in R$.

2) $\lim_{x\to\infty} f(x) =$ 발산 (진동)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$ 발산 (진동).

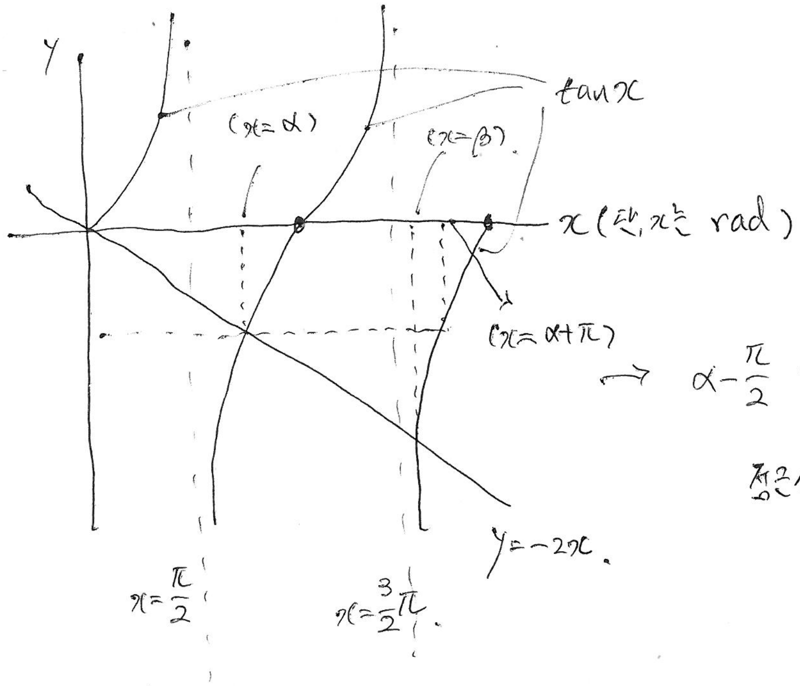
3) $f(x) = f(-x)$.

$\cdots (0, 1), (\frac{\pi}{2}, \pi), (\pi, -1), (\frac{3}{2}\pi, -3\pi), (2\pi, 1), (\frac{5}{2}\pi, 5\pi), \cdots$



$f'(x) = -\sin x + 2\sin x + 2x\cos x = \sin x + 2x\cos x$

$f'(x) = 0$ 은 $2x = -\tan x$ 또는 $-2x = \tan x$ 인 x 에서.



$\rightarrow$ $\alpha - \frac{\pi}{2} > \beta - \frac{3}{2}\pi$ ($y=-2x$와 $y=\tan x$와의 교점과

점근선과의 거리는 x수할수록 작아진다)

ㄱ. $\tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha = -2\alpha$ (True).

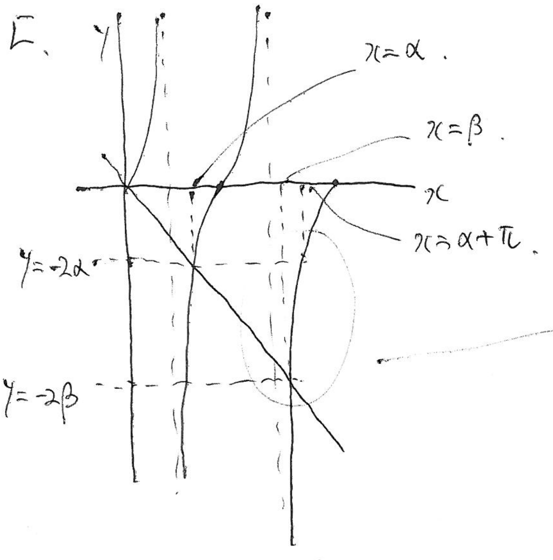
ㄴ. $g(x) = \tan x$ 라 할 때, $g'(x)$는 $\tan x$ 함수의 접선의 기울기.

$g'(\alpha+\pi) = g'(\alpha)$, 구간 $(\frac{3}{2}\pi, \pi)$ 에서 tan 함수는 위로 볼록이므로

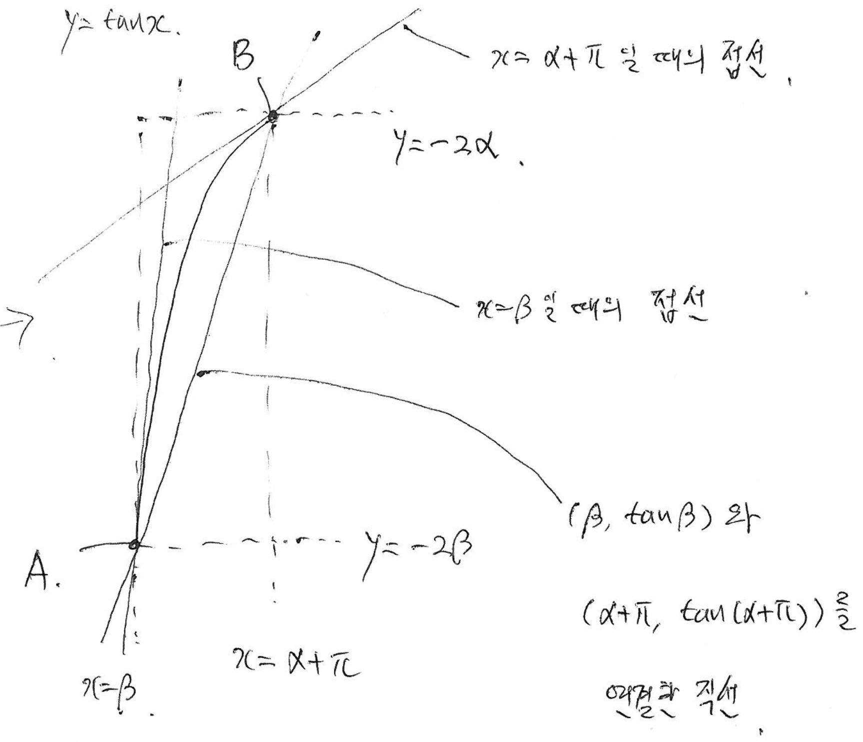
x값이 커질수록 접선의 기울기는 작아진다.

$\therefore$ $\beta < \alpha + \pi$ $\Rightarrow$ $g'(\beta) > g'(\alpha+\pi)$. (True).

ㄷ.



$y = \tan x, \; y = -2x.$



$(\beta, \tan\beta) = (\beta, -2\beta), \quad (\alpha+\pi, \tan(\alpha+\pi)) = (\alpha+\pi, -2\alpha)$

∴ $x = \beta$ 일 때의 접선의 기울기 > 직선 AB의 기울기 > $x = \alpha+\pi$ 일 때의 접선의 기울기

(점 A에서의 접선의 기울기) $\qquad$ (점 B에서의 접선의 기울기)

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$$\left.\frac{d\tan x}{dx}\right|_{x=\beta} \qquad \frac{-2\alpha-(-2\beta)}{(\alpha+\pi)-\beta} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \left.\frac{d\tan x}{dx}\right|_{x=\alpha+\pi=\alpha}.$$

$$\sec^2\beta > \frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta} > \sec^2\alpha.$$

(False).

* 2019 학년도 평가원 9월 수학 나형 20번.

상자 A에 공 6개, 상자 B에 공 6개.

동전 < 앞면 : A에서 1개 → B로
뒷면 : B에서 1개 → A로

→ 6번 시행 후 B에 들어 있는 공의 개수가 처음으로 8이 될 확률.

→ 5번 시행 후 B에는 7개, 4번 시행 후 B에 6개가 있어야 가능.

(∵ 시행이 일어나면 A의 공의 개수와 B의 공의 개수는 반드시 변한다)

(A, B) = (6, 6)
- (7, 5)
  - (8, 4)
    - (9, 3) → X
    - (7, 5)
      - (8, 4) → X
      - (6, 6) → O
  - (6, 6)
- (5, 7)
  - (6, 6)
    - (7, 5)
      - (8, 4) → X
      - (6, 6) → O (*)
    - (5, 7)
      - (6, 6) → O (*)
      - (4, 8) → X
  - (4, 8) → X

(*) 붙은 경우, 16개 중의 하나가 아니고 2개에 해당 (∵ 2번의 시행 후 합친 경우)

∴ 4번의 시행 후 B에 6개가 들어 있을 확률은 $\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{2}{16}=\frac{5}{16}$.

5번째 시행과 6번째 시행 모두 앞면이 나와야 하므로 $\frac{1}{4}$.

∴ $\frac{5}{16}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{64}$ //

* 2019학년도 평가원 9월 수학 나형 16번.

서로 다른 종류의 사탕 3개
서로 같은 종류의 구슬 4개

→ 서로 같은 종류의 주머니 3개

남김 없이.

1) 사탕은 3개뿐이므로 주머니마다 1개씩 넣은 방법뿐이고 추가적인 경우의 수가 발생되지 않는다.

2) 구슬 4개는 서로 같은 종류이므로 주머니마다 1개씩 먼저 넣어도

역시 추가적인 경우의 수가 발생되지 않는다.

→ 주의: 1) 과정을 거친 후에는 주머니들이 서로 다른 종류가 된 것으로 봐야 한다.

→ 구슬이 서로 다른 종류인 경우, 먼저 3개를 주머니마다 1개씩 넣은 것은

추가적인 경우의 수가 발생되는 형태 (결과를 보고 판단해야 하는 내용인데

과정을 보고 판단하는 등의 오류 발생, 조합인데 순열로 계산하는 등의 오류 발생)

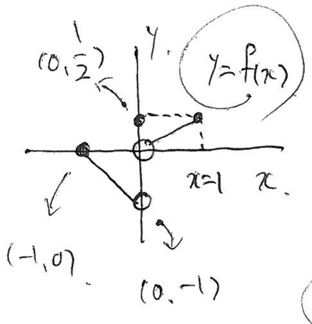
이므로 그렇게 계산하면 안 된다. 그럴 때는 케이스를 나누고 따로 계산한다.

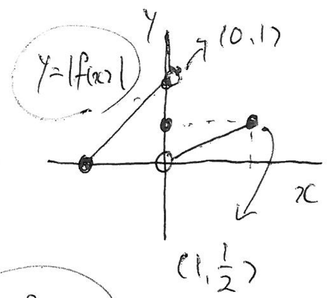
3) 서로 같은 종류의 구슬 4개를 서로 다른 종류의 주머니 3개에 남김 없이 넣는

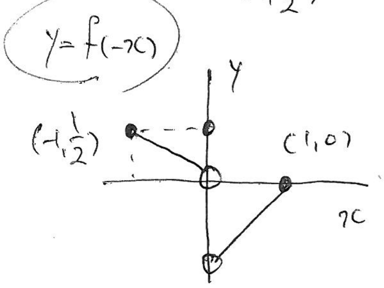
경우의 수를 구하는 문제로 최종 정리된다.

$\therefore {}_3H_4 = {}_6C_2 = 15$

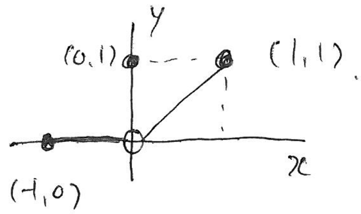
* 2019학년도 평가원 9월 수학 나형 18번.



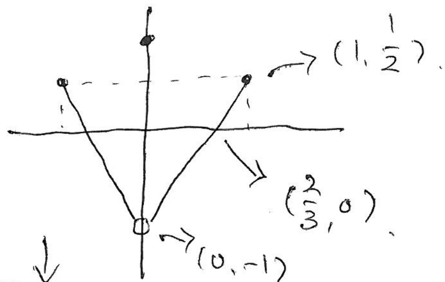




$y = g(x) = f(x) + |f(x)|$



$y = h(x) = f(x) + f(-x)$

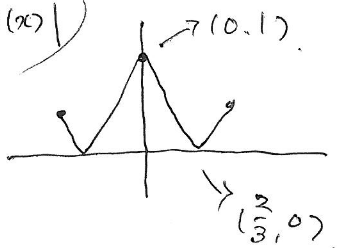


ㄱ. $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ (True).

ㄴ. $|h(x)|$는 $x=0$에서 연속

(True)

$y = |h(x)|$



ㄷ. $g(x) \times |h(x)|$는 $x=0$에서 연속.

(False)

($\because$ $g(x) \times |h(x)| = i(x)$라 하면

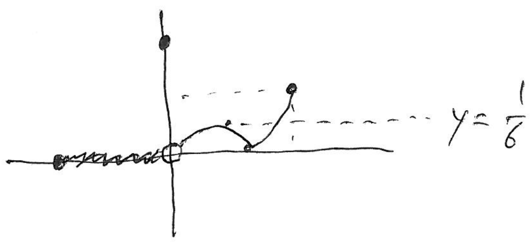
$y = g(x) \times |h(x)|$

$i(0) = g(0) \times |h(0)| = 1$

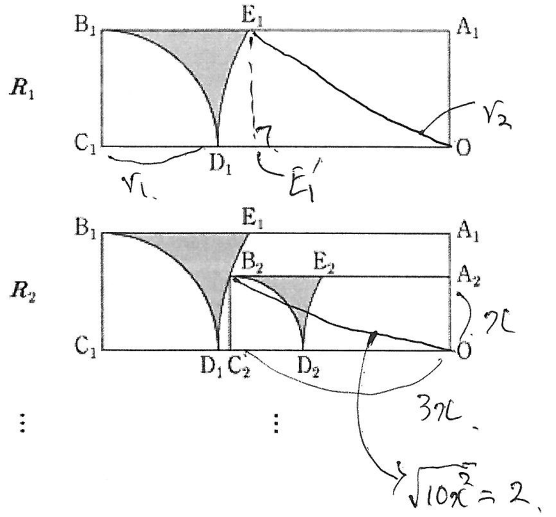
$i(0-) = g(0-) \times |h(0-)| = 0$

$i(0+) = g(0+) \times |h(0+)| = 0$.

불일치.



* 2019학년도 평가원 9월 수학 나형 19번.



$\overline{B_1A_1} = 3$, $\overline{B_1C_1} = 1 = \overline{C_1D_1} = r_1$.

$\overline{D_1O} = \overline{E_1O} = r_2 = 2$.

점 E_1에서 선분 C_1O에 내린 수선의 발을 E_1'이라 하면

$\overline{OE_1} = \overline{E_1O} = 2$, $\overline{E_1E_1'} = 1$. $\therefore \angle E_1OE_1' = \frac{\pi}{6} = 30°$.

$\therefore \overline{E_1A_1} = \sqrt{3}$.

1) $n: 1 \to 1$. $\therefore n = 1$.

2) lr : $\overline{A_2O} = x$라 하면 $lr: 1 \to x$.

$\overline{C_2O} = 3x$, $\overline{B_2O} = \sqrt{10} \cdot x = 2$. $\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

$\therefore lr = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. $Sr = \frac{2}{5}$.

3) a:

3×1, $\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{4}$, $\pi \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{12}$, $\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1$

$$\therefore a = 3 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{12}.$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{12}}{1 - \frac{2}{5} \times 1} = \frac{3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{12}}{\frac{3}{5}} = 5 - \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{35}{36}\pi \;//$$

* 2019학년도 평가원 9월 수학 나형 27번.

$X \sim B(n, \frac{1}{2}) \rightarrow E(X) = \frac{n}{2}, \quad V(X) = \frac{n}{4}$

$V(\frac{1}{2}X+1) = \frac{1}{4}V(X) = \frac{n}{16} = 5. \qquad \therefore \ n = 80$ //

* 2019학년도 평가원 9월 수학 나형 17번.

100명 임의추출 전수조사 (전수조사의 목적은 추출이 아니다)

1년 이내 헌혈한 학생의 비율 $= \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$.

$\therefore \ X$ (=1년 이내 헌혈한 학생의 비율) $\sim N(\frac{3}{10}, \frac{21}{100})$

↳ 추출 size=100. $X_1 \sim N(\frac{3}{10}, (\frac{\sqrt{21}}{100})^2)$

95% ($|z|=1.96$) 신뢰구간 : $\frac{3}{10} - 1.96 \times \frac{\sqrt{21}}{100} \le p \le \frac{3}{10} + 1.96 \times \frac{\sqrt{21}}{100}$.

$\therefore \ \sqrt{a} = \frac{\sqrt{21}}{100} = \sqrt{\frac{21}{10000}}. \qquad \therefore \ a = 0.0021$ //

* 2019학년도 평가원 9월 수학 가형 18번.

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f : X \to X$, 치역 A.

$n(A) = 4$ 이고 집합 A의 모든 원소의 합이 홀수.

$\therefore$ A의 형태는 $\{1, 2, 3, 5\}$ or $\{1, 3, 4, 5\}$ 2가지. ($\because$ 그 외의 경우 총 합이 짝수)

→ 정의역의 원소 5개를 4개의 묶음으로 나누고 치역과 일대일 함수로 연결하면 된다.

$\therefore$ ${}_5C_2 \times 4! \times 2 = 10 \times 24 \times 2 = 480$

→ 정의역의 원소 5개를 4개의 묶음으로 나눌 때, 나눈 뒤에 배열할 필요 없이 나누기만 하면 되는 계산이므로 (나눈 뒤에 배열은 일대일 함수 계산에 포함) 분할을 쓸 수도 있고, 위에 처럼 2개 한 묶음인 경우만 추리면 나머지는 자동이니까 ${}_5C_2$로 계산 종료할 수도 있다.

→ 주의: 5개 중에 4개를 골라 일대일 함수로 연결하고, 남는 하나를 아무곳으로 연결하는 형태는 정의역과 치역을 연결할 때 순서 (불필요한 순서)가 포함되는 경우이므로 조심해야 한다.

$\therefore$ (가) $= {}_5C_2 = 10$, (나) $= 4! = 24$, (다) $= 480$.

* 2019학년도 평가원 9월 수학 가형 15번.

동전 A $\begin{cases} \text{앞면}=1. \\ \text{뒷면}=2, \end{cases}$ 동전 B $\begin{cases} \text{앞면 } 3. \\ \text{뒷면 } 4. \end{cases}$ $\Big\}$ A 3번, B 4번 총 7번 던진다. ⇒ All = 128.

합이 19 또는 20 일 확률.

A(△, △, △). B(□, □, □, □) 라 하면

(i) 합이 19 인 경우들.

$$\left.\begin{array}{llll} (1,1,1) & (4,4,4,4) & \rightarrow 1\times1 & =1 \\ (2,1,1) & (4,4,4,3) & \rightarrow 3\times4 & =12 \\ (2,2,1) & (4,4,3,3) & \rightarrow 3\times6 & =18 \\ (2,2,2) & (4,3,3,3) & \rightarrow 1\times4 & =4 \end{array}\right\} 35.$$

(ii) 합이 20인 경우들

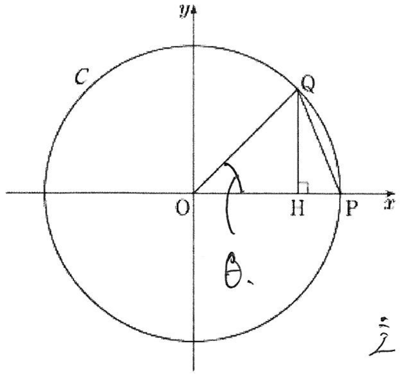
$$\left.\begin{array}{llll} (2,1,1) & (4,4,4,4) & \rightarrow 3\times1 & =3 \\ (2,2,1) & (4,4,4,3) & \rightarrow 3\times4 & =12 \\ (2,2,2) & (4,4,3,3) & \rightarrow 1\times6 & =6 \end{array}\right\} 21.$$

$$\therefore \frac{35+21}{128} = \frac{56}{128} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16} //$$

→ 다 세는 것, 너무 무식한 거 아냐? 라는 생각이 들 때, 맨 땅에 헤딩하겠다는

무모한 용기를 발휘하면 의외로 틀에 맞춰서 착착 계산되는 경우가 많다.

* 2019학년도 평가원 9월 수학 가형 19번.



자연수 n, 점 $P(2^n, 0)$

$\therefore \overline{OQ} = \overline{OP} = r = 2^n$

호 PQ의 길이가 π, $\angle QOP = \theta$라 하면

호 PQ의 길이 $= \pi = r\theta$ 에서 $\theta = \dfrac{\pi}{2^n}$.

$\therefore$ 점 $Q\left(2^n \times \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right),\ 2^n \times \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$, 점 $H\left(2^n \times \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right), 0\right)$

$\overline{HP} = \overline{OP} - \overline{OH} = 2^n - 2^n \times \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} (\overline{OQ} \times \overline{HP}) = \lim_{n\to\infty} 2^n \times 2^n \times \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} \times \sin^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^{2n}}}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \times \cancel{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi^2}{2^{2n}}}} \times \frac{\pi^2}{\cancel{2^{2n}}} = \frac{\pi^2}{2} \text{ //}$$

* 2019학년도 평가원 9월 수학 가형 26번.

미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)=\sin x$, $g\circ f(x)=h(x)$라 하면

$(1, h(1))$에서의 접선은 $y=h'(1)(x-1)+h(1)$, → 원점을 지나므로 $h'(1)=h(1)$.

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-\frac{\pi}{6}}{x-1}=k$. $\therefore f(1)=\dfrac{\pi}{6}$, $f'(1)=k$. $h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$.

$\therefore h'(1)=g'(f(1))\cdot f'(1)=g'(\frac{\pi}{6})\cdot f'(1)=\cos\frac{\pi}{6}\times f'(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times k=g\circ f(1)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

$\therefore k=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 따라서 $30k^2=10$ //

* 2019학년도 평가원 9월 수학 가형 14번.

$f(x)=\cos^2(x-\frac{3}{4}\pi)-\cos(x-\frac{\pi}{4})+k$

$f(x-\frac{\pi}{4})=\cos^2(x-\pi)-\cos(x-\frac{\pi}{2})+k=\cos^2x-\sin x+k=-\sin^2x-\sin x+1+k$

$=-(\sin^2x+\sin x+\frac{1}{4})+\frac{5}{4}+k=-(\sin x+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}+k$.

$\therefore$ $\sin x=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{5}{4}+k=3$. $\therefore k=\frac{7}{4}$.

$\sin x=1$일 때 최솟값 $-\frac{9}{4}+\frac{5}{4}+k=k-1=\frac{3}{4}=m$.

$\therefore k+m=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$ //

→ 함수를 x축에 대하여 평행이동을 해도, 최댓값과 최솟값은 변하지 않으므로

식을 보고 계산이 편리하도록 평행이동을 할 수 있어야 함.

→ $\sin x=t$ $(-1\le t\le 1)$로 치환한 형태인 $-(t+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}+k$에서 구하는 최대, 최소와

치환없이 구하는 최대, 최소는 왜 같은것인가?

* 2019학년도 평가원 9월 수학 가형 28번.

All: 방정식 $a+b+c=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)

$\Rightarrow {}_3H_9 = {}_{11}C_2 = 55$.

Target: $a<2$ or $b<2$ $\Longleftrightarrow$ $a=0$ or $a=1$ or $b=0$ or $b=1$.

(i) $a=0$ / ${}_2H_9$ (v) $a=0, b=0$ / 1

(ii) $a=1$ / ${}_2H_8$ (vi) $a=0, b=1$ / 1

(iii) $b=0$ / ${}_2H_9$. (vii) $a=1, b=0$ / 1

(iv) $b=1$ / ${}_2H_8$. (viii) $a=1, b=1$ / 1

$\therefore$ Target: $2\times{}_2H_9 + 2\times{}_2H_8 - 4$

$= 20+18-4 = 34$.

$\therefore \dfrac{q}{p} = \dfrac{34}{55}$ //

* 2019학년도 평가원 9월 수학 가형 17번.

이용시간 $\sim N(m, 5^2)$

X_1 (size=25) $\sim N(\overline{x_1}, 1^2)$

95% 신뢰구간: $\overline{x_1} - 1.96 \le m \le \overline{x_1} + 1.96$

$\therefore \overline{x_1} = 80, \ a = 1.96$.

X_2 (size=n) $\sim N(\overline{x_2}, (\frac{5}{\sqrt{n}})^2)$

95% 신뢰구간: $\overline{x_2} - 1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x_2} + 1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

$\therefore \overline{x_2} = \frac{15}{16}\times\overline{x_1} = 75, \ 1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}} = \frac{5}{7}\times a. \ \sqrt{n} = 7$.

$\therefore n = 49, \ \overline{x_2} = 75$. 따라서 $49+75 = 124$ //

* 2019학년도 평가원 9월 수학 나형 28번.

두 점 P, Q → $t=0$일 때, 동시에 원점 출발.

$V_1(t) = V_P(t) = 3t^2+t$, $V_2(t) = V_Q(t) = 2t^2+3t$.

$\therefore\ x_1(t) = x_P(t) = t^3 + \frac{t^2}{2}$, $x_2(t) = x_Q(t) = \frac{2t^3}{3} + \frac{3t^2}{2}$ (원점출발 ⇒ 적분상수 0)

두 점 P, Q의 속도가 같아진다 ⇔ $V_P(t) = V_Q(t)$ $\therefore\ t^2-2t=0$.

$\therefore\ t=2$ ($\because$ 출발한 후 속도가 같아진다) → $t \neq 0$.

$x_P(2) = 10$, $x_Q(2) = \frac{16}{3}+6 = 11+\frac{1}{3}$.

두 점 P, Q 사이의 거리 $= |x_P(2) - x_Q(2)| = |-1-\frac{1}{3}| = \frac{4}{3} = a$. $\therefore\ 9a = 12$ //

* 2019학년도 평가원 9월 수학 나형 14번.

점P의 시각 t에서의 위치 $x_P(t) = t^3-5t^2+at+5$ → $V_P(t) = 3t^2-10t+a$

점P의 움직이는 방향이 바뀌지 않는다 ⇔ 점P의 속도의 부호가 바뀌지 않는다.

$V_P(t)$는 최고차항 계수가 양수인 t에 대한 2차 방정식으로 표현가능하므로

$V_P(t) \geq 0$, $\therefore\ D = 100-12a \leq 0$.

$\therefore\ a \geq \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$. 자연수 a의 최솟값은 9 //

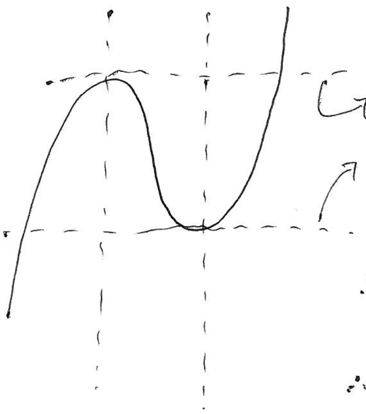
* 2019학년도 평가원 9월 수학 나형 15번

방정식 $x^3-3x^2-9x-k=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3

$\Leftrightarrow$ 함수 $f_1(x)=x^3-3x^2-9x$ 와 함수 $f_2(x)=k$ (상수함수) 와의 서로 다른 교점의 개수가 3.

$f_1(x)=x^3-3x^2-9x$ ((0,0) 만족)

$f_1'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$



$x=-1$ $x=3$

$f_1(-1)=-1-3+9=5$.

$f_1(3)=27-27-27=-27$

∴ $-27<k<5$ 일 때 $f_1(x)$ 와 $f_2(x)$ 와의 서로 다른 교점의 개수 3.

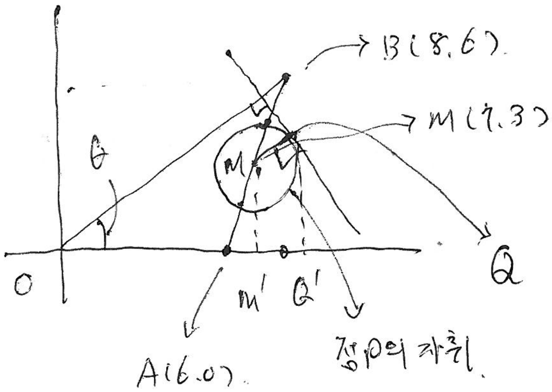
∴ 정수 k의 최댓값은 4이다.

(주의, $k=-27$ or $k=5$인 경우는 서로 다른 교점의 개수는 2이다).

* 2019학년도 평가원 9월 수학 가형 16번.

A(6, 0), B(8, 6). $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$

$\therefore \dfrac{|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$, $\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면 점 P는 점 M을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{10}}{2}$인 원 위의 점이 된다.



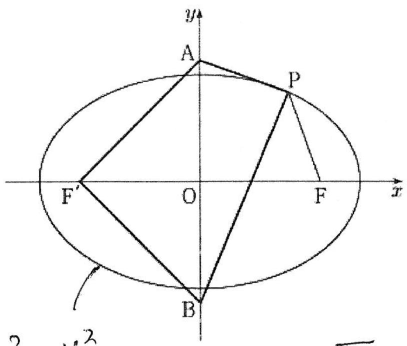
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값은 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}$일 때 최대이므로 점Q는 그림에서와 같은 위치가 된다.

$\overline{MQ} \parallel \overline{OB}$.

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}=\overline{OA}\times\overline{M'Q'}$

$=6\times\overline{MQ}\times\cos\theta=6\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{8}{10}=\frac{12\sqrt{10}}{5}$ //

* 2019학년도 평가원 9월 수학 가형 27번



$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

$A(0,3)$, $B(0,-3)$, $F(3,0)$, $F'(-3,0)$

$\therefore \overline{AF'} = \overline{F'B} = 3\sqrt{2}$.

$\overline{AP} = \overline{PF}$ 이고, $\overline{OA} = \overline{OF}$ 이므로 점 P는 $y=x$ 위에 있다.

$\therefore \overline{PB} = \overline{PF'}$ ($\triangle PBF'$는 이등변, P에서 선분 $F'B$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PH}$는 원점 O를 지나고, $y=x$가 된다).

따라서 □$AF'BP$의 둘레의 길이는 $\overline{AF'}+\overline{F'B}+\overline{BP}+\overline{PA}$

$= \overline{AF'}+\overline{F'B}+\overline{PF'}+\overline{PF}$ ($\because \overline{BP}=\overline{PF'}$, $\overline{PA}=\overline{PF}$)

$= 3\sqrt{2}+3\sqrt{2}+8 = 8+6\sqrt{2}$. $\therefore a+b=8+6=14$