* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 30번.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$,

$(t, f(t))$ 에서의 접선 : $y = f'(t)(x-t)+f(t)$

$\therefore g(t) = -tf'(t)+f(t)$ ..... ①

$(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\} = 2t \longrightarrow g(t+1)-g(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ ..... ②

$\int_0^1 f(x)dx = -\dfrac{\ln 10}{4}$, $f(1) = 4+\dfrac{\ln 17}{8}$,

원점대칭 $\therefore \int_{-4}^{4} = 0$.

$2\{f(4)+f(-4)\} - \int_{-4}^{4} f(x)dx = ?$ → 정리부터 시작.

① 에서 $f(t) = g(t)+tf'(t)$.

$\therefore \int_{-4}^{4} f(x)dx = \int_{-4}^{4} g(t)dt + \int_{-4}^{4} tf'(t)dt = \int_{-4}^{4} g(t)dt + [tf(t)]_{-4}^{4} - \int_{-4}^{4} f(t)dt$.

$\therefore \int_{-4}^{4} f(x)dx = \frac{1}{2}\times\int_{-4}^{4} g(t)dt + \frac{1}{2}\{4f(4)+4f(-4)\}$.

따라서 묻는 내용이 $2\{f(4)+f(-4)\} - \int_{-4}^{4} f(x)dx = -\frac{1}{2}\int_{-4}^{4} g(t)dt$ 로 표현된다.

② 에서 정적분을 분할 (대칭성 활용) 해 보면 $g(x)$ 함수에서

$\int_{-4}^{4} g(x+1)dx = \int_{-3}^{5} g(x)dx = \int_{-4}^{4} g(x)dx$.

$\Rightarrow \int_{4}^{5} = \int_{-4}^{-3}$, $\int_{3}^{4} = \int_{-3}^{-2}$, $\int_{2}^{3} = \int_{-2}^{-1}$, $\int_{1}^{2} = \int_{-1}^{0}$. $\Rightarrow \int_0^1$ 은 대칭활용 불가.

$\therefore$ ② 에서 $\int_0^1 g(x+1)dx - \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}dt = \ln|1+t^2|\Big]_0^1 = \ln 2$.

$\therefore \int_0^1 g(x+1)dx = \int_1^2 g(x)dx = \int_0^1 g(x)dx + \ln 2$.

적분구간을 $\int_0^1$ 에서 $\int_0^2$ 로 바꾸면 공통부분을 없애고

$\int_2^3 g(x)dx = \int_0^1 g(x)dx + \ln 5$

$\therefore \int_0^1 g(x)dx = T$ 라 하고 차례로 정리

$$\int_1^2 = T+\ln 2$$
$$\int_2^3 = T+\ln 5$$
$$\int_3^4 = T+\ln 10$$
$$\int_4^5 = T+\ln 17$$

$$\therefore \int_{-4}^{4} g(x)\,dx = \int_{-4}^{-3} + 2\times\int_3^4 + 2\times\int_2^3 + 2\times\int_1^2 + \int_0^1 \quad \left(\int_{-4}^{-3} = \int_4^5\right)$$

$$= T+\ln 17+2T+2\ln 10+2T+2\ln 5+2T+2\ln 2+T$$

$$= 8T+\ln 17+2\ln 100 = 8T+\ln 17+4\ln 10$$

$$\therefore -\frac{1}{2}\int_{-4}^{4} g(x)\,dx = -4T-\frac{\ln 17}{2}-2\ln 10$$

$$T=\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \{-xf'(x)+f(x)\}\,dx = -\int_0^1 xf'(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= -\left\{[xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx\right\} + \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= -f(1)+2\int_0^1 f(x)\,dx = -4-\frac{\ln 17}{8}-\frac{\ln 10}{2}$$

$$\therefore (-4T)-\frac{\ln 17}{2}-2\ln 10$$

$$= 16+\frac{\ln 17}{2}+2\ln 10-\frac{\ln 17}{2}-2\ln 10 = 16 //$$

* 해설처럼 $g(t+1)-g(t)=\frac{2t}{1+t^2}$ 에서 (항등식) 정리된 부분이 원점대칭인 것을 이용해서 정적분 분할로 들어가도 되고, $\int_t^{t+1} g'(x)\,dx = \frac{2t}{1+t^2}$ (정리된 부분이 로그함수 미분한 형태) 에서 정적분 분할로 들어갈 수도 있다.

* 2019학년도 평가원 6월 수학 나형 30번.

사차함수 $f(x)$ (실근의 개수는 최대 4), $n=1, 2, 3, 4, 5$.

$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n) \times f(n+1)$ / $n=3, 4$일 때

$\frac{f(5)-f(3)}{5-3} \leq 0 \rightarrow f(5) \leq f(3)$.

$\frac{f(6)-f(4)}{6-4} \leq 0 \rightarrow f(6) \leq f(4)$.

→ l1부터가 아니고 l5부터 생각하라는 힌트로 주어졌을 수도 있다.

$l1 : f(1) = f(1) \times f(2)$

$l2 : f(1)+f(2) = f(2) \times f(3)$

$l3 : f(1)+f(2)+f(3) = f(3) \times f(4)$

$l4 : f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = f(4) \times f(5)$

$l5 : f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5) = f(5) \times f(6)$

$l5 - l4 = f(5) = f(5)(f(6)-f(4))$

$\rightarrow f(5)=0$. ($f(5) \neq 0$, $f(6)-f(4)=1$ → 조건에 위배).

$l4 - l3 = f(4) = f(4)(f(5)-f(3))$

$\rightarrow f(4)=0$. $\Rightarrow f(1)+f(2)+f(3)=0$.

$l3 : f(1)+f(2)+f(3) = f(2) \times f(3) + f(3) = f(3) \times (f(2)+1) = f(3) \times f(4) = 0$.

$\therefore f(3)=0$ / $f(2)=-1$, $f(3) \neq 0$.

$\downarrow$

$f(1)+f(2)=0$.

→ l1에서 $f(1)=-1$, $f(2)=1$

($f(1)=f(2)=0$ 이면 실근 5개 → $\times$).

$\Downarrow$

(case 1).

$\searrow$

$f(1)-1 = -f(3)$.

$l2 - l1 = f(2) = -1 = f(2) \times (f(3)-f(1))$

$= -f(3)+f(1)$.

$f(1)+f(3)=1$

$f(1)-f(3)=-1$

$\therefore f(3)=1$

$f(1)=0$

$f(2)=-1$.

$\Downarrow$

(case 2).

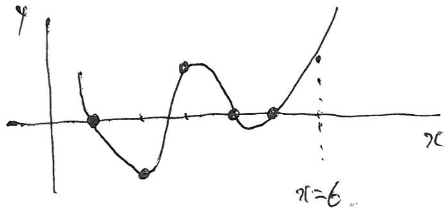
* case 1) $f(1)=-1$, $f(2)=1$.

$f(3)=f(4)=f(5)=0$

* case 2) $f(1)=0$, $f(2)=-1$, $f(3)=1$

$f(4)=f(5)=0$.

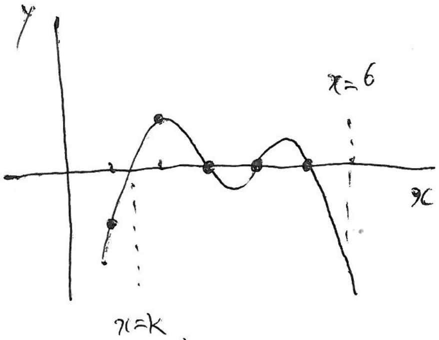
→ case 2 의 경우 $f(6)>0$ 형태이고, $f(6)>f(4)$ 이므로 조건에 위배



(+α) 최고차항 계수가 음수로 가정하고 그래프를 그리면

실근 5개가 나오므로 불가능이다.

∴ case 1 의 경우 ($f(1)=-1$, $f(2)=1$, $f(3)=f(4)=f(5)=0$)



→ 조건 충족. ∴ 실근을 k, 3, 4, 5 $(1<k<2)$ 라 하면

$f(x)=a(x-k)(x-3)(x-4)(x-5)$ (단, $a\neq0$)

$f(1)=-1$, $f(2)=1$ 이므로

① $-24a(1-k) = -24a+24ak = -1$

② $-6a(2-k) = \underbrace{-12a+6ak = 1}$

$-48a+24ak=4$

$24a=-5$ 에서

$a=-\frac{5}{24}$

∴ $5-5k=-1$ 에서 $k=\frac{6}{5}$ ($1<k<2$ 만족)

$f(x)=-\frac{5}{24}\left(x-\frac{6}{5}\right)(x-3)(x-4)(x-5)$, $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{\cancel{5}}{\cancel{24}_{8}}\times\frac{13}{\cancel{10}_{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{65}{128}$.

∴ $128\times f\left(\frac{5}{2}\right)=65$ //

* a, b가 상수일 때 $a=a\times b$ 라 하면

$a\neq0$ 일 때에 한해서 $\frac{a}{a}=\frac{a\times b}{a}$ 가 성립한다.

* $\begin{cases} y=x+2 \\ y=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2} \end{cases}$ 이 두 그래프는 같은 그래프가 아니다.

분수꼴에서 분모가 0이면 분자가 0이든 아니든 정의가 되지 않으므로 약분이든 뭐든 생각할 필요가 없고, 예따 계산도 불가.

* $\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)$ ⇒ $\lim_{x\to2}$ 의 의미는 x가 2에 다가가는 것임. $(x\neq2)$

* 2019 학년도 평가원 6월 수학 나형 30번.

사차함수 $f(x)$ (실근의 개수는 최대 4), $n=1, 2, 3, 4, 5$

(가) $\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n) \times f(n+1)$　　　(나) $\frac{f(5)-f(3)}{5-3} \le 0$, $\frac{f(6)-f(4)}{6-4} \le 0$.

l1 : $f(1) = f(1) \times f(2)$

l2 : $f(1)+f(2) = f(2) \times f(3)$

l3 : $f(1)+f(2)+f(3) = f(3) \times f(4)$

l4 : $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = f(4) \times f(5)$

l5 : $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5) = f(5) \times f(6)$

l1 ⇒ $f(1) = 0$ / $f(1) \neq 0,\ f(2) = 1$.

↳ l1−1

l2 ⇒ $f(1)=f(2)=0$ / $f(1)=0,\ f(2)\neq 0,\ f(3)=1$.

↳ l2−1

l3 ⇒ $f(1)=f(2)=f(3)=0$ / $f(1)=f(2)=0,\ f(3)\neq 0,\ f(4)=1$.

↳ l3−1

l4 ⇒ $f(1)=\cdots=f(4)=0$ / $f(1)=f(2)=f(3)=0,\ f(4)\neq 0,\ f(5)=1$.

↳ * l4−1

l5 ⇒ $f(1)=\cdots=f(4)=0,\ f(5)\neq 0,\ f(6)=1$.

($f(6)>f(4)$ → X). (+α) $f(5)\neq 0$, 사차함수의 실근의 개수의 최댓값은 4이다.

* l4−1) l5를 거치면 $f(4)+1 = f(6)$ → $f(6) > f(4)$ → (X).

* l3−1) l4를 거치면 $f(3)+1 = f(5)$ → $f(5) > f(3)$ → (X).

* l2−1) l3을 거치면 $f(2)+1 = f(4)$, $f(1)=0,\ f(2)\neq 0,\ f(3)=1$.

l4에서 $2f(4) = f(4) \times f(5)$　　($\because f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 2f(4)$)

$f(4)=0$ / $f(4)\neq 0,\ f(5)=2.$

$(f(1)=0,\ f(3)=1,\ f(2)=-1,\ f(4)=0)$ $(f(1)=0,\ f(3)=1,\ f(2)\neq 0,\ f(4)\neq 0,\ f(5)=2)$

$f(5)>f(3) \rightarrow \times.$

↓

$f(5)=0$

↓

가능성 존재 ⚠1.

$f(5)\neq 0,\ f(6)=1. \Rightarrow f(6)>f(4) \rightarrow \times$

* ℓ1-1) $f(1)\neq 0,\ f(2)=1.$

ℓ2를 거치면 $f(1)+1=f(3).$

ℓ3을 거치면 $f(1)+f(2)+f(3)=2f(3)=f(3)\times f(4)$

$f(3)=0,\ f(1)=-1,\ f(2)=1$ / $f(3)\neq 0,\ f(4)=2,\ f(1)\neq 0,\ f(2)=1$

↓

ℓ4를 거치면 $2f(3)+2=2f(5).$

$f(5)>f(3) \rightarrow (\times)$

ℓ4를 거치면 $f(4)=f(4)\times f(5)$

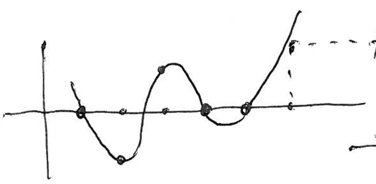
$f(4)=0$ / $f(4)\neq 0,\ f(5)=1$ $(f(5)>f(3)\rightarrow \times).$

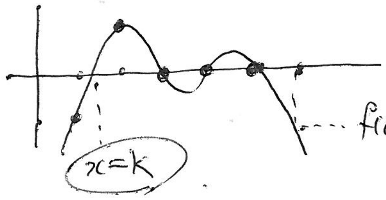
ℓ5를 거치면 $f(5)=f(5)\times f(6)$

$f(5)=0$ / $f(5)\neq 0,\ f(6)=1.$ $(f(6)>f(4)\rightarrow \times)$

↳ $f(6)\leq 0$ 이면 가능성 존재 ⚠2.

∴ ⚠1 $f(1)=0,\ f(2)=-1,\ f(3)=1,\ f(4)=0,\ f(5)=0.$ ⚠2 $f(1)=-1,\ f(2)=1,\ f(3)=f(4)=f(5)=0,\ f(6)\leq 0.$





$\therefore f(x)=a(x-k)(x-3)(x-4)(x-5).$

$f(1)=-24a(1-k)=-1=-24a+24ak$

$f(2)=-6a(2-k)=1.=-12a+6ak$

$\therefore\ 4=-48a+24ak.$

$24a=-5.$ $a=-\frac{5}{24}.$ $\therefore 5-5k=-1$ 에서 $k=\frac{6}{5}.$

따라서 $f(x)=-\frac{5}{24}(x-\frac{6}{5})(x-3)(x-4)(x-5)$

$f(\frac{5}{2})=\frac{65}{128}.$ $\therefore 128\times f(\frac{5}{2})=65$ //

* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 21번.

열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x) = \begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4} \le x < \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$

→ 실수 t에 대하여 조건 (가), (나)를 만족시키는 모든 실수 k의 개수 ⟶ $g(t)$.

(가) $-\frac{\pi}{2} < k < \frac{3\pi}{2}$, (나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 가 $x=k$에서 미분불가.

문제와 별도 (정의역 임의제한 X) 로 $2\sin^3 x$를 정리하면

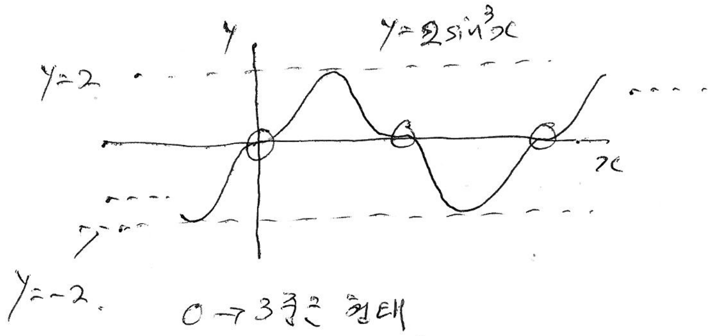
1) $x \in \mathbb{R}$.

2) $\lim_{x\to\infty} (2\sin^3 x)$ → 발산(진동)

$x\to-\infty$ $(2\sin^3 x)$ → 발산(진동).

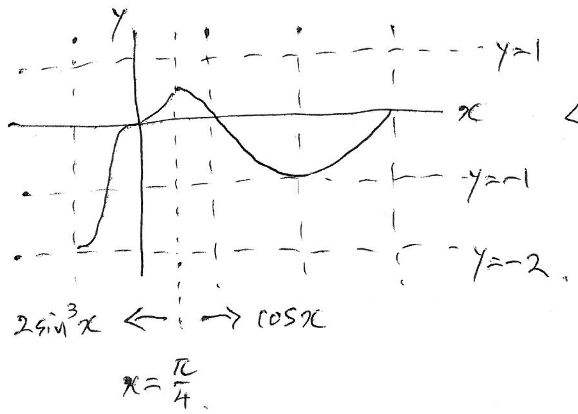
3) $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$, $(\pi, 0)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, -2\right)$

$\sin^3 x$는 $(\sin x)^3$이므로 3중근의 형태.



0 → 3중근 형태.

따라서 함수 $f(x)$의 개형은 다음과 같다.



* → 문제에서 요구하는 미분불가능 판단의 대상이 되는 함수는 위의 $f(x)$가 아니고,

$\sqrt{|f(x)|}$ 임에 주의해야 한다. 결국 $\sqrt{|\sin^3 x|}$ $(x=0)$ 와, $\sqrt{1+\cos x}$ $(x=\pi)$ 일 때,

미분가능 여부를 확인하라는 말이다. (그 외의 부분에서는 절댓값을 씌웠을 때 y값이 0인 부분에서 접선의 기울기가 0이 아니므로 더 고민할 여지가 없다. 즉, 접선의 기울기가 0일 때, 절댓값 씌우고 루트 씌운 함수는 항상 미분가능인지, 항상 미분불가능인지, 아니면 case by case로 확인해야 하는 것인지 확인해 봐라라는 문제)

* → 평소에 기본함수 그래프와 다양한 변형들을 연습했을 경우, 생각보다 굉장히 단순해질 수도 있는 문제이다.

* → 두 가지 ($\sqrt{|\sin^3 x|}$, $\sqrt{1+\cos x}$)를 먼저 살펴보면,

(A) $\sqrt{|\sin^3 x|}$, $x=0$일 때

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{|\sin^3 x|}-\sqrt{|\sin^3(0+)|}}{x-0(+)}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{\sin^3 x}}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x\times\sqrt{\sin x}}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{|\sin^3 x|}-\sqrt{|\sin^3(0-)|}}{x-0(-)}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{-\sin^3 x}}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-\sin x\times\sqrt{-\sin x}}{x}=0$$

미분가능.

(B) $\sqrt{1+\cos x}$, $x=\pi$일 때 $\left(\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{|1+\cos x|}\right)$

$$\lim_{x\to \pi+}\frac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1+\cos(\pi+)}}{x-\pi(+)}=\lim_{x\to\pi+}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1+\cos(x+\pi)}}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$$

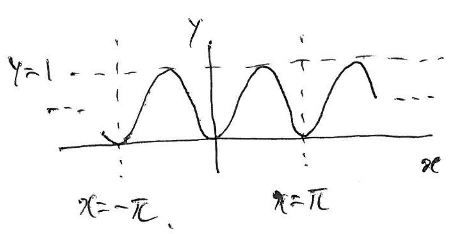
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\times\sqrt{\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to \pi-}\frac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1+\cos(\pi-)}}{x-\pi(-)}=\lim_{x\to\pi-}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{1+\cos(x+\pi)}}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}\times\sqrt{\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}}=\lim_{x\to 0-}\frac{-\sin x}{x}\times\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

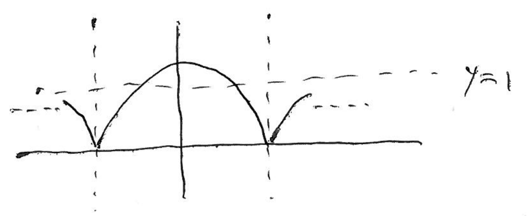
미.불.

(A)와 (B)의 그래프는 참고로 다음과 같다.



← $y=\sqrt{|\sin^3 x|}$

$y=\sqrt{1+\cos x}$ →



* 이제 다시 $f(x)$의 그래프에서 $\sqrt{|f(x)-t|}$를 추론하고,

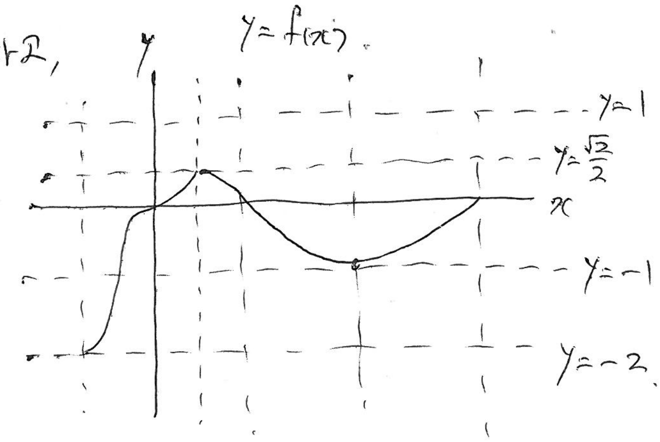
미분불가의 개수 $g(t)$의 함숫값을 찾아야 한다.

$(t>\frac{\sqrt{2}}{2})$ $g(t)=1$, $(t=\frac{\sqrt{2}}{2})$ $g(t)=1$.

$(0<t<\frac{\sqrt{2}}{2})$ $g(t)=3$, $(t=0)$ $g(t)=2$.

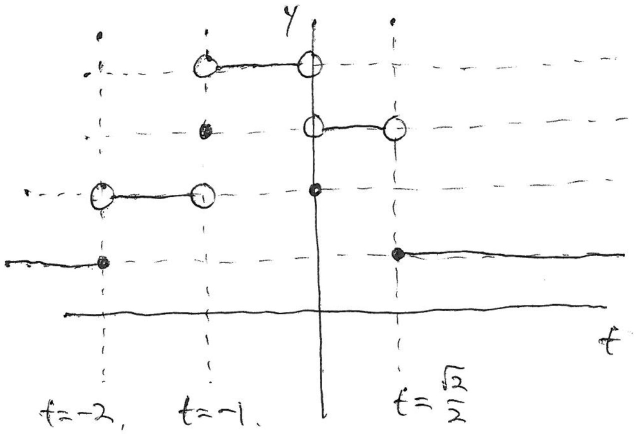
$(-1<t<0)$ $g(t)=4$. $(t=-1)$ $g(t)=3$

$(-2<t<-1)$ $g(t)=2$. $(t\le -2)$ $g(t)=1$.



$t(\pm)$만큼 내리고 x축 대칭시킨 뒤 $\sqrt{\ }$ 씌운 상태에서 판단. $\left(\sqrt{|f(x)-t|}\right)$.

따라서 함수 $g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



⇒ 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$와 함수 $g(t)$의 합성함수 $h(g(t))$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. (시험장에서는 $g(t)$값이 4개 (1, 2, 3, 4) 뿐이므로 바로 사차함수식을 도출해서 풀 수도 있다)

$h(x)$에서 x값이 될 수 있는 값들.

* 연속 (함숫값 = 극한값) / 극한값 존재 (우극한값 = 좌극한값)

(i) $h(g(-2)) = \lim_{t \to -2+} h(g(t)) \Rightarrow h(1) = h(2)$

(어떤 경우는 우극한만, 또는 좌극한만 또는 좌우극한 모두 따지는지 생각)

(ii) $h(g(-1)) = \lim_{t \to -1-} h(g(t)) = \lim_{t \to -1+} h(g(t)) \Rightarrow h(3) = h(2) = h(4)$

(iii) $h(g(0)) = \lim_{t \to 0-} h(g(t)) = \lim_{t \to 0+} h(g(t)) \Rightarrow h(2) = h(4) = h(3)$

(iv) $h(g(\frac{\sqrt{2}}{2})) = \lim_{t \to \frac{\sqrt{2}}{2}-} h(g(t)) \Rightarrow h(1) = h(3)$.

$\therefore h(1) = h(2) = h(3) = h(4)$ (이 값들이 같으면 조건 만족, 이 값들이 0 이라는 결과는 도출되지 않은 상태).

$\therefore h(1) = h(2) = h(3) = h(4) = \alpha$라 하면

$h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + \alpha$.

$g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = a = 1$, $g(0) = b = 2$, $g(-1) = c = 3$.

$\therefore h(a+5) - h(b+3) + c = h(6) - h(5) + 3$

$= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 = (5-1) \cdot 24 + 3 = 4 \cdot 24 + 3 = 96 + 3 = 99$//

* 2019학년도 평가원 6월 수학 나형 29번.

$f(x) = \begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\frac{5}{2}x & (x \ge 1) \end{cases}$, $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다.

→ 실수 전체의 집합에서 증가 또는 감소 한다.

방정식 $f(x) = f^{-1}(x)$의 서로 다른 실근 3개, 교점의 x좌표가 각각 $-1, 1, 2$ 이다.

(i) 증가함수인 경우 ($a>0$, $c>0$, $cx^2+\frac{5}{2}x$의 대칭축이 1보다 작거나 같다)

→ $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$와의 교점은 $y=x$ 위에 존재. ∴ 교점은 $(-1,-1)$, $(1,1)$, $(2,2)$.

연속이므로 $c+\frac{5}{2}$ (함숫값) $=$ $a+b$ (극한값) $=1$. ($\because (1,1)$)

$f(-1) = -a+b = -1$. ∴ $b=0$, $a=1$, $c=-\frac{3}{2}$ ⇒ 모순.

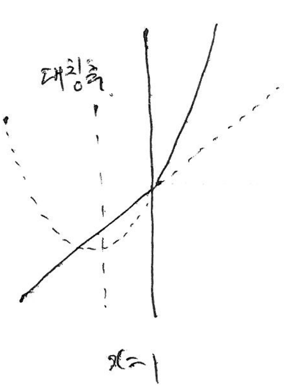
(ii) 감소함수인 경우 ($a<0$, $c<0$, $cx^2+\frac{5}{2}x$의 대칭축이 1보다 작거나 같다)

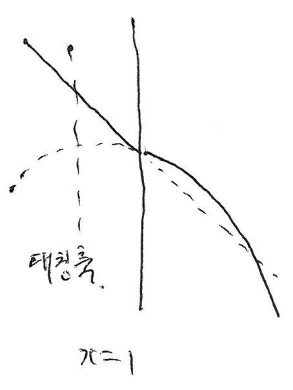
→ $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$와의 교점은 홀수개로 존재하고, median인 $x=1$인 경우는 $y=x$ 위에 존재한다. 또한 $(-1, f(-1))$과 $(2, f(2))$가 $y=x$ 대칭이므로 교점은 $(-1, 2)$, $(1,1)$, $(2,-1)$이다.

$$\left.\begin{aligned} &\text{연속이므로}\ c+\tfrac{5}{2} = a+b = 1 \\ &f(-1) = -a+b = 2. \\ &f(2) = 4c+5 = -1. \end{aligned}\right\} \therefore c=-\frac{3}{2},\ b=\frac{3}{2},\ a=-\frac{1}{2}.$$

$\therefore 2a+4b-10c = -1+6+15 = 20$ //

* 증가함수이든 감소함수이든 대칭축은 문제 내용상 1보다 작거나 같아야 한다.





* 2019학년도 평가원 6월 수학 나형 21번.

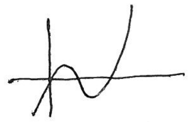
$f(x) = x^3+ax^2+bx = x(x^2+ax+b)$, (가) $f(-1) = -1+a-b > -1$ $\rightarrow a>b$.

$f'(x) = 3x^2+2ax+b$ (나) $f(1)-f(-1) = 1+a+b+1-a+b > 8$ $\rightarrow b>3$.

$\therefore 3<b<a$. $f'(x)=0$의 판별식 $a^2-3b > b^2-3b > 0$ ($\because b>3$) 이므로

$f(x)$는 극대와 극소가 존재하는 삼차함수이다.

대칭기준 (변곡점) 인 $f'(x)=0$의 대칭축 $x=-\frac{a}{3}$ (<-1, $\because a>3$) 의 위치상 $x=0$ 이외의 실근이 존재하더라도 ($x>0$) 범위에서 나타나지 않는다. $\Rightarrow$

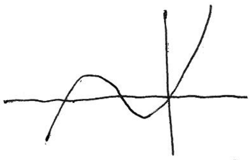


이런 개형은 불가능.

$f(x) = x(x^2+ax+b)$ 에서 $x^2+ax+b=0$의 근에

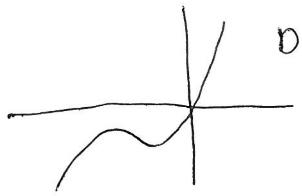
따라 3차방정식 $f(x)=0$의 근이 결정된다.

(i)



$D=a^2-4b>0$

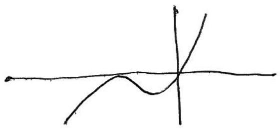
(ii)



$D=a^2-4b<0$

(단, $-3<D<0$).

(iii)



$D=0$.

ㄱ. True.

ㄴ. $f'(-1) = 3-2a+b = 3-a+b-a < 0$
$f'(1) = 3+2a+b > 0$

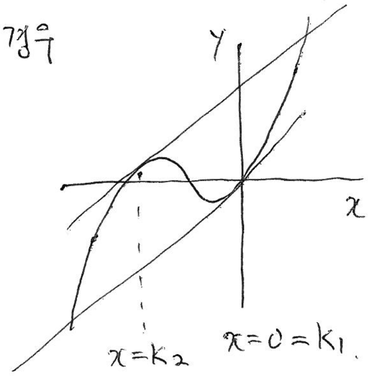
$\therefore$ 사잇값 정리에 의해 열린구간 $(-1, 1)$ 에 $f'(x)=0$인 x가 존재하고, x의 좌우에서 부호가 바뀐다.

$\therefore -1<x<1$ 일 때, $f'(x) \geq 0$ $\rightarrow$ False

ㄷ. 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때

개형 (i)의 경우

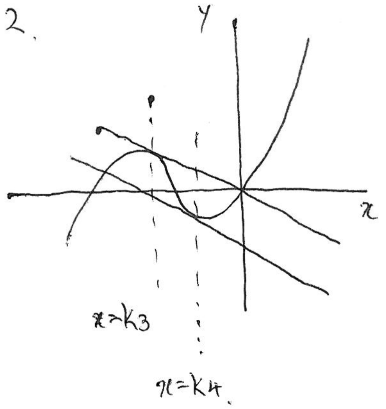
(i)-1.



$y=f'(k)x$ 는 원점을 지나는 직선이다.

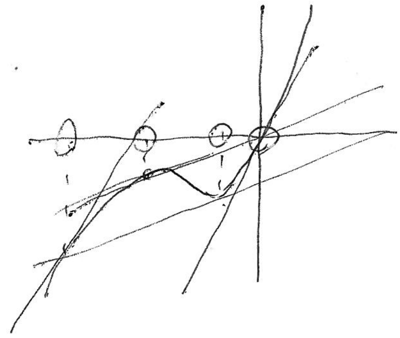
서로 다른 실근의 개수가 2인 경우는 왼쪽 그림처럼 2개의 직선이 나오고 k값도 2개가 존재한다.

(i)-2.



또한 좌측 그림과 같이 $x=0$일 때 접하지 않고 만나는 직선인 경우도 가능하다. 이 경우역시 직선은 두개가 존재하고, k값도 두 개가 존재한다.

∴ ㄷ → True



(ii), (iii) 개형에서도 성립함을 확인할 것 →.

* ㄷ을 식으로 확인하는 경우

$$f(x)-f'(k)x = x^3+ax^2+bx-(3k^2+2ak+b)x = x(x^2+ax-3k^2-2ak)=0.$$

A) 실근이 $0, 0, \alpha(\neq 0)$인 경우 (위에서 (i)-1인 경우. $x=0$에서 접한다)

$x^2+ax-3k^2-2ak=0$ 의 두 근이 0과 α. ∴ $\alpha=-a$ (∵근과 계수와의 관계)

$-3k^2-2ak=0$ ($0\times\alpha=0$) 에서 $k=0,\ -\frac{2}{3}a$. (위에서의 k_1, k_2에 해당)

B) 실근이 $0, \alpha(\neq 0), \alpha(\neq 0)$인 경우 (위에서 (i)-2인 경우)

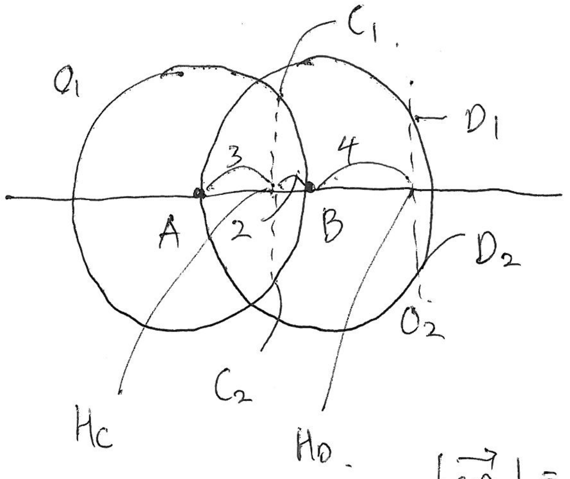
$x^2+ax-3k^2-2ak=0$ 의 두 근이 α, α 이므로 중근을 갖는다.

$$\therefore D = a^2+12k^2+8ak = 12k^2+8ak+a^2 = (6k+a)(2k+a)=0 \text{ 에서}$$

$$\left(\begin{array}{cc} 6 & a \\ 2 & a \end{array}\right)$$

$k=-\frac{a}{6}\ (=k_4),\ -\frac{a}{2}\ (=k_3)$

* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 29번.



$\overline{AB}=5$. $\cos(\angle CAB)=\frac{3}{5}$, ∴ $\overline{AH_C}=3$. $\overline{H_CB}=2$.

$\vec{AB}\cdot\vec{CD}=30$, ∴ $\overline{H_CH_D}=6$. ∴ $\overline{BH_D}=4$.

$A(0,0)$, $B(5,0)$ 이라 하면

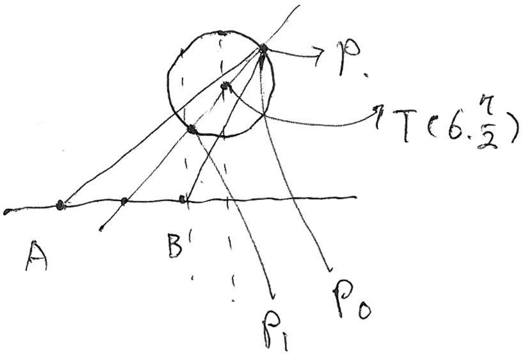
$C_1(3,4)$, $D_1(9,3)$, $C_2(3,-4)$, $D_2(9,-3)$.

$|\vec{C_1D_1}|=\sqrt{37}<\sqrt{81}$, $|\vec{C_1D_2}|=\sqrt{36+49}=\sqrt{85}>\sqrt{81}$

∴ $\vec{CD}=\vec{C_1D_1}$ or $\vec{C_2D_2}$. x축 대칭으로 볼 수 있으므로 $\vec{CD}=\vec{C_1D_1}$ 에서 생각해도 된다.

$\overline{CD}$를 지름으로 하는 원 ($(x-6)^2+(y-\frac{7}{2})^2=(\frac{\sqrt{37}}{2})^2$) 위의 점 P에 대하여

$\vec{PA}\cdot\vec{PB}$ 의 Max $=a+b\sqrt{74}$. $\overline{CD}$를 지름으로 하는 원을 O_3, 중심을 T라 하면



$\vec{PA}\cdot\vec{PB}=\vec{AP}\cdot\vec{BP}=(\vec{AT}+\vec{TP})\cdot(\vec{BT}+\vec{TP})$

$=\vec{AT}\cdot\vec{BT}+\vec{TP}\cdot(\vec{AT}+\vec{BT})+|\vec{TP}|^2$

$=(6,\frac{7}{2})\cdot(1,\frac{7}{2})+|\vec{TP}|\cdot(7,7)\cdot\cos+(\frac{\sqrt{37}}{2})^2$

$=6+\frac{49}{4}+\frac{37}{4}+\frac{\sqrt{37}}{2}\times 7\sqrt{2}=\frac{55}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{74}$.

∴ $a+b=\frac{55}{2}+\frac{7}{2}=\frac{62}{2}=31$ //

* 원 위의 점 P에 대한 두 점 A, B의 내적 $\vec{PA}\cdot\vec{PB}$ 는 원의 중심과 $\overline{AB}$의 중점을 연결하는 직선 상에서 M, m이 나타난다.

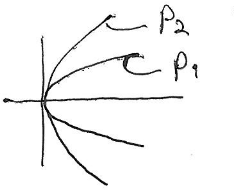
* $(x-6)^2+(y-\frac{7}{2})^2=\frac{37}{4}$ 과 $y=x-\frac{5}{2}$ 와의 교점이 P_1과 P_0 가 되고, 실제 계산해 보면 $P_0(6+\frac{\sqrt{74}}{4}, \frac{7}{2}+\frac{\sqrt{74}}{4})$ 가 나오고 $A(0,0)$, $B(5,0)$과의 내적을 구하면 $\frac{55}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{74}$ 가 나옴.

* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 19번.

$p \neq 0$, 두 포물선 $x^2=2y$ (①) 와 $(y+\frac{1}{2})^2=4px$ (②) 에 동시에 접하는 직선의 개수 $= f(p)$.

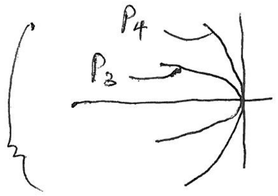
(변수가 p임).

$\lim_{p \to k+} f(p) > f(k)$ = ($p=k$)에서의 $f(p)$의 우극한값 > 함숫값.



$0<p_1<p_2$

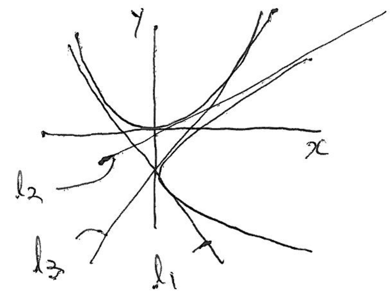
$p_4<p_3<0$

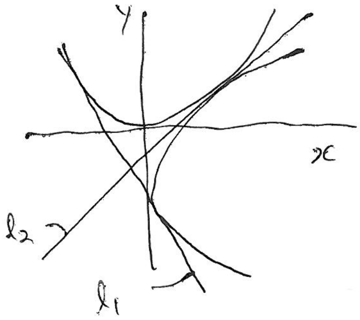


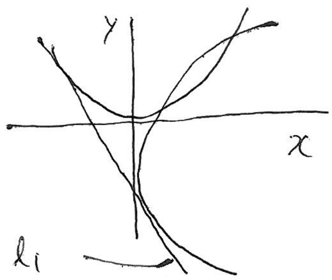
$y^2=4px$에서 $|p|$의 값이 커질수록 그래프상 더 벌어지는 그래프이다.

내용상 y축 대칭이므로 ($p>0$)을 기준으로 $f(p)$의 개형을 찾고, 대칭시키면 $f(p)$가 마무리된다.

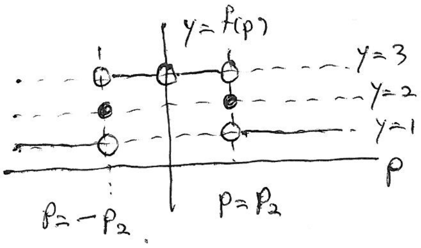
(i) $p=p_1$ (①과②의 교점 X) (ii) $p=p_2$ (교점 1개) (iii) $p=p_3$ (교점 2개)







∴ $f(p)$의 개형은 다음과 같다.



따라서 문제에서 묻는 우극한값이 함숫값보다 큰 $p=k$는 $-p_2$이다. ($k=-p_2$)

⇒ p_2값 찾고 (−)를 붙이면 된다.

(ii)의 경우 ③ 교점 좌표: $(t, \frac{t^2}{2})=(t, 2\sqrt{pt}-\frac{1}{2})$ (단, $t>0$)

④ 접선 : ①에서 $y=\frac{x^2}{2}$이므로 $\frac{dy}{dx}=x=t$. $\frac{4p}{t^2+1}$

②에서 $y^2+y+\frac{1}{4}=4px$이므로 $2y\,dy+1\cdot dy=4p\,dx$에서 $\frac{dy}{dx}=\frac{4p}{2y+1}$

③' $t^4+2t^2+1=16pt$

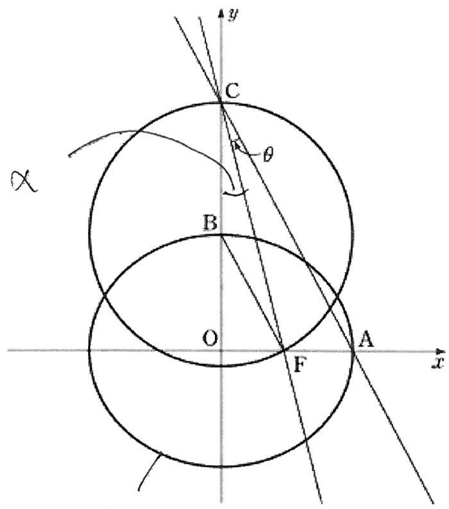
④' $t^3+t=4p$.

$16pt=4p\times4t=4t^4+4t^2$

$\therefore 3t^4+2t^2-1=0 \longrightarrow \therefore t^2 \Rightarrow \frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot3\cdot(-1)}}{2\cdot3} \Rightarrow \frac{1}{3}$ $(t^2>0)$

$\therefore t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore 4p=\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3\sqrt{3}}$. $\therefore p_2=\frac{1}{3\sqrt{3}}$. $\therefore k=-p_2=-\frac{1}{3\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{9}$ //

* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 17번.



타원

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 초점 $F(c, 0)$. 주어진 그래프 상

$c^2=a^2-b^2 \quad (a>b>0)$

$\overline{OB}=b$, $\overline{OA}=a$, $\overline{OF}=c=\sqrt{a^2-b^2}$, $\overline{BF}=\overline{BC}=a$.

$\overline{OC}=a+b$, $\angle FCB=\alpha$ 라 하면,

$\angle FCB=\angle CFB=\alpha$, $\tan\alpha=\frac{1}{4}$.

$\therefore \frac{\overline{OF}}{\overline{OC}}=\frac{c}{a+b}=\frac{1}{4}$. $\quad \therefore 4c=a+b$.

$\therefore 16c^2=16(a^2-b^2)=16(a+b)(a-b)=(a+b)^2$

$16a-16b=a+b$ 에서 $15a=17b$. $\therefore b=\frac{15}{17}a$.

$$\tan(\alpha+\theta)=\frac{a}{a+b}=\frac{a}{\frac{32}{17}a}=\frac{17}{32}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\theta}=\frac{\frac{1}{4}+\tan\theta}{1-\frac{1}{4}\tan\theta}$$

$\therefore 17-\frac{17}{4}\tan\theta=8+32\tan\theta$.

$\therefore \tan\theta=\frac{9}{\frac{17}{4}+32}=\frac{\frac{9}{1}}{\frac{145}{4}}=\frac{36}{145}$ //

* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 20번 (나형 20번)

자연수 n, $2a+2b+c+d=2n$을 만족하는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 a_n이라 하자.

→ $c+d$가 짝수여야 한다. (짝수+짝수 or 홀수+홀수)

$c+d=2k_\alpha$ (단, k_α는 음이 아닌 정수)

(i) $c=2k_1$, $d=2k_2$ (짝+짝) → $2a+2b+2k_1+2k_2=2n$

$\therefore a+b+k_1+k_2=n \rightarrow {}_4H_n$ ($\because$ c와 k_1, d와 k_2는 일대일 대응)

(ii) $c=2k_3+1$, $d=2k_4+1$ (홀+홀) → $2a+2b+2k_3+2k_4=2n-2$

$\therefore a+b+k_3+k_4=n-1 \rightarrow {}_4H_{n-1}$

따라서 $a_n={}_4H_n+{}_4H_{n-1}$.

하키스틱 or H 확장으로 확인할 것. ←

$\therefore \sum_{n=1}^{m} {}_4H_n = \sum_{n=1}^{m} {}_{n+1}H_3 = {}_{m+1}H_4 - 1$

$= {}_{m+4}C_4 - 1$

$\therefore \sum_{n=1}^{m} {}_4H_{n-1} = \sum_{n=1}^{m} {}_nH_3 = {}_mH_4 = {}_{m+3}C_4$.

$$\therefore \sum_{n=1}^{8} a_n = {}_{12}C_4 - 1 + {}_{11}C_4 = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1} - 1 + \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

$$= 495 - 1 + 330 = 824$$

(가) $= {}_4H_n = {}_{n+3}C_n = {}_{n+3}C_3$, (나) $= {}_4H_{n-1} = {}_{n+2}C_3$ (다) 824.

→ 확통 빈칸이 아니고 $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값을 구하는 문제라 하고 수열로 접근할 경우.

(i) $c+d=0$, $2a+2b=2n$. → ${}_2H_0 \times {}_2H_n$

(ii) $c+d=2$, $2a+2b=2n-2$ → ${}_2H_2 \times {}_2H_{n-1}$

(iii) $c+d=4$, $2a+2b=2n-4$ → ${}_2H_4 \times {}_2H_{n-2}$

⋯

(iv) $c+d=2n$, $2a+2b=0$ → ${}_2H_{2n} \times {}_2H_0$.

전체 항의 개수(쌍의 개수)는 $n+1$.

$$\therefore\ a_n = \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)(n+2-k) = \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ -2k^2 + (2n+5)k - n - 2 \right\}$$

$$\left({}_2H_{2n} = {}_{2n+1}C_1 = 2n+1,\quad {}_2H_{n+1-k} = {}_{n+2-k}C_1 = n+2-k \right)$$

$$= -2\times\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} + \frac{(2n+5)(n+1)(n+2)}{2} - (n+2)(n+1)$$

$$= (n+1)(n+2)\left\{ \frac{-4n-6}{6} + \frac{6n+15}{6} - \frac{6}{6} \right\} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$$

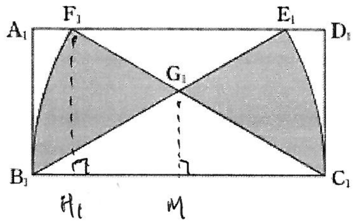
$$\therefore\ \sum_{k=1}^{8} a_k = \frac{2}{6}\times\left\{\frac{8\cdot 9}{2}\right\}^2 + \frac{9}{6}\times\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6} + \frac{13}{6}\times\frac{8\cdot 9}{2} + 8$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{8\cdot 8\cdot 9\cdot 9}{4} + 18\times 17 + 13\times 6 + 8$$

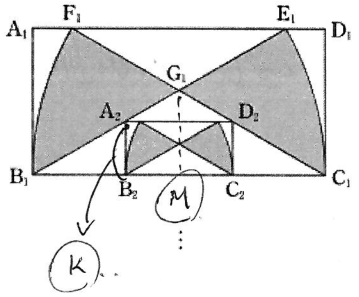
$$= 432 + 306 + 78 + 8 = 432 + 392 = 824 /\!/$$

* 2019학년도 평가원 6월 수학 나형 18번.

R_1



R_2



$\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$, 점 G_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 M이라 하면 M은 선분 B_1C_1의 중점이고, 점 F_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면 $\overline{C_1F_1}=2$, $\overline{F_1H_1}=1$.

$\therefore \angle F_1C_1H_1 = 30^\circ$. $\therefore \overline{G_1M} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ($\because \tan 30^\circ$).

1) n : $2 \to 2$. $\therefore n=1$.

2) $\overline{A_2B_2}=k$라 하면 $l_r = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{k}{1} = k$.

$\overline{A_2B_2} = \overline{B_2M} = k$, $\overline{B_1B_2} = 1-k$. $\therefore \frac{k}{1-k} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\therefore k = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$. $\therefore l_r = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$, $S_r = \frac{1}{4+2\sqrt{3}} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

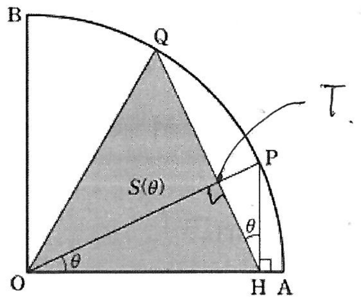
3) 부채꼴 $C_1F_1B_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2^2 \times \frac{\pi}{6}$

$\triangle B_1C_1G_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\therefore a = 2\times\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3}\pi - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r\times n} = \frac{\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4(\pi-\sqrt{3})}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}\pi-12}{9}$ //

* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 16번.



$\overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OQ} = \overline{OP} = 1 \ (=r)$.

$\overline{QH}$와 $\overline{OP}$의 교점을 T라 하자.

$\overline{OH} = \cos\theta$, $\overline{PH} = \sin\theta$, $\angle QHO = \frac{\pi}{2} - \theta$. $\therefore \angle OPH = \frac{\pi}{2}$.

$\overline{OT} = \cos^2\theta$, $\overline{HT} = \cos\theta\sin\theta$. $\overline{TQ} = \sqrt{1-\cos^4\theta} = \sin\theta\cdot\sqrt{1+\cos^2\theta}$.

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\times\cos^2\theta\times\{\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}\}}{\theta} = \lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\times\cos^2\theta\times\sin\theta\times\{\cos\theta+\sqrt{1+\cos^2\theta}\}}{\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\times(1+\sqrt{2}) \ //$$

$(\triangle OHQ = \frac{1}{2}\times\overline{OT}\times\overline{QH})$.

* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 28번.

자연수 n ($n=3, 4, 5, 6, \cdots\cdots$), $A=\{(x, y) \mid 1 \le x \le y \le n$, x와 y는 자연수$\}$

$(a, b) \in A$, $\left\{ \begin{array}{ll} b\text{가 3의 배수일 때} & \rightarrow \text{All} \\ a=b & \rightarrow \text{Target} \end{array} \right\}$ 확률 $\frac{1}{9}$.

ex1) $n=3$, $b=3$. $\therefore (1,3), (2,3), (3,3)$ 중에서 $(3,3)$ 만족 $\rightarrow \frac{1}{3}$.

ex2) $n=4$, $b=3$. $\rightarrow \frac{1}{3}$. $\Rightarrow$ n이 3의 배수가 아니면 그 직전단계 3의 배수인 경우와 같은 확률.

ex3) $n=6$. $b=3$ or 6. $\left\{ \begin{array}{ll} b=3. & 1/3 \\ b=6. & 1/6 \end{array} \right.$ $\rightarrow \frac{2}{9}$

ex4) $n=9$. $b=3$ or 6 or 9. $\longrightarrow \frac{3}{3+6+9} = \frac{1}{6}$

ex5) $n=15$. $b=3$ or 6 or 9 or 12 or 15. $\longrightarrow \frac{5}{3+6+9+12+15=5\times9=45} = \frac{1}{9}$.

$\therefore$ $n=15$ or 16 or 17. 따라서 모든 자연수 n의 값의 합은 $16\times3=48$//

* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 27번.

세 문자 a, b, c 중 4개 택 (중복허용) $\rightarrow$ 4개 일렬로 나열 $\Rightarrow$ a가 두번 이상 나오는 경우의 수.

(i) a를 두 번 이상 택하는 경우. (ii) (i)의 경우들을 일렬로 나열.

$(a, a, b, c) \longrightarrow \frac{4!}{2!} = 12$

$(a, a, b, b) \longrightarrow \frac{4!}{2!2!} \times 2 = 12.$

(a, a, c, c)

$(a, a, a, b) \longrightarrow 4$

$(a, a, a, c) \longrightarrow 4$

$(a, a, a, a) \longrightarrow 1.$

$\therefore 12+12+8+1=33$//

* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 18번.

$A(0,4)$, $B(0,-4)$. 주사위 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 m, n. $\therefore (m, n) \rightarrow 36$가지.

$C\left(m\cos\frac{n\pi}{3}, m\sin\frac{n\pi}{3}\right)$에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 12보다 작을 확률.

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 8(=\overline{AB}) \times \left|m\cos\frac{n\pi}{3}\right| < 12$. $\rightarrow$ 왜 갑자기 $m\cos\frac{n\pi}{3}$가 아니고

$\left|m\cos\frac{n\pi}{3}\right|$로 계산하는지 생각.

$\therefore \left|m\cos\frac{n\pi}{3}\right| = 4m \times \left|\cos\frac{n\pi}{3}\right| < 12$.

따라서 $m \times \left|\cos\frac{n\pi}{3}\right| < 3$을 만족시키는 (m, n)을 구해서 target으로 놓으면 된다.

(i) $m = 1$ or 2라면 항상 성립 $\left(\because 0 \le \left|\cos\frac{n\pi}{3}\right| \le 1\right)$. $\rightarrow 12$가지

(ii) $m = 3$, $\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right| < 1$이면 성립. $\therefore n \ne 3, 6$. $\rightarrow 4$가지.

(iii) $m = 4$, $\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right| < \frac{3}{4}$이면 성립. $\therefore n \ne 3, 6$. $\left(\because \left|\cos\frac{n\pi}{3}\right| = \frac{1}{2} \text{ or } 1\right)$ $\rightarrow 4$가지.

(iv) $m = 5$. $\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right| < \frac{3}{5}$이면 성립. $\rightarrow 4$가지.

(v) $m = 6$ $\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right| < \frac{1}{2}$이면 성립. $\rightarrow$ 불가능.

$\therefore$ 구하는 확률은 $\dfrac{12+12}{36} = \dfrac{24}{36} = \dfrac{2}{3}$ //

$\rightarrow$ 두 점 A와 B의 좌표를 변경해서도 해볼것.

* 2019학년도 평가원 6월 수학 나형 19번.

한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c → (a, b, c)는 216가지.

a	$< b-2$	$\le c$
1	2 ($b=4$)	2.
		2~6.
	3	3~6
	4	4~6.

$$\therefore\ \left.\begin{aligned} &5+4+3\\ +\ &4+3\\ +\ &3 \end{aligned}\right\}\ 22.$$

$\therefore$ 구하는 확률은 $\dfrac{22}{216}$

$= \dfrac{11}{108}$ //

→ 모든 경우의 수 문제의 가장 기본은 직접 다 세는 것이다. 그 과정에서 규칙성과 대칭성을 찾으면 된다.

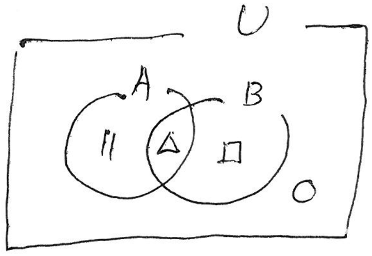
* 2019학년도 평가원 6월 수학 나형 27번.

$A \subset U$, $B \subset U$,

$n(U) = 25$.

$A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = A \cap B \neq \varnothing$.

$n(A-B) = 11$.



$\triangle \neq 0$, $\triangle + \square + \bigcirc = 14$. $n(B-A) = \square$.

$\triangle + \square + \bigcirc$ 가 고정되어 있으므로 $\square$의 최댓값은 $\triangle + \bigcirc$가 최소일 때이다.

$\therefore$ $\triangle = 1$, $\bigcirc = 0$ 이면 최소이므로 $n(B-A)$ $(=\square)$의 최댓값은 13 //

* 2019학년도 평가원 6월 수학 나형 26번.

다항식 $(1+2x)(1+x)^5$ 의 전개식에서 x^4의 계수 = ?

→ $(1+2x)(x^5 + \triangle_4 x^4 + \triangle_3 x^3 + \triangle_2 x^2 + \triangle_1 x + 1)$

∴ x^4의 형태는 $1 \times \triangle_4 x^4 + 2x \times \triangle_3 x^3$ 으로 나타나므로 $\triangle_3$과 $\triangle_4$를 모두 구해야 한다.

$$\left.\begin{aligned} \triangle_4 &= {}_5C_4 \cdot x^4 \cdot 1^1 = 5. \\ \triangle_3 &= {}_5C_3 \cdot x^3 \cdot 1^2 = 10. \end{aligned}\right\} \therefore \triangle_4 + 2 \times \triangle_3 = 25$$

→ $(1+2x)^3(1+x)^4$ 의 전개식에서 x^4의 계수를 구하는 것이라면

$(1+2x)^3 \rightarrow \sum_{k=0}^{3} {}_3C_k \cdot (2x)^k$ (변수 k)

$(1+x)^4 \rightarrow \sum_{r=0}^{4} {}_5C_r (x)^r$. (변수 r).

다른 변수를 사용해야 한다.

(단, $0 \le k \le 3$, $0 \le r \le 4$, k와 r은 정수)

∴ ${}_3C_k \cdot 2^k \cdot {}_5C_r \cdot x^{k+r}$ 의 형태에서

$k+r=4$ 이므로 $(k, r) = (0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1)$

따라서 구하는 계수는 ${}_3C_0 \cdot 2^0 \cdot {}_4C_4 + {}_3C_1 \cdot 2^1 \cdot {}_4C_3 + {}_3C_2 \cdot 2^2 \cdot {}_4C_2 + {}_3C_3 \cdot 2^3 \cdot {}_4C_1$

$= 1 + 24 + 72 + 32 = 129$ 가 된다.

* 2019학년도 평가원 6월 수학 나형 15번.

등비수열 $\{a_n\}$ $\rightarrow$ $a_n = ar^{n-1}$.

$a_3 = 4(a_2 - a_1)$, $\sum_{k=1}^{6} a_k = 15$. $(\because r \neq 0)$. $\leftarrow$ ($a=15, r=0$ 이라면 $a_3 = 4(a_2 - a_1)$ 성립 X)

$\therefore ar^2 = 4(ar-a) = 4a(r-1)$ 에서 $r^2 = 4r-4$ ($a=0$이면 모든 항이 0. 모든 합도 0)

$r=2$. $\sum_{k=1}^{6} a_k = \dfrac{a(2^6-1)}{2-1} = 63a = 15$ 에서 $a = \dfrac{15}{63}$.

$a_1 + a_3 + a_5 = a(1+r^2+r^4) = a \times (1+4+16) = 21a = 21 \times \dfrac{15}{63} = 5$ //

* 2019학년도 평가원 6월 수학 나형 24번.

등차수열 $\{a_n\}$

$a_5 = 5$, $a_{15} = 25$. $\rightarrow$ $a_{10} = 15$. $a_{20} - a_{10} = a_{15} - a_5 = 25 - 5 = 20$.

$\therefore a_{20} = 35$ //

$\rightarrow$ $\left.\begin{aligned} a_5 &= a + 4d = 5 \\ a_{15} &= a + 14d = 25. \end{aligned}\right\}$ $\therefore d = 2$, $a = -3$. $a_n = 2n - 5$.

$a_{20} = 40 - 5 = 35$ //

* 2019학년도 평가원 6월 수학 나형 28번.

$f(x)$는 이차함수.

(가) 함수 $\frac{x}{f(x)}$는 $x=1$, $x=2$일 때 불연속 $\rightarrow f(x) = a(x-1)(x-2)$, $(a \neq 0)$

(∵ 분자부분이 정의되는데 전체가 불연속이 되려면, 분모 부분의 함수가 다항함수라면, 어렵지 않게 함수가 정의되지 않으면 된다는 점을 캐치해야 한다).

(나) $\lim_{x\to2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{a(x-1)(x-2)}{x-2}$

$= \lim_{x\to2} a(x-1) = a = 4$.

$\therefore f(x) = 4(x-1)(x-2)$, $f(4) = 4\times3\times2 = 24$ //

* 2019학년도 평가원 6월 수학 나형 17번.

$f(x) = ax^2+b$, $f'(x) = 2ax$, (a, b는 상수)

$4f(x) = \{f'(x)\}^2 + x^2 + 4$ (항등식) $\rightarrow 4ax^2+4b = (4a^2+1)x^2+4$

$\therefore b=1$, $4a = 4a^2+1$에서 $(2a-1)^2 = 0$이므로 $a = \frac{1}{2}$. $\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2+1$.

$f(2) = 2+1 = 3$ //

* 2019학년도 평가원 6월 수학 나형 16번.

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치 x, $\rightarrow x = x(t) = t^3 + at^2 + bt$

(a, b는 상수, $x(0) = 0 \Rightarrow$ 원점출발).

$t=1$에서 점 P의 운동방향 변경

$\rightarrow x'(1) = 0$, 부호변경. $\therefore x'(1) = 3+2a+b = 0$.

$x'(t) = 3t^2+2at+b$.

$(a^2-3b>0)$.

$x''(t) = 6t+2a$.

$t=2$에서 점 P의 가속도가 0. $\therefore x''(2) = 12+2a = 0$.

$\therefore a=-6$, $b=9$. $a^2-3b = 36-27 = 9 > 0$. $\therefore a+b = -6+9 = 3$ //

* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 14번.

$x=k$와 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(8-x)$와의 교점 A, B, $\therefore x>0,\ 8-x>0 \rightarrow 0<x<8$.

$A(k, \log_2 k)$

$B(k, -\log_2(8-k))$

$\therefore \overline{AB} = |\log_2 k + \log_2(8-k)| = |\log_2 k(8-k)|$

$\therefore \log_2 k(8-k) = 2 \text{ or } -2$.

① $8k-k^2=4 \rightarrow k^2-8k+4=0$ 에서 $k=\dfrac{8\pm\sqrt{48}}{2} = 4\pm2\sqrt{3}$. $(0<4\pm2\sqrt{3}<8)$

② $8k-k^2=\dfrac{1}{4} \rightarrow k^2-8k+\dfrac{1}{4}=0$ 에서 $k=\dfrac{8\pm\sqrt{64-1}}{2} = 4\pm\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$ $\left(0<4\pm\dfrac{3\sqrt{7}}{2}<8\right)$

$\therefore \left(\dfrac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2<16$.

∴ 모든 실수 k는 4개이고 그 총 곱은

근과 계수와의 관계를 활용하면 $4\times\dfrac{1}{4}=1$ //

* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 15번.

$f(x)=a\cos(\pi x^2)$, $F(x)=\int f(x)\,dx$ 라 하면

$$\lim_{x\to0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1} f(t)\,dt\right\} = \lim_{x\to0}\frac{(x^2+1)\{F(x+1)-F(1)\}}{x} = \lim_{x\to0}(x^2+1)\times\frac{F(x+1)-F(1)}{x+1-1\ (=x)}$$

$= F'(1) = f(1) = a\cos\pi = -a = 3$. $\therefore a=-3$.

$f(-3) = -3\times\cos9\pi = (-3)\times(-1) = 3$ //

* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 26번.

$(2, a)$가 곡선 $y = \dfrac{2}{x^2+b}$ $(b>0)$의 변곡점. ($b>0$이므로 분모 $x^2+b>0$).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{(x^2+b)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4(x^2+b)^2+4x\cdot 2\cdot 2x(x^2+b)}{(x^2+b)^4} = \frac{-4x^2-4b+16x^2 = 12x^2-4b}{(x^2+b)^3}$$

$\therefore$ $12\cdot 2^2-4b = 48-4b=0$. $b=12$, $y|_{x=2} = \dfrac{2}{4+b} = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8} = a$.

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{\frac{12}{1}}{\frac{1}{8}} = 96_{//}$$

* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 25번.

$f(x) = 3e^{5x}+x+\sin x$. $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. $f^{-1}(x) = g(x)$.

$f(0)=3$, $\therefore g(3)=0$. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{g(x)-g(3)} = \frac{1}{g'(3)} = ?$

$g'(f(0))\cdot f'(0) = 1 = g'(3)\times f'(0)$

$\therefore \dfrac{1}{g'(3)} = f'(0)$. $f'(x) = 15e^{5x}+1+\cos x$. $\therefore f'(0) = 17_{//}$

* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 12번.

$x=0$ 에서 $x=\ln 2$ 까지의 곡선 $y=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}$ 의 길이는 ?

곡선의 길이 (a,b) : $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\cdot dx$

점의 이동거리 (a,b) : $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\cdot dt$. 사용하는 변수가 다르다.

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left\{\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}\right\}^2}\cdot dx = \int_0^{\ln 2}\sqrt{\left\{\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right\}^2}dx \quad \left(\because f'(x)=\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}\right)$$

$$=\int_0^{\ln 2}\left\{\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right\}dx = \left[\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln 2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} //$$

* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 13번.

점 P의 시각 $t\ (0<t<\pi)$ 에서의

위치 $P(x,y) \rightarrow P(t)_{p(x,y)} = (2t-\cos t,\ 4-\sin t)$

속도 $\rightarrow V(t)_{p(x,y)} = (2+\sin t,\ -\cos t) = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$

가속도 $\rightarrow A(t)_{p(x,y)} = (\cos t,\ \sin t) = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$

$\therefore \vec{v}\circ\vec{a} = (2+\sin t, -\cos t)\circ(\cos t, \sin t) = 2\cos t = 1$.

$(0<t<\pi)$ 에서 $\cos t=\frac{1}{2}=\cos\alpha$. $\quad \therefore \alpha=\frac{\pi}{3} //$