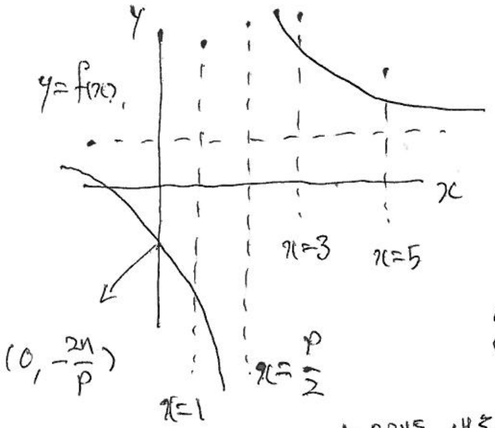
* 2018년 3월 시행 교육청 모의고사 고3수학 가형 30번.

n이 자연수, $f(x)=\frac{x+2n}{2x-p}$, $f(1)<f(5)<f(3)$, 자연수 p의 최솟값 m.



조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프는 왼쪽과 같으므로

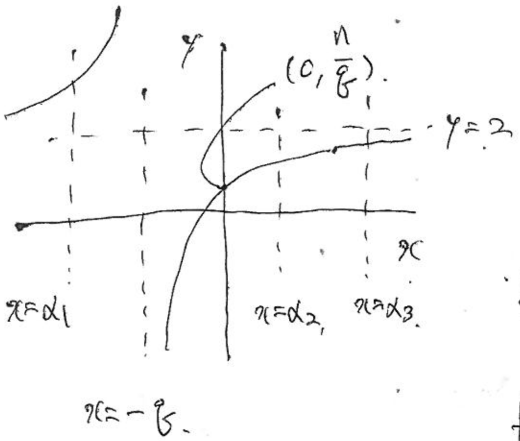
$1<\frac{p}{2}<3$. $\therefore p=3, 4, 5$. $m=3$.

$g(x)=\frac{2x+n}{x+q}$, $p=m=3$, $g(f(5))<g(f(3))<g(f(1))$

→ 그래프 내용상 음수임

$f(1)=\alpha_1$, $f(5)=\alpha_2$, $f(3)=\alpha_3$. $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$ 이고, $g(\alpha_2)<g(\alpha_3)<g(\alpha_1)$

$g(x)$를 판단하면 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 중 α가 최소일 때 $g(x)$가 최대, α가 중간값일 때 $g(x)$가 최소.



조건을 만족시키는 함수 $g(x)$의 그래프는 왼쪽과 같다.

$g(0)=\frac{n}{q}$ $\left(\frac{\text{자연수}}{\text{자연수}}\right)$. $\therefore 0<\frac{n}{q}<2$ .... ①

$f(1)=\alpha_1=\frac{1+2n}{-1}<-q$ .... ②

$f(5)=\alpha_2=\frac{5+2n}{7}>-q$ .... 항상 성립.

$f(3)=\alpha_3>f(5) \rightarrow \frac{3+2n}{3}>\frac{5+2n}{7}$ ... 항상 성립.

① 에서 $0<n<2q$.

② 에서 $1+2n>q$.

$\therefore \frac{n}{2}<q<1+2n$.

(i) $n=1$, $\frac{1}{2}<q<3$, $\therefore q=1, 2$. $a_1=2$.

(ii) $n=2$. $1<q<5$. $\therefore q=2, 3, 4$ $a_2=3$.

(iii) $n=3$. $\frac{3}{2}<q<7$. $\therefore q=2, 3, 4, 5, 6$. $a_3=5$.

(iv) $n=4$ $2<q<9$ $\therefore q=3, 4, 5, 6, 7, 8$. $a_4=6$

계산을 좀 더 해보면 다음을 알 수 있다.

$a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=5$, $a_4=6$, $a_5=8$, $a_6=9$, $a_7=11$, $a_8=12$, ...

이 때 홀수번째 항들과 짝수번째 항들은 각각 등차수열이므로

$$\begin{cases} a_{2n-1}=3n-1 \\ a_{2n}=3n \end{cases} \quad \therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = 3\times\frac{10\cdot 11}{2}-10+3\times\frac{10\cdot 11}{2}$$

$$=145+155=320$$

---

* 교과외 (계차수열)

$$\begin{aligned} a_n &: 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12, \ldots \quad (a_7,\ a_8) \\ b_n &: 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ldots \\ c_n &: 1\ \ -1\ \ 1\ \ -1\ \ 1\ \ -1\ \ldots \end{aligned}$$

$$b_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-1} = 1+\frac{1-(-1)^{n-1}}{1-(-1)} = \frac{3-(-1)^{n-1}}{2}$$

$$a_n = 2+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}-\frac{(-1)^{n-1}}{2}\right)$$

$$= 2+\frac{3}{2}n-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1-(-1)^{n-1}}{1-(-1)}$$

$$= \frac{3}{2}n+\frac{1}{2}-\frac{(1-(-1)^{n-1})}{4} = \frac{3}{2}n+\frac{1+(-1)^{n-1}}{4}$$

ex) $a_7=\frac{3}{2}\times 7+\frac{1+(-1)^{7-1}}{4}$

$$=\frac{21}{2}+\frac{2}{4}=11$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = \frac{3}{2}\times\frac{20\cdot 21}{2}+\frac{1}{4}\times 20+\frac{1}{4}\times\frac{1-(-1)^{20}}{1-(-1)} = 15\times 21+5+0 = 15\times 20+15+5$$

$$=320$$

→ 모든 수열은 초항과 $(n-1)$항까지의 계차들의 합으로 일반항을 추론할 수 있다. (수열의 원칙들 중 하나임). 또한 등차와 등비수열을 왜 먼저 배우는지에 대한 생각도 필요하다.