

12. 행렬 A 의 모든 성분들의 곱을 $f(A)$ 라 할 때, 2×2 행렬을 원소로 하는 집합 S, T 가 다음과 같다.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \mid pq \neq 0, p^2 \neq q^2 \right\}, \quad T = \{ A \mid f(A) = f(A^{-1}) \}$$

집합 $S \cap T$ 의 원소 B 에 대하여, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ $f(B) > -\frac{1}{4}$

ㄴ 임의의 원소 B 에 대하여 B^2 는 집합 $S \cap T$ 의 원소이다.

ㄷ 집합 $S \cap T$ 의 원소 중에는 $5P\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ 을 만족시키는 p 가 있다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

집합 $S \cap T$ 의 원소를 찾아보아요~ $B \in (S \cap T)$ 라 하고,

$B \in S$ 에서 $B = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$ 라 놓구요

동시에 $B \in T$ 이므로, $B^{-1} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}$ 에서,

$$f(B) = -p^2q^2, \quad f(B^{-1}) = \frac{-p^2q^2}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

$f(B) = f(B^{-1})$ 에서 $p^2 + q^2 = 1$ 이 성립합니다

즉, $S \cap T$ 의 원소 B 는 $B = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} (p^2 + q^2 = 1, pq \neq 0, p^2 \neq q^2)$ 임을 알 수 있죠

(사실 $p^2 + q^2 = 1$ 한 줄 추가한 셈이네요...!)

이제 선지를 하나씩 판별해보면,

ㄱ $f(B) = -p^2q^2 = -p^2(1 - p^2) = p^2(p^2 - 1)$ 이므로 $p^2 = t$ 로 놓으면 t 에 대한 2차식이 됩니다

$t = \frac{1}{2}$ 일 때, 최솟값 $\frac{1}{4}$ 을 가져야하지만, 조건에 의하여 $p \neq 0$ 이므로 결국 $f(B)$ 의 최솟값은

존재하지 않고, $-\frac{1}{4}$ 보다 큰 값을 갖습니다.

ㄴ 그럼 이번엔 B^2 을 직접 계산해봐요~ 야 신난다!

$$B^2 = \begin{pmatrix} p-q & p-q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p-q & p-q \\ q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2-q^2 & -2pq \\ 2pq & p^2-q^2 \end{pmatrix}$$

B^2 가 집합 $(S \cap T)$ 의 원소이냐는 뜻은 결국

$$(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = 1, 2pq(p^2 - q^2) \neq 0, (p^2 - q^2)^2 \neq (2pq)^2$$

가 성립하냐는 것을 묻는 것과 같습니다

하나하나 확인해볼까요?

$$(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = 1 \Leftrightarrow (p^2 + q^2)^2 = 1 \text{ 맞죠? } p^2 + q^2 = 1 \text{ 이었으니까요...}$$

$$2pq(p^2 - q^2) \neq 0 \Leftrightarrow p \neq 0, q \neq 0, p^2 \neq q^2 \text{ 맞죠? 문제에서 집합 } S \text{의 조건이었죠...}$$

$$(p^2 - q^2)^2 \neq (2pq)^2 \Leftrightarrow p^4 - 6p^2q^2 + q^4 \neq 0$$

$$p^2 = P, q^2 = Q \text{로 치환하면, } P^2 - 6PQ + Q^2 = P^2 - 6P(1-P) + (1-P)^2 = 8P^2 - 8P + 1 \neq 0$$

그런데 방정식 $8P^2 - 8P + 1 = 0$ 의 실근이 $-1 \leq P \leq 1$ 에서 존재하죠...

따라서 사실은 ㄴ이 틀립니다 아 이런 마지막 관문에서...

그런데 결과적으로 ㄴ이 맞게 나왔다고 쳐도 계산이 너무 길어져서 좋은 문제가 아니네요

솔직히 말씀드리면 오류가 있다는건 몇 달 전부터 알고 있었는데 어떻게 고쳐야할지

모르겠어서...

패러디모의인지라 다른 문제로 바꿀수도 없고 그래서 슬쩍 12번 빼놨는데

결국 부처님 손바닥... 이렇게 고해성사를 하게 되네요ㅜㅜ

Cantata모의 오류 작렬이라고 해도 할 말 없네요 정말ㅜㅜ

ㄷ입니다 이젠 뭐 간단하게 나오죠

$P = \begin{pmatrix} p-q \\ q & p \end{pmatrix} (p^2 + q^2 = 1, pq \neq 0, p^2 \neq q^2)$ 라 하면,

$$5P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} p-q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} p-q \\ p+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$(p^2 + q^2 = 1, pq \neq 0, p^2 \neq q^2)$ 라는 조건들까지 고려해서 직접 연립방정식을 풀어보시면,

$p = \frac{4}{5}, q = \frac{3}{5}$ 이 나오면서 맞는걸루 나와요~~

지금까지는 제가 이 문제를 만들 때의 출제의도를 말씀드린건데요

의도한게 아니었는데 가만히 보니 $B = \begin{pmatrix} p-q \\ q & p \end{pmatrix} (p^2 + q^2 = 1, pq \neq 0, p^2 \neq q^2)$ 가

회전변환이더군요... 이걸 갖고 생각해보시면 이렇게 계산으로 하는것보다 좀 더 빠르게

풀리긴 합니다 ㄴ 같은 경우도 $p = \cos 22.5^\circ, q = \sin 22.5^\circ$ 일 때

B^2 은 $\cos 45^\circ$ 와 $\sin 45^\circ$ 로 이루어지게 되어서 B 의 1행 1열과 1행 2열의 성분을

각각 제공한 값이 같아지므로 모순이죠...

이 문제는 ㄴ이 이리이러해서 오류가 된다는것만 한 번 생각해보시고 버리세요ㅜㅜ