* 원리합계

문제 유형 { 단리, 복리를 활용한 이자 계산, 원리금 합산.
할부금과 일시금의 비교를 통한 가치 계산.

1. 단리와 복리의 구분.

원리금과 이자를 따로 처리하는 방식이 단리, 이자를 원리금으로 편입시키는 방법이 복리.

예를 들어 3년 만기 정기예금으로 연초에 100만원을 입금했을 경우 연말에 이자가 붙을 때 (5%)

단리 {
첫해 말 이자 5만원
두번째 해 말 이자 ".
세번째 해 말 이자 ".
누적 이자 15만원

복리 {
첫해 말 이자 5만원
두번째 해 말 이자 10만 2500원 (이 금액이 누적금액임)
세번째 해 말 이자 15만 7625원.
누적 이자 15만 7625원.

→ 예금은 정해진 기간동안 입출금 없이 돈을 묶어두는 형태, 적금은 정해진 기간마다 정해진 금액을 입금하는 형태.

→ 단리의 경우 등차수열 활용이고, 복리의 경우 등비수열의 활용으로 볼 수 있다.

2. 할부금과 일시금의 비교 (***)

동일한 시작점과 동일한 종료시점에 대해 그 가치가 동일해야 한다. → 계산원리

→ 특정 미래 시점에서의 가치가 동일해야 계산의 의미가 존재함.
만약 특정 미래 시점에서 할부금의 가치가 더 클 경우, 일시금에 대한 계산은 무의미해진다.

→ 위에서 단리와 복리에 대해 선택할 수 있다면 거의 대다수의 예금자는 복리를 선택할 것이라는 추측은 합리적인 추측이다.

3. 유효자리 숫자의 이해.

연이율 5%에서 연초에 예금하고 연말에 이자가 붙는 형태라면 엄밀하게 말해 이자는 원금에 대해 $0.05 \times \frac{364}{365}$ 가 되어야 한다. ($\frac{364}{365} = 0.997260\cdots$) 이런 경우 유효자리가 소숫점 아래 두 자리 까지라면 소숫점 아래 세 번째 자리에서 반올림 하라는 의미를 내포한다. $0.997260\cdots$ 에서 유효자리 0.99에다 반올림한 유효숫자에 해당하는 0.01을 더하면 1이 된다. 즉, 1년치 이자가 모두 나온다는 말을 이렇게 유효숫자로 표현한다.

예를 들어 $1.1^{10} = 2.5937424601$ 인데, $1.1^{10} = 2.5937$ 이라고 주어진다면 연초에 입금하고 연말에 이자를 받을 때 1년치 모두가 나오는게 아니고, 0.9973 만큼만 이자가 지급된다는 의미다.

→ 원리합계 문제를 포함해서 어떤 문제에서

$$\left\{\begin{array}{l} \log 2 = 0.3 \\ \log 2 = 0.301 \\ \log 2 = 0.3010 \end{array}\right\}$$

이와 같이 주어졌을 때, 유효자리가 달라진다.

(0.301과 0.3010을 같은 것이라고 생각 X).

* 등비수열의 합 공식은 $\dfrac{a \times (1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a \times (r^n - 1)}{r-1}$

여기서 주의할 점은 n의 경우 무조건 항의 개수를 말한다. 일반항의 형태에 현혹당하지 않아야 한다.

1. 은행에서 1000만 원을 대출받은 A씨는 대출을 받은 후 11년이 되는 날부터 매년 일정한 금액 a만 원씩 10회에 걸쳐 나누어 갚기로 하였다. a의 값은? (단, 연이율은 매년 4%의 복리로 하고, $1.04^{10}=1.5$로 계산한다.)
① 180 ② 183 ③ 186 ④ 189 ⑤ 192

2. 2021년 초에 연이율 5%의 복리 저축 상품에 100만원을 적립하고 다음해부터 매년 초에 전년도 적립액의 10%를 증액하여 적립하기로 했다. 2030년 말까지의 적립금의 원리합계는? (단, $1.05^{10}=1.6$, $1.1^{10}=2.6$)
① 2000만원 ② 2100만원 ③ 2200만원 ④ 2300만원 ⑤ 2400만원

3. 민범이는 어느 은행에 2011년부터 2020년까지 10년 동안 매년 초에 1000만 원씩 연이율 10%의 복리로 적립한 다음, 적립한 모든 돈을 2021년 초에 찾은 직후 연이율 5%의 복리로 2031년 초에 찾을 수 있도록 하는 예금에 맡겼다. 2031년 초에 민범이가 받게 되는 원리합계는? (단, $1.05^{10}=1.6$, $1.1^{10}=2.6$으로 계산한다.)
① 2억 7340만원 ② 2억 7520만원 ③ 2억 7700만원
④ 2억 7980만원 ⑤ 2억 8160만원

4. 1월달 초에 가격이 20만 원인 물건을 12개월 할부로 구입하고 1월달 말부터 매달 일정한 금액으로 12회 동안 나누어서 갚기로 하였다. 월이율 1.5%, 1개월마다 복리로 계산할 때, 매회 얼마씩 갚아야 하는지 구하여라. (단, $1.015^{12}=1.2$)

5. 올해부터 매년 말에 50만 원씩 10년간 계속해서 지급되는 연금이 있다. 연이율 10%, 1년마다 복리로 계산할 때, 이 연금을 올해 초에 한꺼번에 받는다면 얼마를 받을 수 있는지 구하여라. (단, $1.1^{10}=2.6$으로 계산하고, 천 원 단위는 반내림한다.)

6. 2007학년도 평가원 6월 수학 가형 14번, 나형 14번

14. 다음은 어느 회사의 연봉에 관한 규정이다.

(가) 입사 첫째 해 연봉은 a원이고, 입사 19년째 해까지의 연봉은 해마다 직전 연봉에서 8%씩 인상된다.
(나) 입사 20년째 해부터의 연봉은 입사 19년째 해 연봉의 $\frac{2}{3}$로 한다.

이 회사에 입사한 사람이 28년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은? (단, $1.08^{18}=4$로 계산한다.) [4점]

① $\frac{101}{2}a$ ② $\frac{111}{2}a$ ③ $\frac{121}{2}a$
④ $\frac{131}{2}a$ ⑤ $\frac{141}{2}a$

정답: 1. ① 2. ② 3. ⑤ 4. 18000원 5. 307만원 6. ④

1. 11년 연초 1000만원 대출.

↓

12년 연초 a만원 상환.

13년 연초 a만원 상환.

- - - -

21년 연초. a만원 상환.

① 1000만원 대출기간 20년. → 21년 연초 시점에서의 가치

$$= 1000 \times 1.04^{20} = 1000 \times 1.5^2 = 2250$$

② 상환금 가치

$$a(21년초) + a \times 1.04\,(20년초) + a \times 1.04^2\,(19년초) + \cdots$$

$$\cdots + a \times 1.04^9\,(12년초) = \frac{a(1.04^{10}-1)}{1.04-1} = \frac{0.5a}{0.04} = \frac{25}{2}a.$$

① = ② 이어야 하므로 $a = \frac{2 \times 2250}{25} = 180$ //

2. 5% 복리.

30년 말에서의 가치.

→ 누적 가치가 적립금의 원리합계가 된다.

21년초 100 적립. → 100×1.05^{10}

22년초 100×1.1 적립. → $100 \times 1.05^9 \times 1.1$

23년초 100×1.1^2 적립. → $100 \times 1.05^8 \times 1.1^2$

- - - - - - - - - - -

30년초 100×1.1^9 적립. → $100 \times 1.05 \times 1.1^9$

∴ 일반항을 정리해 보면

$$100 \times 1.05^{10} \times \left(1.1 \times \frac{1}{1.05}\right)^{n-1}$$

항의 개수는 10 이므로

$$100 \times 1.05^{10} \times \frac{\left(\left(\frac{1.1}{1.05}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1.1}{1.05} - 1} = 100 \times 1.6 \times \frac{\frac{2.6}{1.6} - 1 = \frac{5}{8}}{\frac{5}{105} = \frac{1}{21}} = 160 \times \frac{105}{8} = 20 \times 105 = 2100 \text{ //}$$

3. 연이율 10% 복리.

11년초 1000만원

12년초 1000만원.

13년초 1000만원.

- - - -

20년초 1000만원

→ 21년초의 가치 총액은 $1000 \times 1.1 + 1000 \times 1.1^2 + 1000 \times 1.1^3 + \cdots + 1000 \times 1.1^{10}$

$$= \frac{1000 \times 1.1 \times (1.1^{10} - 1)}{1.1 - 1} = 1000 \times 11 \times 16$$

→ 21년초에 $1000 \times 11 \times 16$ 만원을 연이율 5% 복리로 10년간 예금.

$$\therefore 1000 \times 11 \times 1.6 \times 1.1^{10} = 1000 \times 1.1 \times 1.6 \times 1.6$$

$$= 1000 \times 2.816 = 2816\text{0만원 //}$$

4. 이번달 (1월) 초 20만원 짜리 물건 할부로 구입 → 회사 입장에서는 20만원 가치를 구매자에게 투자한 셈.

1월 말 a천 상환.
2월 말 a천 상환.
3월 말 〃
- - - -
12월 말 〃

월 이율 1.5%.

$$\frac{a\times(1.015^{12}-1)}{1.015-1}$$

$$=\frac{0.2\times a}{0.015}$$

$$=\frac{40}{3}a.$$

⇓

연말의 가치는

$20\times1.015^{12}=24.$

$\therefore\ \frac{40}{3}a=24$ 에서 $a=\frac{24\times3}{40}=1.8$ //

5. 연 이율 10%. 복리.

→ 연초 (01년초) 에 a원을 받는다면

01년 말 50만원 수취
02년 말 〃
03년 말 〃
- - - - -
10년 말 〃

총 가치는

$$\frac{50\times(1.1^{10}-1)}{1.1-1}$$

$=500\times1.6$

$=800.$

10년 말 시점에서의 가치는

$a\times1.1^{10}=a\times2.6.$

$\therefore\ 2.6a=800$ 에서 $a=\frac{4000}{13}=307.xx\cdots$

∴ 올 초에 307만원을 받으면 된다.

6.

01년 연봉 a.
02년 연봉 $a\times1.08$
03년 연봉 $a\times1.08^2$
- - - - -
19년 연봉 $a\times1.08^{18}$
20년 연봉 $a\times1.08^{18}\times\frac{2}{3}$
- - -
28년 연봉 〃.

∴ 01년부터 19년까지의 연봉 가치의 총합 (등비수열)과 20년부터 28년까지의 연봉가치의 총합 (등차수열)을 더하면 된다. 그러므로

$$\frac{a\times(1.08^{19}-1)}{1.08-1}+a\times1.08^{18}\times\frac{2}{3}\times9$$

$$=\frac{3.32a}{0.08}+24a=\frac{83}{2}a+24a=\frac{131}{2}a.$$