2021학년도 인수·제헌 6월 모의평가 해설지 [가형]

1	③	2	①	3	③	4	④	5	②
6	⑤	7	②	8	③	9	④	10	①
11	⑤	12	④	13	①	14	②	15	④
16	⑤	17	①	18	③	19	⑤	20	②
21	③	22	15	23	177	24	128	25	11
26	20	27	9	28	16	29	157	30	619

1.
$\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$ 이다.

2.
$\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

3.
$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+2}}{3^n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{9\times 3^n}{3^n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{1+\frac{2}{3^n}} = 9$ 이다.

4.
a와 $a+4$의 등차중항이 $\frac{9}{2}$ 이므로
$2\times\frac{9}{2} = a+a+4$ 이다.
즉, $9 = 2a+4$ 이므로 $a = \frac{5}{2}$ 이다.

5.
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 이므로 $2\cos^2 x = 3\sin x$ 에서
$2(1-\sin^2 x) = 3\sin x$ 이다. 식을 정리하면
$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ 에서
$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$ 이고,
$-1 \le \sin x \le 1$ 이므로 $\sin x = \frac{1}{2}$ 이다.
$0 \le x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$의 모든 해는
$x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ 이므로 주어진 방정식의 모든 해의 합은 π 이다.

6.
$P(A\cup B^C) = 1 - P(A^C\cap B) = \frac{5}{6}$ 에서
$P(A^C\cap B) = \frac{1}{6}$ 이다. 따라서
$P(A\cup B) = P(A) + P(A^C\cap B) = \frac{5}{12}$ 이다.

7.
모든 자연수 n에 대하여
$\sqrt{n^2+6n-1} - n < a_n - n < \sqrt{n^2+6n+5} - n$
을 만족시킨다. 이때,
$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+6n-1} - n) = 3$ 이고,
$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+6n+5} - n) = 3$ 이므로
$\lim_{n\to\infty}(a_n - n) = 3$ 이다.

8.
$\lim_{x\to 0}\{\log_{(1+2x)}(1+6x)\}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{\ln(1+2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+6x)}{6x}\times 6}{\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times 2} = \frac{6}{2} = 3$$

9.
$x^2 - xy + \sin y = 0$ 을 x에 대하여 미분하면
$2x - \left(y + x\times\frac{dy}{dx}\right) + \cos y\times\frac{dy}{dx} = 0$ 에서
$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-\cos y}$ 이다.
따라서 곡선 $x^2 - xy + \sin y = 0$ 위의 점
$(\pi,\ \pi)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{\pi}{\pi+1}$ 이다.

10.
첫 번째 자리에 올 수 있는 문자는 4 개이고,
두 번째 자리에 올 수 있는 문자는 4 개이고,
세 번째 자리에 올 수 있는 문자는 4 개이다.
마지막 자리의 문자는 첫 번째 자리의 문자와 같으므로 구하는 경우의 수는 $4^3 = 64$ 이다.

11.
$b = 4a$ 이므로 $a^b = b^{\frac{a}{3}}$ 에서 $a^{4a} = (4a)^{\frac{a}{3}}$,
$a^4 = (4a)^{\frac{1}{3}}$ 이므로 $a^{12} = 4a$, $a^{11} = 4$ 이다. 따라서
$a = 2^{\frac{2}{11}}$ 이다. 따라서 $b = 4\times 2^{\frac{2}{11}} = 2^{\frac{24}{11}}$ 이다.

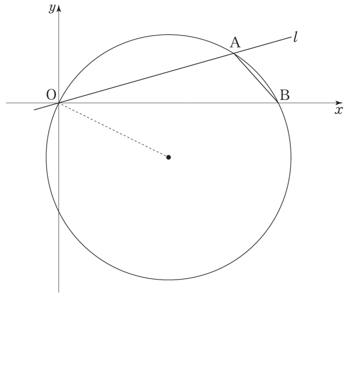
12.
꺼낸 두 공에 적혀 있는 두 숫자의 차가 1 이 되려면
꺼낸 두 공에 적힌 숫자가 1, 2 이거나
2, 3 이어야 한다. 따라서 구하는 확률은
$\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1 + {}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_9C_2} = \frac{1}{2}$ 이다.

13.
진수조건과 부등호에 유의하여 부등식의 해를 구하자.
$\log_4\left(\sqrt{3} - 2\cos\frac{x}{2}\right) < \log_4(2+\sqrt{6}) - \frac{1}{4}$,
$\frac{1}{2}\log_2\left(\sqrt{3} - 2\cos\frac{x}{2}\right) < \frac{1}{2}\left\{\log_2(2+\sqrt{6}) - \frac{1}{2}\right\}$ 에서
$\log_2\left(\sqrt{3} - 2\cos\frac{x}{2}\right) < \log_2(2+\sqrt{6}) - \frac{1}{2}$,
$\log_2\left(\sqrt{3} - 2\cos\frac{x}{2}\right) < \log_2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ 이다.
진수조건에 의하여 $\sqrt{3} - 2\cos\frac{x}{2} > 0$,
$\cos\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고,
부등식 $\log_2\left(\sqrt{3} - 2\cos\frac{x}{2}\right) < \log_2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ 을 풀면
$\sqrt{3} - 2\cos\frac{x}{2} < \sqrt{2}+\sqrt{3} \iff \cos\frac{x}{2} > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.
따라서 주어진 부등식은 부등식
$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해를 구하는 것과 같다.
$0 \le x < 2\pi$ 이므로 $\frac{x}{2} = t$ 라 하면 $0 \le t < \pi$ 이고,
$0 \le t < \pi$ 에서 부등식 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos t < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는
$\frac{\pi}{6} < t < \frac{3\pi}{4}$ 이다. 따라서 $\frac{\pi}{6} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$,
$\frac{\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}$ 이다.
$\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{3\pi}{2}$ 이므로 $3\alpha + \beta = \frac{5\pi}{2}$ 이다.

14.
주어진 함수에서 x 의 값이 1 에서 e 까지 변할 때의
평균변화율은 $\frac{f(e)-f(1)}{e-1} = \frac{1}{e(e-1)}$ 이다.
한편, 함수 $f(x)$ 를 미분하면 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ 이고,
$x \ne 0$ 이므로,
$\frac{1}{e(e-1)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{c^2}$, $c^2 - (e^2-e)c + (e^2-e) = 0$
에서 모든 상수 c의 값의 합은 $e^2 - e$ 이다.

15.
1) (가)를 구하는 과정
$a_1\times{}_8C_0 + (a_1+2)\,{}_8C_1 + \cdots + (a_1+16)\,{}_8C_8$
$= a_1\times({}_8C_0 + {}_8C_1 + \cdots + {}_8C_8)$
$+ \boxed{(가)}\times({}_8C_1 + 2\times{}_8C_2 + \cdots + 8\times{}_8C_8)$
처음은 a_1 을 공통인수로 묶고
나머지는 2 를 공통인수로 묶으므로 $p = 2$ 이다.
2) (나)를 구하는 과정
$k\times{}_8C_k = k\times\frac{8!}{k!(8-k)!} = 8\times\frac{7!}{(k-1)!(8-k)!}$
$= 8\times{}_7C_{k-1}$ 이다. 따라서 $f(k) = k-1$ 이다.
3) (다)를 구하는 과정
${}_8C_1 + 2\times{}_8C_2 + \cdots + 8\times{}_8C_8$
$= \sum_{k=1}^{8} k\times{}_8C_k = \sum_{k=1}^{8} 8\times{}_7C_{k-1}$
$= 8\sum_{k=1}^{8}{}_7C_{k-1} = 8\sum_{k=0}^{7}{}_7C_k$
$\sum_{k=0}^{7}{}_7C_k = 2^7$ 이므로 $q = 8\times 2^7 = 2^{10}$ 이다.
$\therefore\ \frac{q}{f(p)\times f(9-p)} = \frac{1024}{f(2)f(7)} = \frac{512}{3}$

16.
직선 $l : \sqrt{2}x - 5y = 0$ 의 기울기는 $y = \frac{\sqrt{2}}{5}x$ 에서
$\frac{\sqrt{2}}{5}$ 이다. 따라서 직선 OA 가 x 축의 양의 방향과
이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{5}$ 이다.
이때, $\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{9}$ 이다. 삼각형 OAB 에 사인법칙을
이용하면 $\frac{\overline{AB}}{\sin\theta} = 2R$ 이다.
$\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{9}$, $\overline{AB} = 2\sqrt{6}$ 이므로 $2R = 18$,
$R = 9$ 이다.

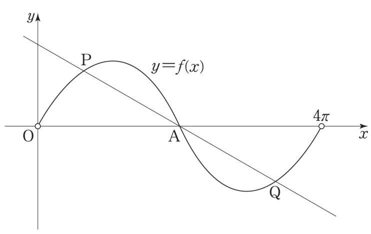


위 그림에서 원의 중심은 제 4사분면에 있고, 중심을 $\left(p,\ -\frac{1}{2}p\right)$라 할 수 있다. 이때, $p^2+\left(-\frac{1}{2}p\right)^2=9^2$, $\frac{5}{4}p^2=81$, $p^2=\frac{324}{5}$이다. $\therefore\ p\times q=-\frac{1}{2}p^2=-\frac{162}{5}$

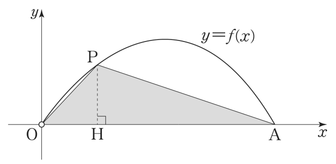
17.
$\frac{a_n}{S_n}=\frac{1}{3}n^2+c$에 $n=1$을 대입하면 $\frac{a_1}{S_1}=\frac{1}{3}+c$이고,
$S_1=a_1$이므로 $1=\frac{1}{3}+c\ \Leftrightarrow\ c=\frac{2}{3}$이다.
2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=S_n-S_{n-1}$이 성립하므로
$\sum_{n=2}^{10}\frac{S_{n-1}}{S_n}=\sum_{n=2}^{10}\frac{S_n-a_n}{S_n}=\sum_{n=2}^{10}\left(1-\frac{a_n}{S_n}\right)=9-\sum_{n=2}^{10}\frac{a_n}{S_n}$
이다. $\frac{a_n}{S_n}=\frac{1}{3}n^2+\frac{2}{3}$이므로
$\sum_{n=2}^{10}\frac{a_n}{S_n}=\sum_{n=2}^{10}\left(\frac{1}{3}n^2+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{10}n^2+6=134$이다.
따라서 답은 $9-134=-125$이다.

18.
그림 R_1에 색칠되어있는 부분의 넓이는 반지름의 길이가 1인 사분원이므로 $S_1=\frac{\pi}{4}$이다.
그림 R_2에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:\sqrt{3}$이므로
$\angle A_2C_2D_2=60^\circ$이다. 따라서
$\angle A_2C_2D_1=\angle A_2C_2D_2+\angle D_1C_2D_2=90^\circ$이다.
즉, 직선 A_2C_2는 직선 B_1C_1과 평행하다.
점 A_2에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\overline{A_2H}=\frac{1}{2}$이므로 삼각형 A_2B_1H에서
피타고라스의 정리를 적용하면,
$\overline{B_1H}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.
따라서 $\overline{HC_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{A_2C_2}$이고,
$\overline{A_2B_2}=\frac{1}{2}\times\overline{A_2C_2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$이다.
이때 두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$와 $A_2B_2C_2D_2$는 서로 닮음이고, 닮음비가 $1:\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{3}{16}$이다. 그러므로 수열 S_n의 공비는 $\frac{3}{16}$이다.
$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{3}{16}}=\frac{4\pi}{13}$

19.
함수 $f(x)$는 주기가 4π이므로 그 그래프와 세 점 P, A, Q는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 선분 PQ의 중점이 $A(2\pi,\ 0)$이므로
$\frac{\alpha+\beta}{2}=2\pi$, $\alpha+\beta=4\pi\ \cdots$ ㉠이다. (참)
ㄴ. $\overline{AP}=\overline{AQ}$이므로 삼각형 OPQ의 넓이는 삼각형 OAP의 넓이의 2배이다. 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 OAP의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{PH}=\frac{1}{2}\times2\pi\times\overline{PH}$이다.



이 값이 $\frac{\pi}{2}$가 되려면 $\overline{PH}=\frac{1}{2}$이어야 한다.
$a=1$이므로 $f(x)=\sin\frac{x}{2}$, $f(x)=\frac{1}{2}$을 만족시키는 x의 값은 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5\pi}{3}$이다. ㉠에 의하여 각각의 경우 β의 값은 $\frac{11\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$이다. 따라서 모든 β의 값의 곱은 $\frac{77}{9}\pi^2$이다. (참)
ㄷ. ㄴ에서 알 수 있듯이 삼각형 OPQ의 넓이는 삼각형 OAP의 넓이의 2배이므로 삼각형 OPQ의 넓이의 최댓값이 10이면 삼각형 OAP의 넓이의 최댓값은 5이다.
(삼각형 OAP의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times2\pi\times\overline{PH}=\overline{PH}\times\pi$이므로 이 값이 5일 때
$\overline{PH}=\frac{5}{\pi}$이다. $0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $x=\pi$일 때 최댓값 a를 가지므로 삼각형 OPQ의 넓이의 최댓값이 10이면 $a=\frac{5}{\pi}$이다. (참)

20.
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-N}{x-1}=\sqrt{3}\pi$이고 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로
$\lim_{x\to1}\{f(x)-N\}=\lim_{x\to1}f(x)-N=0$이다.
이때 $\lim_{x\to1}f(x)=a\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+b\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+c$
$=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+c$이므로 $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+c=N\cdots\cdots$ ㉠이다.
한편, 함수 $g(x)$를
$g(x)=a\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)+b\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)+c$라 하면,
$g(1)=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+c\ (=N)$이므로
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-N}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$
$=g'(1)=\sqrt{3}\pi$이다.
함수 $g(x)$를 미분하면,
$g'(x)=\frac{\pi}{6}a\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)-\frac{\pi}{3}b\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$이므로
$g'(1)=\frac{\sqrt{3}\pi}{12}a-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}b=\sqrt{3}\pi$이다.
따라서 $a-2b=12\cdots\cdots$ ㉡이다.
한편, $\lim_{x\to1}\{f(x)-f(1)\}$
$=\lim_{x\to1}f(x)-c$
$=\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+c\right)-c$
$=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\neq0$이므로 ($\because\ a>0,\ b>0$)
$\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right\}=k$에서
$\lim_{x\to1}\{f(x)-f(3)\}=0$이다.
따라서 $\lim_{x\to1}f(x)-f(3)=0$이므로
$f(3)=N\ \Leftrightarrow\ a-b+c=N\cdots\cdots$ ㉢이다.
이때 ㉠, ㉢의 식에서 양변을 각각 빼면,
$-\frac{a}{2}+\frac{3b}{2}=0$이므로 $a=3b$이다. 이를 ㉡의 식에 대입하여 계산하면, $b=12$이고 $a=36$이다.
따라서 $c=N-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=N-24$이고, $c\geq1$이므로
자연수 N의 최솟값은 $p=25$이다. 이때
$\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right\}$
$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-N}{x-1}\times\frac{f(x)-f(1)}{x-3}\right\}$ ($\because\ f(3)=N$)
$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-N}{x-1}\right\}\times\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-3}\right\}$
$=\sqrt{3}\pi\times\frac{\lim_{x\to1}\{f(x)-f(1)\}}{\lim_{x\to1}(x-3)}$
$=\sqrt{3}\pi\times\frac{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}}{-2}=\sqrt{3}\pi\times(-12)=-12\sqrt{3}\pi$이다.
따라서 $q=-12\sqrt{3}\pi$이므로 $pq=-300\sqrt{3}\pi$이다.

21.
$a_1>1$이거나 $a_1<-1$이면
$a_2<a_3<a_4<a_5<\cdots$ 이므로 자연수 n이 커짐에 따라 a_n의 값 또한 커진다. 따라서 2^{a_n}의 값 또한 커지므로 수열 $\{b_{4n-3}\}$이 등차수열이 될 수 없다.
따라서 a_n의 값은 -1 또는 0 또는 1이다.
만약, $a_1=1$이면 $a_2=0$, $a_3=-1$, $a_4=0$, $a_5=-1$, $\cdots$ 로 수열 $\{a_n\}$은 $1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ \cdots$ 로 나열된다.
수열 $\{b_{4n-3}\}$이 등차수열이므로
$b_{13}-b_9=2^{a_9}+2^{a_{10}}+2^{a_{11}}+2^{a_{12}}$에서
$2^{a_9}+2^{a_{10}}+2^{a_{11}}+2^{a_{12}}$의 값과
$b_9-b_5=2^{a_5}+2^{a_6}+2^{a_7}+2^{a_8}$에서 $2^{a_5}+2^{a_6}+2^{a_7}+2^{a_8}$의 값과
$b_5-b_1=2^{a_1}+2^{a_2}+2^{a_3}+2^{a_4}$에서 $2^{a_1}+2^{a_2}+2^{a_3}+2^{a_4}$의 값이 공차로 서로 같아야 한다.
$2^{a_9}+2^{a_{10}}+2^{a_{11}}+2^{a_{12}}=2^{a_5}+2^{a_6}+2^{a_7}+2^{a_8}$
$=2(2^0+2^{-1})=3$이지만
$2^{a_1}+2^{a_2}+2^{a_3}+2^{a_4}=2^1+2^0+2^{-1}+2^0=\frac{9}{2}$이다.
이때 수열 $\{b_{4n-3}\}$의 공차는 3이고, $a_1\neq1$이다.
수열 $\{a_n\}$은 $\cdots$, -1, , 0, -1, 0, -1, $\cdots$ 로 나열되므로 수열 $\{a_n\}$의 초항은 -1 또는 0이다.
$b_2=7$, $b_{11}=\frac{27}{2}$의 조건을 통해 수열 $\{a_n\}$의 초항을 구해 보자.
수열 $\{b_{4n-3}\}$이 공차가 3인 등차수열이므로 세 수열 $\{b_{4n-2}\}$, $\{b_{4n-1}\}$, $\{b_{4n}\}$ 또한 공차가 3인 등차수열을 이룬다. $b_{11}=\frac{27}{2}$이므로 $b_7=\frac{21}{2}$,
$b_3=\frac{15}{2}$이다. $b_2=7$이므로 $b_3=b_2+2^{a_2}$에서
$a_2=-1$이다. 따라서 $a_1=0$이다. 이때
$b_2=b_1+2^{a_1}$에서 $b_1=6$이다. $a_1+a_2+a_3=-1$이고
구하는 값은 $(b_1)^{a_1+a_2+a_3}\times b_3=\frac{1}{6}\times\frac{15}{2}=\frac{5}{4}$이다.

22.
${}_3H_4={}_6C_2=15$이다.

23.
$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-k)=35$이므로 $\sum_{k=1}^{10}2a_k=55+35=90$,
$\sum_{k=1}^{10}a_k=45$이다. $\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$이므로

$\sum_{k=1}^{10} b_k = 42$ 이다. 따라서 답은 177 이다.

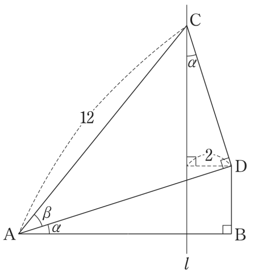
24.
등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 $a_n = a\times r^{n-1}$ 이라 하자.
$a_5 = (a_1)^5 \Leftrightarrow a\times r^4 = a^5$ 에서
$a>0$, $r>0$ 이므로 $a=r$ 이고, $a_n = r^n$ 이다.
이때 $a_2 \times a_4 = (a_3)^2 = 64$ 이므로 $a_3 = 8$ 이다.
즉, $a_3 = r^3 = 8$ 에서 $r=2$ 이므로 $a_n = 2^n$ 이다.
따라서 $a_7 = 2^7 = 128$ 이다.

25.
함수 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+3} & (0<x<1) \\ ax+b & (x \ge 1) \end{cases}$ 이 $x=1$ 에서
미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다. 따라서
$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x)$ 에서 $\frac{1}{2} = a+b$ 이고, $x=1$ 에서
미분가능하므로 $y' = \dfrac{6-2x^2}{(x^2+3)^2}$ 에서 $x=1$ 을 대입하면
$a = \frac{1}{4}$ 이다. 따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{4}$ 이므로
$f(43) = 11$ 이다.

26.
11 개의 구슬을 일렬로 나열할 때, 좌우가 대칭이 되도록 구슬을 나열하면 ○가 적힌 구슬의 개수가 3 (=홀수)이므로 ○가 적힌 구슬이 가운데에 있다.
가운데에 놓인 ○가 적힌 구슬의 왼쪽 5 개의 구슬을 나열하면, 좌우가 대칭이어야 하므로 오른쪽 5 개의 구슬은 나열 순서가 정해진다. 곧, 구하는 경우의 수는 검은 구슬 3 개, 흰 구슬 1 개, ○가 적힌 구슬 1 개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.
그러므로 구하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!} = 5\times 4 = 20$ 이다.

27.
함수 $f(x)$ 의 그래프가 원점을 지나므로
$f(0)=0$, $b=-2^{-a}$ 이다.
곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $x=10$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $f(x)$ 의 역함수 그래프와 직선 $x=6$, x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.
이때 (나)조건에 의하여 $f(4)=6$ 임을 알 수 있다.
즉, $2^{4-a} - 2^{-a} = \frac{15}{2^a} = 6$, $2^a = \frac{5}{2}$ 이다. 따라서
$2^{a+1} = 5$ 이고, $b = -2^{-a} = -\frac{2}{5}$ 이므로 $10b = -4$ 이다.
따라서 답은 9 이다.

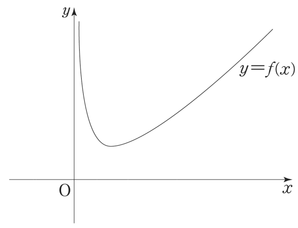
28.
$\overline{AD} = 12\cos\beta$ 이므로 $\overline{AB} = 12\cos\alpha\cos\beta$ 이다.
$\overline{CD} = 12\sin\beta$ 이고 점 D에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle DCH = \alpha$ 이므로
$\overline{DH} = 12\sin\alpha\sin\beta = 2$, $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{6}$ 이다.



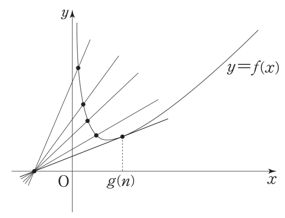
한편, 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로 선분 AC의 중점 M에 대하여
$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{6}{\overline{AB}}$ 이다.
$\cos(\alpha+\beta) = \frac{6}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}-2}{12}$ 에서 $\overline{AB} = x$ 라 하면
$\frac{6}{x} = \frac{x}{12} - \frac{1}{6}$, $x = 1\pm\sqrt{73}$ 에서 $x>0$ 이므로
$\overline{AB} = 1+\sqrt{73}$ 이다.
$\cos(\beta-\alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
$= \frac{1+\sqrt{73}}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3+\sqrt{73}}{12}$
이므로 $p=\frac{1}{4}$, $q=\frac{1}{12}$ 이다.
따라서 답은 16 이다.

29.
조건 (가)를 만족시키는 모든 함수의 개수 => ${}_{13}C_4$
조건 (가), (나)를 만족시키는 함수는
$5 \le f(4)+4 \le f(3)+3 \le f(2)+2 \le f(1)+1 \le 14$ 이므로 $g(k) = f(k)+k$ 라 하면
$5 \le g(4) \le g(3) \le g(2) \le g(1) \le 14$ 를 만족시킨다.
이때, $g(k)$ 는 짝수이므로 가능한 $g(k)$ 는
$6, 8, 10, 12, 14$ 이므로 중복조합의 수를 이용하면 ${}_5H_4$ 이다.
따라서 확률은 $\frac{{}_5H_4}{{}_{13}C_4} = \frac{70}{13\times 11\times 5} = \frac{14}{143}$ 이다.
그러므로 답은 157 이다.
[별해]
조건 (나)를 만족시키는 함수 $f(x)$ 에 대하여
$f(4)$, $f(3)$, $f(2)$, $f(1)$ 은 각각
짝수, 홀수, 짝수, 홀수이므로 $a \le b \le c \le d$ 인 네 자연수 a, b, c, d 에 대하여 $f(4) = 2a$,
$f(3) = 2b+1$, $f(2) = 2c+2$, $f(1) = 2d+3$ 이라 할 수 있다. 이때
$2 \le f(4) < f(3) < f(2) < f(1) \le 13$ 이므로
$1 \le a \le b \le c \le d \le 5$ 이다.
이를 만족시키는 네 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 ${}_5H_4 = {}_8C_4 = 70$ 이다.

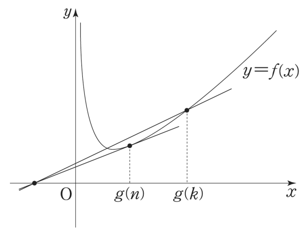
30.
$a>0$, $b>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



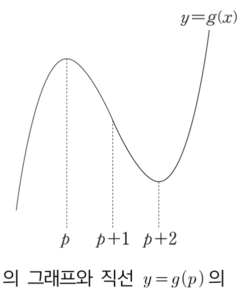
$\frac{f(x)}{x+3}$ 는 두 점 $(-3, 0)$, $(x, f(x))$ 를 지나는 직선의 기울기를 의미하므로 $x=g(n)$ 에서 최솟값을 갖는 경우를 다음과 같이 나타낼 수 있다.



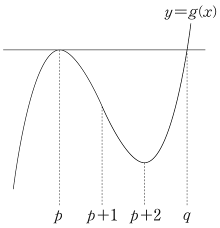
(가) 조건을 살펴 보자.
$\frac{1}{5} \in \left\{ \frac{f(x)}{x+3} \,\middle|\, x \ge g(k) \right\}$ 이므로 만약, 어떤 자연수 k 에 대하여 $g(k)$ 가 다음과 같다면
$\frac{1}{5} \notin \left\{ \frac{f(x)}{x+3} \,\middle|\, x \ge g(k) \right\}$ 이다.



따라서 $g(k) \le g(n)$ 을 만족시키는 모든 k 의 값의 합이 12 가 되도록 하는 n 을 찾아야 한다.
함수 $g(x)$ 의 그래프의 개형을 찾아 보자. 삼차함수의 그래프는 변곡점에 대하여 대칭이고,
$g'(p) = g'(p+2) = 0$ 이므로 변곡점의 x 좌표는 $p+1$ 이라는 것을 알 수 있다. 함수 $g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(p)$ 의 두 교점의 x 좌표를 p, q 라 하면 $g'(p)=0$ 이므로
$g(x) - g(p) = \frac{1}{12}(x-p)^2(x-q)$ 라 할 수 있다.



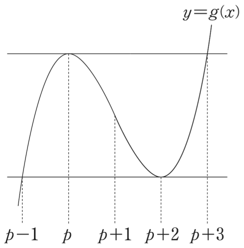
$g(x)-g(p)=\frac{1}{12}(x-p)^2(x-q)$ 의 양변을 미분하면

$g'(x)=\frac{1}{12}(x-p)(3x-p-2q)$ 이다.

$g'(p)=g'(p+2)=0$ 이므로 $p+2=\frac{p+2q}{3}$

$\Leftrightarrow$ $q=p+3$ 이다.

마찬가지로 함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=g(p+2)$의 두 교점 중 x좌표가 $p+2$가 아닌 점은 $(p-1,\ g(p-1))$이다.

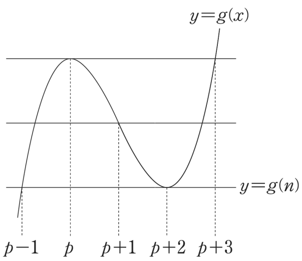


한편, (나) 조건에서 $g(0)=1$이므로 모든 자연수 k에 대하여 $g(k)>0$임을 추측할 수 있으며 모든 자연수 k의 값의 합인 12에 대하여 $\sum_{k=1}^{m}k=12$를 만족시키는 자연수 m은 없으므로 연속된 자연수의 합만으로는 12가 될 수 없다.

따라서 $n\geq p+3$, $n=p$, $n<p-1$일 수 없다.

그렇다면, $n=p-1$, $n=p+1$, $n=p+2$를 고려해 보자. 이때, $g(p-1)=g(p+2)$이므로 다음의 2가지를 고려해 볼 수 있다.

i) $g(n)=g(p-1)=g(p+2)$인 경우



$g(k)\leq g(n)$을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합이 12가 되려면 $\sum_{i=1}^{p-1}i+(p+2)=12$인 자연수 p를 찾음으로써 구할 수 있다.

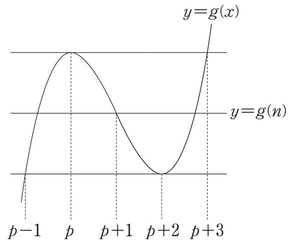
$p=4$일 때, $(1+2+3)+6=12$이고

삼차함수 $g(x)$는 $g(x)=\frac{1}{12}(x-6)^2(x-3)+C_1$이다.

$g(0)=1$이므로 $C_1=10$이다.

이때 $g(n)=g(p+2)=g(6)=10$이다.

ii) $g(n)=g(p+1)$인 경우



$g(k)\leq g(n)$을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합이 12가 되려면 $\sum_{i=1}^{p-1}i+(p+1)+(p+2)=12$인 자연수 p를 찾음으로써 구할 수 있다.

$p=3$일 때, $(1+2)+4+5=12$이고

삼차함수 $g(x)$는 $g(x)=\frac{1}{12}(x-5)^2(x-2)+C_2$이다.

$g(0)=1$이므로 $C_2=\frac{31}{6}$이다.

이때 $g(n)=g(p+1)=g(4)=\frac{16}{3}$이다.

이제 i), ii)의 각각의 경우에 대하여 $f(4)$의 값을 구해 보자.

i)인 경우 함수 $\frac{f(x)}{x+3}$는 $x=10$에서 최솟값 $\frac{1}{5}$을 가지므로

$\frac{f(10)}{13}=\frac{1}{5}$ $\Leftrightarrow$ $f(10)=\frac{13}{5}$, $f'(10)=\frac{1}{5}$이다.

$f(10)=10a+\frac{b}{10}=\frac{13}{5}$, $f'(10)=a-\frac{b}{100}=\frac{1}{5}$

이므로 두 식을 연립하여 a, b의 값을 구하면

$a=\frac{23}{100}$, $b=3$이다. 따라서

$f(4)=4a+\frac{b}{4}=\frac{167}{100}$이다.

ii)인 경우 함수 $\frac{f(x)}{x+3}$는 $x=\frac{16}{3}$에서 최솟값 $\frac{1}{5}$을 가지므로

$\frac{f\left(\frac{16}{3}\right)}{\frac{16}{3}+3}=\frac{1}{5}$ $\Leftrightarrow$ $f\left(\frac{16}{3}\right)=\frac{5}{3}$, $f'\left(\frac{16}{3}\right)=\frac{1}{5}$ 이다.

$f\left(\frac{16}{3}\right)=\frac{16}{3}a+\frac{3}{16}b=\frac{5}{3}$,

$f'\left(\frac{16}{3}\right)=a-\frac{9}{256}b=\frac{1}{5}$ 이므로 두 식을 연립하여 a, b의 값을 구하면

$a=\frac{41}{160}$, $b=\frac{8}{5}$ 이다.

따라서 $f(4)=4a+\frac{b}{4}=\frac{41}{40}+\frac{2}{5}=\frac{57}{40}$ 이다.

그러므로 모든 $f(4)$의 값의 합은

$\frac{167}{100}+\frac{57}{40}=\frac{334}{200}+\frac{285}{200}=\frac{619}{200}$이다.

그러므로 $200s=619$이다