

제 2 교시

수학 영역 (가형)

홀수형

5 지선 다형

1. $\log_2 \frac{1}{8}$ 의 값은? [2점]

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

2. $\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ 의 값은? [2점]

- ① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{3}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2}}{3^n + 2}$ 의 값은? [2점]

- ① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

4. 세 수 $a, \frac{9}{2}, a+4$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

5. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식

$$2\cos^2 x = 3\sin x$$

의 모든 해의 합은? [3점]

- ① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

6. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(A \cup B^c) = \frac{5}{6}$$

일 때, $P(A \cup B)$ 의 값은? (단, B^c 은 B 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

7. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sqrt{n^2 + 6n - 1} < a_n < \sqrt{n^2 + 6n + 5}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - n)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \{\log_{(1+2x)}(1+6x)\}$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 곡선 $x^2 - xy + \sin y = 0$ 위의 점 (π, π) 에서의 접선의 기울기는?

[3점]

- ① $\frac{\pi}{\pi-5}$ ② $\frac{\pi}{\pi-3}$ ③ $\frac{\pi}{\pi-1}$
 ④ $\frac{\pi}{\pi+1}$ ⑤ $\frac{\pi}{\pi+3}$

10. 네 문자 A, B, C, D 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 일렬로 나열할 때, 첫 번째 자리와 마지막 자리의 문자가 서로 같은 경우의 수는? [3점]

- ① 64 ② 80 ③ 96 ④ 112 ⑤ 128

11. 두 양수 a, b 가

$$a^b = b^{\frac{a}{3}}, b = 4a$$

를 만족시킬 때, b 의 값은? [3점]

- ① $2^{\frac{12}{11}}$ ② $2^{\frac{15}{11}}$ ③ $2^{\frac{18}{11}}$ ④ $2^{\frac{21}{11}}$ ⑤ $2^{\frac{24}{11}}$

12. 주머니에 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 두 공에 적혀 있는 두 숫자의 차가 1일 확률은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{7}{18}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

13. $0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식

$$\log_4 \left(\sqrt{3} - 2\cos \frac{x}{2} \right) < \log_4 (2 + \sqrt{6}) - \frac{1}{4}$$

의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, $3\alpha + \beta$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5\pi}{2}$ ② 3π ③ $\frac{7\pi}{2}$ ④ 4π ⑤ $\frac{9\pi}{2}$

14. 함수 $f(x) = \ln|x| + \frac{1}{x}$ 에서 x 의 값이 1 에서 e 까지 변할 때의 평균변화율을 k 라 하자. $f'(c) = k$ 를 만족시키는 모든 상수 c 의 값의 합은? [4점]

- ① $e^2 - 2e$ ② $e^2 - e$ ③ e^2
 ④ $e^2 + e$ ⑤ $e^2 + 2e$

15. 다음은 공차가 2 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 \times {}_8C_0 + a_2 \times {}_8C_1 + a_3 \times {}_8C_2 + \dots + a_9 \times {}_8C_8$$

의 값을 구하는 과정의 일부이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 2 이므로 $a_n = a_1 + 2(n-1)$ 이고
주어진 식의 값을 m 이라 하면

$$\begin{aligned} m &= a_1 \times {}_8C_0 + (a_1 + 2) \times {}_8C_1 + \dots + (a_1 + 16) \times {}_8C_8 \\ &= a_1 \times ({}_8C_0 + {}_8C_1 + \dots + {}_8C_8) \\ &\quad + \boxed{(가)} \times ({}_8C_1 + 2 \times {}_8C_2 + \dots + 8 \times {}_8C_8) \end{aligned}$$

이다. $k \times {}_8C_k = 8 \times {}_7C_{\boxed{(나)}}$ 이므로

$${}_8C_1 + 2 \times {}_8C_2 + \dots + 8 \times {}_8C_8 = \boxed{(다)}$$

이다. 그러므로
:

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q 라 하고, (나)에 알맞은
식을 $f(k)$ 라 할 때, $\frac{q}{f(p) \times f(9-p)}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{64}{3}$ ② $\frac{128}{3}$ ③ $\frac{256}{3}$ ④ $\frac{512}{3}$ ⑤ $\frac{1024}{3}$

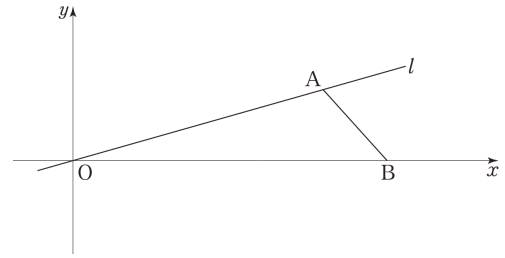
16. 그림과 같이 좌표평면에서 제 1 사분면에 있는 직선

$$l : \sqrt{2}x - 5y = 0$$

위의 점 A 와 x 축 위의 점 B 에 대하여 $\overline{AB} = 2\sqrt{6}$ 이다.

원점 O 에 대하여 세 점 O, A, B 를 지나는 원의 중심 (p, q) 가
직선 $y = -\frac{1}{2}x$ 위에 있을 때, $p \times q$ 의 값은?

(단, 점 B 의 x 좌표는 양수이다.) [4점]



- ① $-\frac{146}{5}$ ② -30 ③ $-\frac{154}{5}$
④ $-\frac{158}{5}$ ⑤ $-\frac{162}{5}$

17. $a_1 \neq 0$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

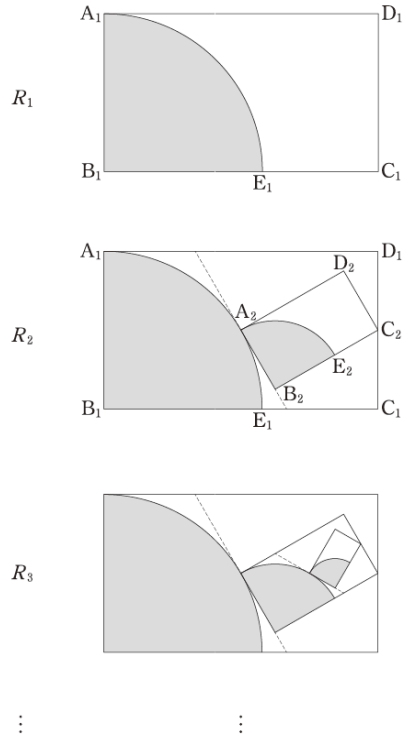
$$\frac{a_n}{S_n} = \frac{1}{3}n^2 + c$$

일 때, $\sum_{n=2}^{10} \frac{S_{n-1}}{S_n}$ 의 값은? (단, c 는 상수이다.) [4점]

- ① -125 ② -121 ③ -117
 ④ -113 ⑤ -109

18. 그림과 같이 $\overline{A_1D_1} = \sqrt{3}$, $\overline{A_1B_1} = 1$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에서 선분 B_1C_1 위의 점 E_1 을 $\overline{B_1E_1} = 1$ 이 되도록 잡는다. 중심이 B_1 , 반지름의 길이가 $\overline{A_1B_1}$ 이고 중심각의 크기가 90° 인 부채꼴 $A_1B_1E_1$ 을 그리고, 부채꼴 $A_1B_1E_1$ 에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 선분 C_1D_1 의 중점을 C_2 라 하자. 호 A_1E_1 위의 점 A_2 에서의 접선 위의 점 B_2 와 $\angle D_1C_2D_2 = 30^\circ$ 인 점 D_2 를 사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 가 두 선분 A_2D_2 , A_2B_2 의 길이의 비가 $\sqrt{3} : 1$ 인 직사각형이 되도록 잡는다. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 을 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에서 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 부채꼴 $A_2B_2E_2$ 에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{3\pi}{13}$ ② $\frac{4\pi}{15}$ ③ $\frac{4\pi}{13}$ ④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{5\pi}{13}$

19. 양의 실수 a 에 대하여 정의역이 $\{x \mid 0 < x < 4\pi\}$ 인 함수

$f(x) = a \sin \frac{x}{2}$ 가 있다. 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축의 교점을 A라 하자.

곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점

$$P(\alpha, f(\alpha)), Q(\beta, f(\beta))$$

에 대하여 세 점 P, A, Q가 한 직선 위에 있을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha < \beta$ 이고, 0는 원점이다.) [4점]

<보 기>

- ㄱ. $\alpha + \beta = 4\pi$
- ㄴ. $a = 1$ 일 때, 삼각형 OPQ의 넓이가 π 가 되도록 하는 모든 β 의 값의 곱은 $\frac{77}{9}\pi^2$ 이다.
- ㄷ. 삼각형 OPQ의 넓이의 최댓값이 10이면 $a = \frac{5}{\pi}$ 이다.

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 세 자연수 a, b, c 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} a \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + b \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + c & (x \neq 1) \\ c & (x = 1) \end{cases}$$

가 있다. 자연수 N 과 상수 k 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - N}{x - 1} = \sqrt{3}\pi, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \right\} = k$$

를 만족시키는 N 의 최솟값은 p 이고 이때 $k = q$ 이다. $p \times q$ 의 값은? [4점]

- ① $-330\sqrt{3}\pi$
- ② $-300\sqrt{3}\pi$
- ③ $-270\sqrt{3}\pi$
- ④ $-240\sqrt{3}\pi$
- ⑤ $-210\sqrt{3}\pi$

21. 모든 항이 정수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = (a_n)^2 - 1$$

을 만족시키고, 수열 $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$b_{n+1} = b_n + 2^{a_n}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{b_{4n-3}\}$ 이 등차수열이고, $b_2 = 7$, $b_{11} = \frac{27}{2}$ 일

때, $(b_1)^{a_1+a_2+a_3} \times b_3$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ 2 ⑤ $\frac{3}{2}$

단답형

22. ${}_3H_4$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k - k) = 35, \quad \sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) = 3$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} (3a_k + b_k)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_5 = (a_1)^5, \quad a_2 \times a_4 = 64$$

일 때, a_7 의 값을 구하시오. [3점]

25. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+3} & (0 < x < 1) \\ ax+b & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 $x=1$ 에서 미분가능할 때, $f(43)$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 상수이다.) [3점]

26. 모양과 크기가 같은 검은 구슬 6개, 흰 구슬 2개, \bigcirc 가 적힌 구슬 3개가 있다. 이 11개의 구슬을 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 아래 [그림]처럼 좌우가 대칭이 되도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

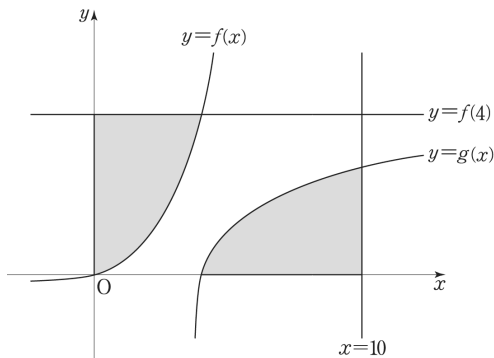


[그림]

27. 두 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = 2^{x-a} + b$ 가 있다.
 함수 $y = f(x)$ 의 역함수의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼
 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y = g(x)$ 라 하자.
 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $f(x)$ 의 그래프는 원점을 지난다.
 (나) 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = f(4)$ 및 y 축으로 둘러싸인
 부분의 넓이와 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $x = 10$ 및 x 축으로
 둘러싸인 부분의 넓이는 같다.

$2^{a+1} - 10b$ 의 값을 구하시오. [4점]



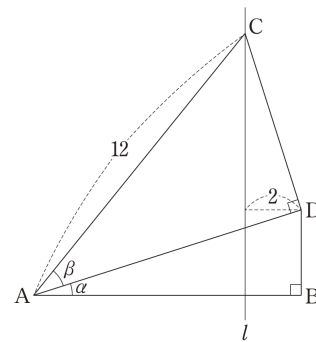
28. 그림과 같이 $\overline{AC} = 12$, $\overline{BA} = \overline{BC}$ 인 삼각형 ABC 의 외부의
 점 D 에 대하여

$$\angle ABD = \angle ADC = \frac{\pi}{2}$$

이고, 점 C 를 지나고 직선 BD 와 평행한 직선을 l 이라 할 때,
 점 D 와 직선 l 사이의 거리는 2이다. $\angle BAD = \alpha$, $\angle CAD = \beta$ 라
 할 때,

$$\cos(\beta - \alpha) = p + q\sqrt{73}$$

이다. $48(p+q)$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.) [4점]



29. 두 집합

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$$

이 있다. 조건 (가)를 만족시키는 모든 함수 $f: X \rightarrow Y$ 중에서 임의로 선택한 하나의 함수가 조건 (나)를 만족시킬 확률은

$\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인

자연수이다.) [4점]

(가) $f(4) < f(3) < f(2) < f(1)$

(나) 4 이하의 모든 자연수 k 에 대하여 $f(k)+k$ 는 짝수이다.

30. 두 양의 실수 a, b 에 대하여 $x > 0$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = ax + \frac{b}{x}$$

이다. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{12}$ 이고

$$g'(p) = g'(p+2) = 0 \quad (p \text{는 자연수})$$

인 어떤 삼차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 $f(4)$ 의 값의 합은 s 이다. $200s$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가) 자연수 n 에 대하여 함수 $\frac{f(x)}{x+3}$ 는 $x=g(n)$ 에서

최솟값 $\frac{1}{5}$ 을 갖고, $\frac{1}{5} \in \left\{ \frac{f(x)}{x+3} \mid x \geq g(k) \right\}$ 를 만족시키는

모든 자연수 k 의 값의 합은 12이다.

(나) $g(0) = 1$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인 하시오.