* 2018년 4월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 나형 29번.

$U = \{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$, U의 세 부분집합 S_1, S_2, S_3.

$n(S_1) \geq 3$, $S_1 \subset S_2 \subset S_3$. 모든 순서쌍 (S_1, S_2, S_3)의 개수는?

if $\begin{cases} S_1 = \{1, 2, 3\},\ S_2 = \{1, 2, 3, 4\},\ S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \text{만족.} \\ S_1 = \{1, 2, 3\},\ S_2 = \{3, 4, 5, 6\},\ S_3 = \{6, 7, 8, 9, 10\} \rightarrow \text{불만족.} \end{cases}$

(i) $n(S_1) = 3$ $({}_{10}C_3) \rightarrow n(S_2) = 3,\ n(S_3) = 3 \sim 8$. $\therefore {}_{10}C_3 \times {}_7C_0 \times ({}_7C_0 + {}_7C_1 + {}_7C_2 + \cdots + {}_7C_7)$

$= {}_{10}C_3 \times {}_7C_0 \times 2^7$.

$\rightarrow n(S_2) = 4,\ n(S_3) = 4 \sim 8$.

$\rightarrow {}_{10}C_3 \times {}_7C_1 \times 2^6$.

따라서 $n(S_1) = 3$일 때

$${}_{10}C_3 \times ({}_7C_0 \cdot 2^7 + {}_7C_1 \cdot 2^6 + {}_7C_2 \cdot 2^5 + \cdots + {}_7C_7 \cdot 2^0) = {}_{10}C_3 \times \sum_{k=0}^{7} {}_7C_k \cdot 1 \cdot 2^{7-k} = {}_{10}C_3 \cdot 3^7.$$

$\therefore$ 모든 순서쌍의 개수는 ${}_{10}C_3 \cdot 3^7 + {}_{10}C_4 \cdot 3^6 + {}_{10}C_5 \cdot 3^5 + \cdots + {}_{10}C_{10} \cdot 3^0$

$$= \sum_{k=3}^{10} {}_{10}C_k \cdot 1 \cdot 3^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} - \sum_{k=0}^{2} = 4^{10} - ({}_{10}C_0 \cdot 3^{10} + {}_{10}C_1 \cdot 3^9 + {}_{10}C_2 \cdot 3^8) \rightarrow (\text{가})$$

$$= 4^{10} - (3^{10} + 10 \cdot 3^9 + 45 \cdot 3^8) = 4^{10} - 3^8(9 + 30 + 45) = 4^{10} - 84 \cdot 3^8. \rightarrow (\text{나}).$$

* 이항정리에서 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot b^k \cdot a^{n-k}$ (단, k는 정수) 와

$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot b^k \cdot a^{n-k} = (a+b)^n$ 은 같은 식이다.

(순방향 뿐만 아니고 역방향도 기억해야 한다)