* 2020년 3월 (4월 시행) 교육청 모의고사 고3수학 가형 30번.

$f(x)=4x^3+\cdots$, 실수 t, $g(x)=\int_t^x f(s)\,ds$

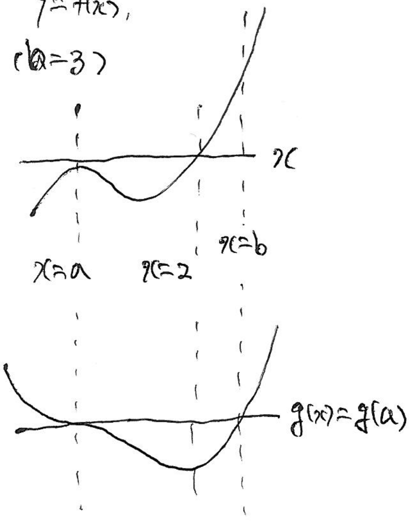
(가) $f(a)=0$, a는 상수.

(나) 함수 $|g(x)-g(a)|$의 미분불가능 한 곳.

→ $g(x)$는 사차함수고, 방정식 $g(x)=g(a)$는 삼중근의 형태를 띤다. 또한 $f(x)$ 역시 극대, 극소 존재

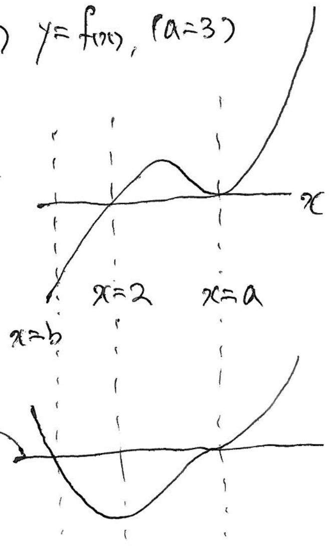
→ 실수 t에 대하여 $g(a)=h(t)$, $h(3)=0$, $h(t)$는 $t=2$일 때 $Max=27$.

(i) $y=f(x)$, $(b=3)$



$y=g(x)$, $(a<2<b)$.

(ii) $y=f(x)$, $(a=3)$



$y=g(x)$, $(b<2<a)$.

(i) $b=3$

$f(x)=4(x-a)^2(x-2)$

$=4(x^2-2ax+a^2)(x-2)$

$=4(x^3-2(1+a)x^2+(4a+a^2)x-2a^2)$

$=4x^3-8(1+a)x^2+(16a+4a^2)x-8a^2$

(ii) $a=3$

$f(x)=4(x-2)(x-3)^2$

$=4(x-2)(x^2-6x+9)$

$=4(x^3-8x^2+21x-18)$

$=4x^3-32x^2+84x-72$.

(i), (ii) 모두 $\int_2^3 = 27$.

(i)에서 $\left[x^4-\frac{8(1+a)}{3}x^3+(8a+2a^2)x^2-8a^2x\right]_2^3$

$=(81-72-72a+72a+18a^2-24a^2)-(16-\frac{64}{3}-\frac{64}{3}a+32a+8a^2-16a^2)=2a^2-\frac{32}{3}a+\frac{43}{3}=27$.

$\therefore 6a^2-32a-38=0$ 에서 $3a^2-16a-19=(3a-19)(a+1)=0$.

$\therefore a=-1$ $(a<2)$. 따라서 $f(x)=4(x+1)^2(x-2)$, $f(5)=4\times36\times3=12\times36=432$

(ii)에서 $\left[x^4-\frac{32}{3}x^3+42x^2-72x\right]_2^3$

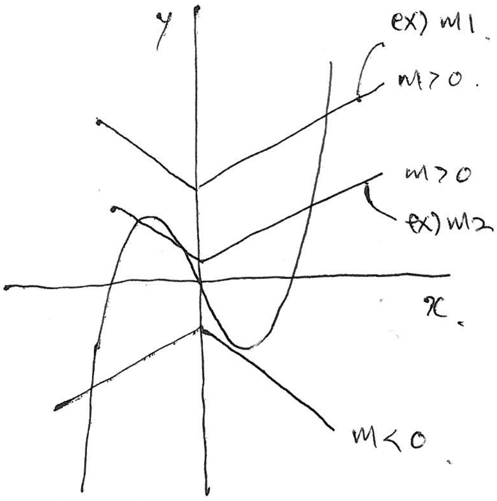
$=(81-288+378-216)-(16-\frac{256}{3}+168-144)=27$. (불가)

($\because$ $\frac{256}{3}$은 정수가 아닌 (약분X) 유리수. $\therefore$ 계산결과가 27이라는 정수로 나올 수 없다.

* 2020년3월 (4월시행) 교육청 모의고사 고3수학 가형 21번.

$m\neq0$, $f(x)=2x^3-8x$, $g(x)=\begin{cases}-\frac{47}{m}x+\frac{4}{m^3} & (x<0)\\ 2mx+\frac{4}{m^3} & (x\geq0)\end{cases}$. $g(x)$는 직선의 형태

$f'(x)=6x^2-8$. (m>0) V, (m<0) Λ

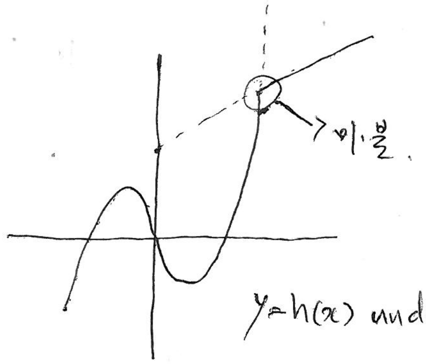


→ $m=m_1$.

$(m_1<m_2)$.

↓

m↑→y절편↑.



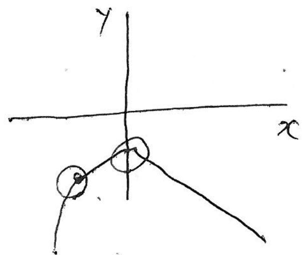
$y=h(x)$ under $m=m_1$.

$h(x)=\min[f(x),\ g(x)]$.

ㄱ. $m=-1$일 때, $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-4=-\frac{7}{2}$. $g(\frac{1}{2})=-1-4=-5$. $\therefore h(\frac{1}{2})=-5$ True.

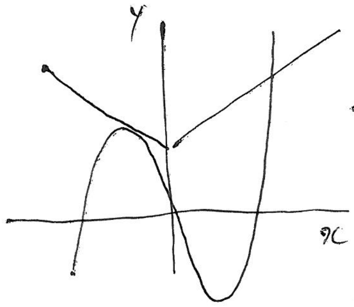
ㄴ. $m=-1$이면 $g(x)$의 y절편은 -4, $f(x)$의 극솟값 $f(\frac{2}{\sqrt{3}})=-\frac{8}{3\sqrt{3}}\fallingdotseq-1.54$.

$x>0$ 일 때 $g(x)$는 감소함수. → 만날 일이 없다 ($x>0$, 교점 X) →

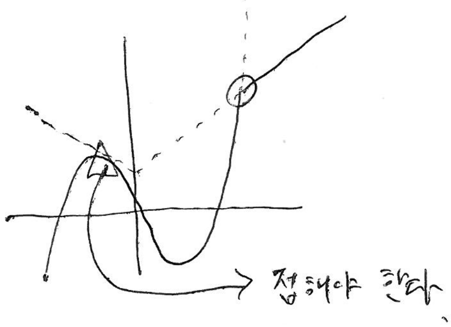


$y=h(x)$
$(m=-1)$.
미분불가 2곳 (O)
→ True.

ㄷ. $h(x)$가 미분불가인 곳이 하나인 양수 m



→



접점의 x좌표를 $t\ (t<0)$라 하면 ① $(t,\ 2t^3-8t)=(t,\ -\frac{47}{m}t+\frac{4}{m^3})$

② $6t^2-8=-\frac{47}{m}$. $\therefore$ ①에서 $2t^3-8t=6t^3-8t+\frac{4}{m^3}$. → $t^3+\frac{1}{m^3}=0$. $\therefore t=-\frac{1}{m}$

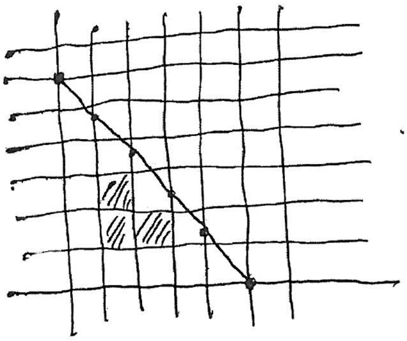
$\therefore$ ②에서 $6t^2-8=47t$. $6t^2-47t-8=(6t+1)(t-8)=0$. $\therefore t=-\frac{1}{6}\ (t<0)$. $\therefore m=6$.

True

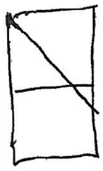
* 2020년 3월 (4월시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 29번.

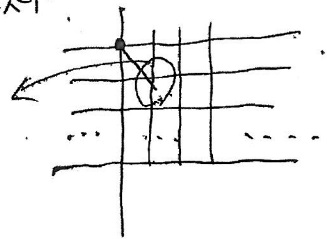
O(0,0), A(0, n+5), B(n+4, 0), 삼각형 AOB의 내부에서 꼭짓점의 좌표가 모두 자연수인 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수 $= a_n$.

ex) $n=1$.



$a_1=3$, 내용상 n이 1 추가될 때 * 기준으로 하는 칸에서 2개 이상이 추가될 수가 없다.





$\therefore a_1=3,\ a_2=6,\ a_3=10,\ a_4=15,\ a_5=21,\ a_6=28,\ a_7=36,\ a_8=45.$

(1) 모두 더한다. → 164

(2) H공식 활용 → ${}_9H_3-1={}_{11}C_3-1=\frac{11\cdot 10\cdot 9}{3\cdot 2}-1=165-1=164$

(3) 계차수열 활용.

$b_k=k+2.\quad \therefore a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)=3+\frac{n^2-n}{2}+2n-2=\frac{n^2+3n+2}{2}.$

$\therefore \sum_{k=1}^{8}\left(\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\times\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6}+\frac{3}{2}\times\frac{8\cdot 9}{2}+8=102+54+8=164$

* 2020년 3월 (4월시행) 교육청 모의고사 고3 수학 나형 21번.

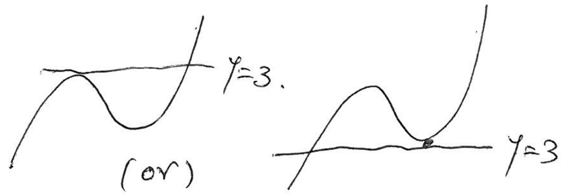
이차함수 $g(x) = x^2-6x+10 = (x-3)^2+1$. 삼차함수 $f(x)$.

(가) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근.

(나) 함수 $g \circ f(x)$의 최솟값 m → $m=1$. ⇒ 방정식 $g(f(x))=1$의 서로 다른 실근 2개.

→ 합성함수의 기본개형은 겉함수의 개형을 따라간다.

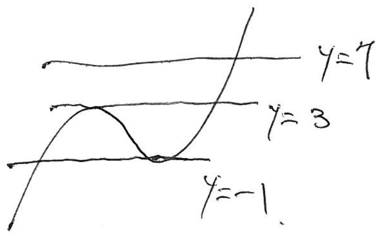
$g(f(x))=1$ 에서 $f(x)=3$인 서로 다른 실근이 2개. ∴



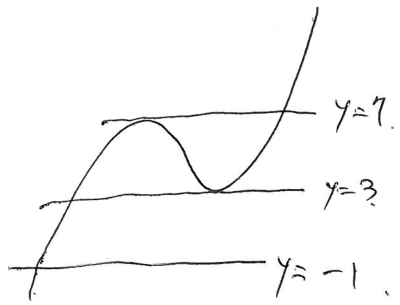
(다) 방정식 $g(f(x))=17$은 서로 다른 실근 3개.

∴ $f(x)=-1$ or 7.

(i)



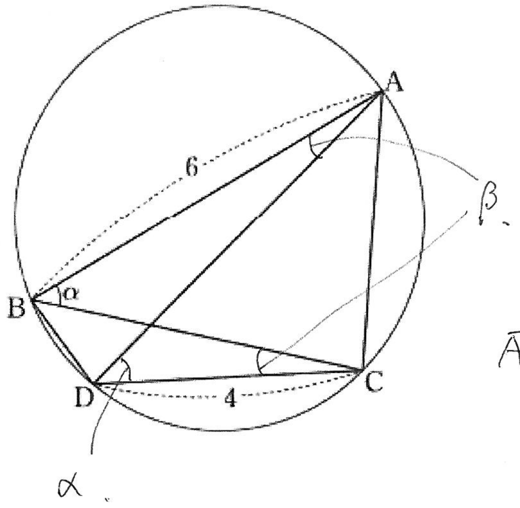
(ii)



→ $y=f(x)$와 $y=0$ (x축)과의 서로 다른 교점은 1개. → 조건 (가)에 위배.

따라서 문제에서 주어진 조건을 만족하는 개형은 (i) 개형이므로 이 때 $y=f(x)$의 극댓값 (3)과 극솟값 (-1)의 합은 $3+(-1)=2$ //

* 2020년 3월 (4월시행) 교육청 모의고사 고3수학 나형29번.



$\angle ABC = \alpha$ 이면 $\angle ADC = \alpha$ (동일 원주각)

$\angle BAD = \angle BCD = \beta$라 하면

$\cos\alpha = \frac{3}{4}$ 에서 $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. $\triangle ABD : \triangle CBD = 9:5$.

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\cos\alpha$ ($\triangle ABC$) … ①

$= \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{DC}\cdot\cos\alpha$ ($\triangle ADC$). … ②

→ $\overline{AD}$와 $\overline{BC}$의 관계식 필요.

$\triangle ABD = \frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin\beta : \triangle CBD = \frac{1}{2}\times\overline{DC}\times\overline{BC}\times\sin\beta = 6\overline{AD} : 4\overline{DC} = 9:5$.

$\therefore \overline{AD} = \frac{36}{30}\overline{BC} = \frac{6}{5}\overline{BC}$. ①' $\overline{AC}^2 = 36 + \overline{BC}^2 - 9\overline{BC}$

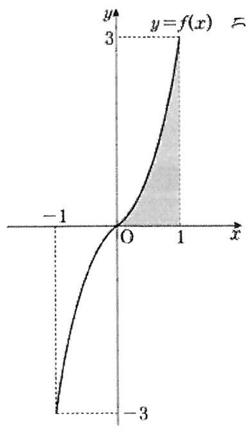
②' $\overline{AC}^2 = \frac{36}{25}\overline{BC}^2 + 16 - \frac{36}{5}\overline{BC}$.

$\therefore \frac{11}{25}\overline{BC}^2 + \frac{9}{5}\overline{BC} - 20 = 0$ 에서 $11\overline{BC}^2 + 45\overline{BC} - 500 = 0$. → $\therefore \overline{BC} = 5$ ($\overline{BC} > 0$. $\therefore \overline{BC} \neq -\frac{100}{11}$)

$S = \triangle ADC = \frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{DC}\times\sin\alpha = \frac{1}{2}\times6\times4\times\frac{\sqrt{7}}{4}$ ($\because \overline{BC}=5$이면 $\overline{AD}=6$).

$\therefore S^2 = (3\sqrt{7})^2 = 9\times7 = 63$

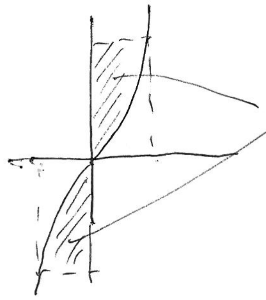
* 2020년 3월 (4월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 나형 30번.



$y=f(x) = g(x)$ with respect to $[-1, 1]$.

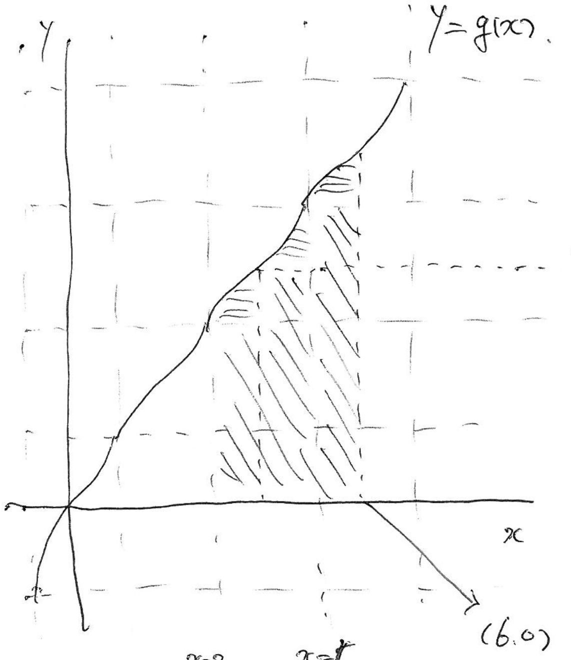
(나) 닫힌구간 $[2n-1, 2n+1]$에서 $g(x)$는 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 $2n$, y축의 방향으로 $6n$ 만큼 평행이동한 그래프. (n은 자연수)

$f(1)=3$, $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$. $\longrightarrow$



넓이는 각각 2.

(나) 조건에 의해.



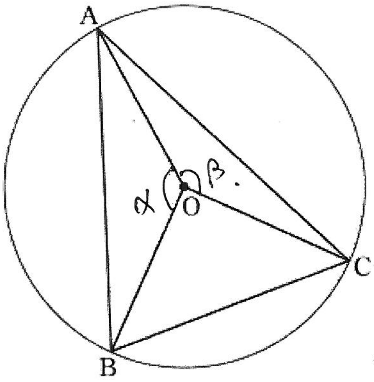
$$\Rightarrow \int_3^6 g(x)\,dx = \boxed{\equiv} + \boxed{\diagdown}$$

$$\boxed{\equiv} = 2+1+2 = 5$$

$$\boxed{\diagdown} = 1\times 9 + 1\times 12 + 1\times 15 = 36$$

$$\therefore \int_3^6 g(x)\,dx = 41$$

* 2020년 3월 (4월시행) 교육청 모의고사 고3수학 가형 19번.



$r = \overline{AO} = \sqrt{10} = \overline{BO} = \overline{CO}$.

$\overline{BC} = 2\sqrt{5}$. $\therefore \angle BOC = \frac{\pi}{2}$,

$\angle AOB = \alpha$, $\angle AOC = \beta$ 라 하면 $\alpha + \beta = \frac{3}{2}\pi$.

$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{10} \times \sin\alpha = S_1$.

$\triangle OCA = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{10} \times \sin\beta = S_2$.

$3S_1 = \frac{3}{2} \times 10 \times \sin\alpha = 4S_2 = \frac{4}{2} \times 10 \times \sin\beta$. $\therefore \sin\alpha = \frac{4}{3}\sin\beta$.

$= \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \beta\right) = -\cos\beta$.

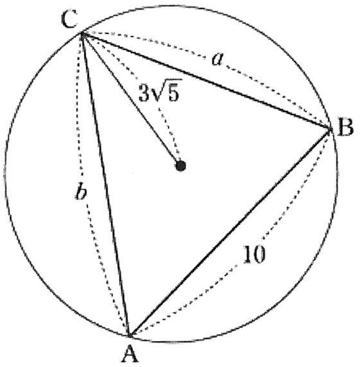
$\therefore \sin\beta = \frac{3}{4}\sin\alpha$, $\cos\beta = -\sin\alpha$.

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = \frac{25}{16}\sin^2\alpha = 1$. $\therefore \sin\alpha = \frac{4}{5}$. $\therefore \sin\beta = \frac{3}{5}$. $\cos\alpha = \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \beta\right) = -\sin\beta$.

$\therefore$ $\triangle OAB$ 에서 제2코사인 법칙을 적용하면 $\overline{AB}^2 = 10 + 10 - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 32$.

$\therefore \overline{AB} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ //

* 2020년 3월 (4월 시행) 교육청 모의고사 고3수학 나형 19번.



제2코사인 법칙에 의해 $a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos C=100$.

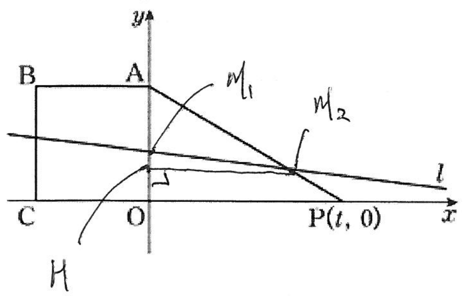
$\therefore \dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{100+ab\cos C}{ab}=\dfrac{100}{ab}+\cos C=\dfrac{4}{3}$.

$\dfrac{10}{\sin C}=2R=6\sqrt{5}$ 에서 $\sin C=\dfrac{10}{6\sqrt{5}}=\dfrac{10\sqrt{5}}{30}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

$\therefore \cos C=\dfrac{2}{3}$ ($\because$ 삼각형 ABC는 예각삼각형)

$\therefore \dfrac{100}{ab}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$.　　$\therefore ab=150$ //

* 2020년 3월 (4월시행) 교육청 모의고사 고3수학 가형 20번.



문제 내용상 (이등분) 직선 l은 $(-1, 1)$을 지나야 한다. 직선 l의 기울기를 $-m$ $(0<m<1)$ 이라 하면

$l: y_1 = -mx+1-m$ $(0<m<1)$, $\quad f(t)=1-m$.

→ m을 t에 대한 식으로 나타내라는 말.

직선 l: $y_1 = -mx+1-m$ $(0<m<1)$

직선 $\overline{AP}$: $y_2 = -\frac{2}{t}x+2$ $(t>0)$

교점 M_2의 좌표는 $\left(\frac{2}{t}-m\right)x = 1+m$ 에서

$x = \frac{t(1+m)}{2-tm}$, $y = \frac{-2(1+m)+4-2tm}{2-tm} = \frac{2-2m-2tm}{2-tm}$

$\triangle AOP = \frac{1}{2}\times 2\times t = t$ 이므로 $\triangle AM_1M_2 = \square M_1OPM_2 = \frac{t}{2}$.

$\frac{1}{2}\times\overline{AM_1}\times\overline{HM_2} = \cancel{\frac{1}{2}}\times(1+m)\times\frac{\cancel{t}(1+m)}{2-tm} = \frac{\cancel{t}}{\cancel{2}}$ 에서 $(1+m)^2 = 2-tm$.

$\therefore m^2+(2+t)m-1=0$ 에서 $m = \frac{-(2+t)+\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$ $(\because 0<m<1)$

$\lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{t\to 0+}(1-m) = \lim_{t\to 0+}\left(1+\frac{(2+t)-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}\right) = 1+1-\frac{\sqrt{8}}{2} = 2-\sqrt{2}$ //

→ 교육청 해설은 m을 음수로 놓고 기울기 (직선 l의) 를 m으로 놓은 경우의 해설.

* 2020년 3월 (4월시행) 교육청 모의고사 고3수학 나형 20번.

$f(x)=x^3+\cdots$, $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt+f(x)$ (정적분으로 정의, 단, 실수 전체에 대하여 성립한다는 말은 없다).

(가) $g(0)=0$, $g'(0)=0$.

$\rightarrow g(0)=f(0)=0$, $g'(0)=f(0)+f'(0)=f'(0)=0$.

(실수 전체에 대하여 $g(x)$ 식이 성립하는 경우라면 (가)조건 없이 $g(0)=f(0)$ 도출 가능)

(나) $g'(x)=-g'(-x)$. $\rightarrow f(x)+f'(x)=-f(-x)-f'(-x)$

$f(x)=x^3+px^2$ ($\because f'(0)=0$). $f'(x)=3x^2+2px$.

$\cancel{x^3}+px^2+3x^2+\cancel{2px}=\cancel{x^3}-px^2-3x^2+\cancel{2px}$.

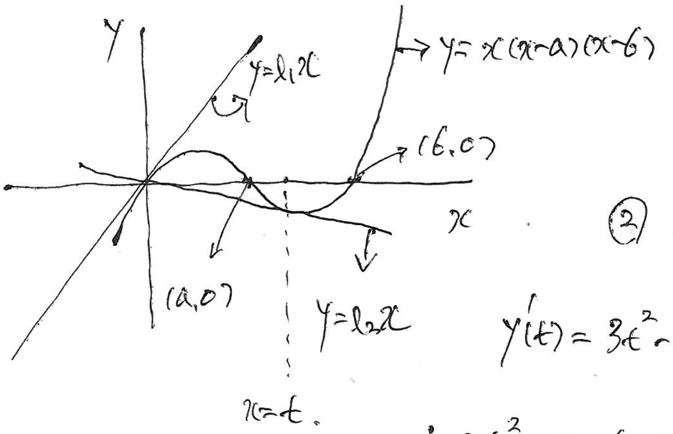
$\therefore 2px^2+6x^2=0$ 에서 $p=-3$. $\therefore f(x)=x^3-3x^2$. $\therefore f(2)=8-12=-4$ //.

→ 과조건에 대한 논란이 있을 수 있는 문제임. 실수 전체에 대하여 성립한다는 표현을 추가하고 (가)조건을 약간 변형시키는 것이 더 좋은 모양새로 판단.

* 2020년 3월 (4월시행) 교육청 모의고사 고3수학 가형 17번.

$0<a<6$. 실수 a. $y=x(x-a)(x-6)=(x^2-6x)(x-a)=x^3-(a+6)x^2+6ax$

원점에서 그은 두 접선의 기울기의 곱의 min?



$y'=3x^2-2(a+6)x+6a$.

① $l_1=y'(0)=6a$.

② $a<t<6$, 접점의 x좌표를 t라 하면,

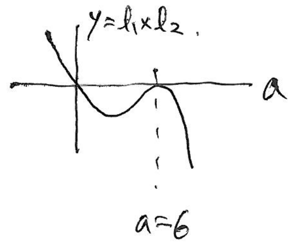
$y'(t)=3t^2-2(a+6)t+6a=\dfrac{t^3-(a+6)t^2+6at}{t-0}=t^2-(a+6)t+6a$

$\therefore 2t^2-(a+6)t=t(2t-(a+6))=0$ 에서

$t=0$ or $\dfrac{a+6}{2}$.. $\therefore t=\dfrac{a+6}{2}$ $(a<t<6)$.

$\therefore l_2=y'\left(\dfrac{a+6}{2}\right)=\dfrac{3(a+6)^2}{4}-(a+6)^2+6a=-\dfrac{1}{4}(a+6)^2+6a=-\dfrac{1}{4}(a^2-12a+36)=-\dfrac{1}{4}(a-6)^2$.

$\therefore l_1\times l_2=6a\times\left(-\dfrac{1}{4}(a-6)^2\right)=-\dfrac{3}{2}a(a-6)^2$ →



$\{l_1\times l_2\}'=\left\{-\dfrac{3}{2}a^3+18a^2-54a\right\}'$

$=-\dfrac{9}{2}a^2+36a-54=-\dfrac{9}{2}(a^2-8a+12)=-\dfrac{9}{2}(a-2)(a-6)$.

$\therefore l_1\times l_2$ 의 min 은 $l_1\times l_2|_{a=2}=-\dfrac{3}{2}\times 2\times(-4)^2=(-3)\times 16=-48$ //

* 2020년 3월 (4월시행) 교육청 모의고사 고3수학 가형 16번.

$f(x) = x^3 - 4x\int_0^1 |f(t)|dt$. $\int_0^1 |f(t)|dt = a$ (상수) 라 하면 $a > 0$

$f(1) = 1 - 4a > 0$. $\therefore 0 < a < \frac{1}{4}$.

(다항함수 형태가 주어지지 않았다면 상수함수의 가능성 때문에 $a \geq 0$, 상수함수 ⊂ 다항함수)

$f(x) = x^3 - 4ax = x(x+2\sqrt{a})(x-2\sqrt{a})$

$\therefore \int_0^1 |f(t)|dt = \int_0^{2\sqrt{a}} -f(t)dt + \int_{2\sqrt{a}}^1 f(t)dt = \left[-\frac{1}{4}t^4 + 2at^2\right]_0^{2\sqrt{a}} + \left[\frac{1}{4}t^4 - 2at^2\right]_{2\sqrt{a}}^1$

$= (-4a^2 + 8a^2) - 0 + (\frac{1}{4} - 2a) - (4a^2 - 8a^2) = \frac{1}{4} - 2a + 8a^2 = \int_0^1 |f(t)|dt = a$.

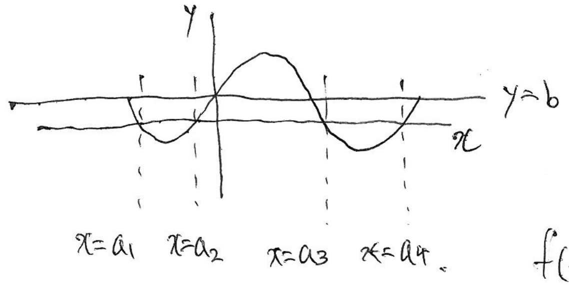
$\therefore 8a^2 - 3a + \frac{1}{4} = 8(a^2 - \frac{3}{8}a + \frac{1}{64}) = \frac{1}{4}(32a^2 - 12a + 1) = \frac{1}{4}(8a-1)(4a-1) = 0$.

$\therefore a = \frac{1}{8}$ ($\because 0 < a < \frac{1}{4}$). $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$. $f(2) = 8 - 1 = 7$

* 2020년 3월 (4월시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 28번.

$0 < a < \frac{4}{7}$, 유리수 b. 정의역 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$, $f(x) = 2\sin(ax) + b \rightarrow$ 주기 $\frac{2}{a}\pi$.

∴ 정의역은 한 주기 반에 해당.



$\rightarrow a_3 = a_1 + \frac{2}{a}\pi$, $a_4 = a_2 + \frac{2}{a}\pi$, $a_1 + a_2 = -\frac{\pi}{a}$.

$f(-\frac{\pi}{2}) = 0$, $f(\frac{7}{2}\pi) = 0$. $\therefore -\frac{\pi}{2} = a_1$ or a_2, $\frac{7}{2}\pi = a_3$ or a_4.

(i) $a_1 + a_3 = 2a_1 + \frac{2}{a}\pi = -\pi + \frac{2\pi}{a}$ $(a_1 = -\frac{\pi}{2}, a_3 = \frac{7}{2}\pi)$ $\therefore 3\pi = -\pi + \frac{2\pi}{a}$ $\therefore a = \frac{1}{2}$.

(ii) $a_2 + a_4$ 인 경우 (i)과 마찬가지로 한 주기가 된다. $(a_2 = -\frac{\pi}{2}, a_4 = \frac{7}{2}\pi)$.

(iii) $a_1 = -\frac{\pi}{2}$, $a_4 = \frac{7}{2}\pi$ 라면 $3\pi = a_1 + a_2 + \frac{2\pi}{a} = \frac{\pi}{a}$. $\therefore a = \frac{1}{3}$.

(iv) $a_2 = -\frac{\pi}{2}$, $a_3 = \frac{7}{2}\pi$, (iii)과 마찬가지.

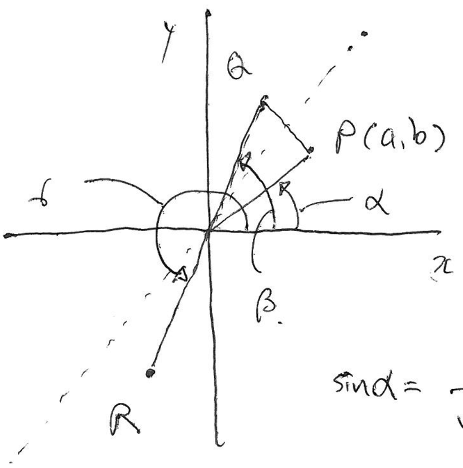
$\rightarrow a = \frac{1}{2}$ 이라면 $f(\frac{7}{2}\pi) = 0$ 에서 $2\sin(\frac{1}{2} \times \frac{7}{2}\pi) + b = 2\sin(2\pi - \frac{\pi}{4}) + b = -\frac{\sqrt{2}}{2} + b = 0$.

b는 유리수.

$\rightarrow a = \frac{1}{3}$ 이라면 $f(\frac{7}{2}\pi) = 0$ 에서 $2\sin(\frac{1}{3} \times \frac{7}{2}\pi) + b = 2\sin(\pi + \frac{\pi}{6}) + b = -1 + b = 0$.

$\therefore a = \frac{1}{3}$, $b = 1$. $30(a+b) = 30 \times \frac{4}{3} = 40$ //

* 2020년 3월 (4월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 26번.



$\sin\alpha = \frac{1}{3}$. $\therefore 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

점 P를 $P(a, b)$라 하면, $a > b > 0$ 이고 ($\because$ 제1사분면)

$Q(b, a)$, $R(-b, -a)$, $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR} = \sqrt{a^2+b^2}$.

$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{3}$. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$. $\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{3}$. $\therefore \sin\beta = \frac{\sqrt{8}}{3}$.

$\tan\gamma = \tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \sqrt{8}$. $\therefore 9\times(\sin^2\beta + \tan^2\gamma) = 9\times\left(\frac{8}{9}+8\right) = 9\times\frac{80}{9} = 80$ //

$\rightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha+\gamma = \frac{3}{2}\pi$. → 각변환을 사용하는 경우.

$\therefore \sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$. 삼각함수의 정의 활용

$\sin\gamma = \sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\cos\alpha$.

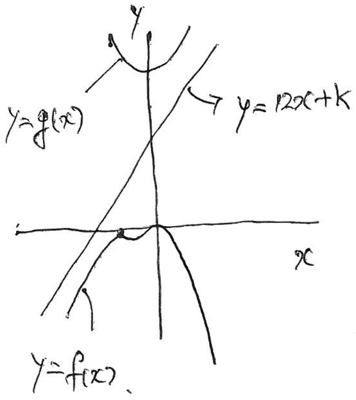
$\cos\gamma = \cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\sin\alpha$.

$\tan\gamma = \tan\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = \cot\alpha$.

* 2020년 3월 (4월시행) 교육청 모의고사 고3수학 나형 28번.

자연수 a, $f(x)=-x^4-2x^3-x^2=-x^2(x+1)^2$, $g(x)=3x^2+a$.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 12x+k\le g(x)$ 를 만족시키는 자연수 k는 3개.



→ $y=12x+k$가 $y=f(x)$와 접할 때를 먼저 확인 (∵ $f(x)$에는 미지수가 없으므로 고정된 상태) 하고, 조건에 맞춰서 $g(x)$를 정하면 된다.

(i) $y=12x+k$와 $y=f(x)$와의 교점을 $P(t, f(t))$라 하면

$f'(t)=-4t^3-6t^2-2t=12$ 에서 $2t^3+3t^2+t+6=0$.

$(t+2)(2t^2-t+3)=0$ 에서 $t=-2$. $f(-2)=-4$.

∴ $y=12x+k$가 $(-2,-4)$를 만족하므로 접할 때의 k는 $k=20$.

따라서 $k=20, 21, 22$일 때는 $y=12x+k$가 $y=g(x)$보다 작거나 같고, $k=23$부터는 크다.

$g(x)$에서도 접하는 경우를 찾아보면 (기울기 12인 직선이 y절편이 증가함에 따라 $g(x)$와 제일 먼저 만나는 점도 결국에 접점이 된다) $g'(x)=6x$에서 $x=2$일 때이다.

∴ $g(2)=12+a$ 에서 접선은 $y_2=12(x-2)+12+a=12x+a-12$.

$k=20, 21, 22$는 성립, $k=23$은 불가여야 하므로 $22\le a-2<23$.

∴ $a=34$ (∵ a는 자연수)//

¥ 2020년 3월 (4월시행) 교육청 모의고사 고3 수학 나형 27번.

$v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t-1)(t-3)$. ⇝ 운동 방향은 $t=1$, $t=3$ 일 때 바뀐다.

$x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (원점출발, 적분상수 $= 0$)

$A = A(t=1) = x(1) = 1 - 6 + 9 = 4$.

점P가 A에서 방향을 바꾼 순간부터 다시 A로 돌아올 때까지 움직인 거리

$t = 1$. $\qquad x = 4,\ t \neq 1$. $\qquad \int |v(t)|\,dt$.

$\therefore\ x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t = 4$ 에서 $t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = (t-1)(t^2 - 5t + 4) = (t-1)^2(t-4)$.

$$\int_1^4 |v(t)|\,dt = -\int_1^3 \{3t^2 - 12t + 9\}\,dt + \int_3^4 \{3t^2 - 12t + 9\}\,dt$$

$$= -\left[t^3 - 6t^2 + 9t\right]_1^3 + \left[\ \right]_3^4$$

$$= -\{27 - 54 + 27 - (1 - 6 + 9)\} + \{64 - 96 + 36 - (27 - 54 + 27)\}$$

$$= 4 + 4 = 8 \,/\!/$$

* 2020년 3월 교육청 모의고사 (4월시행) 고3수학 가형 27번.

→ 빨, 파를 포함한 9개의 서로 다른 색으로 색칠. 9가지 모두 사용.

→ 빨, 파는 서로 꼭짓점을 공유하지 않는다.

이 때 경우의 수는 $K \times 7!$

△ = 빨간색, □ = 파란색.

(i)

△		□
		□
□	□	□

△가 귀퉁이에 오는 경우

$\underbrace{4}_{\text{네 귀퉁이}} \times 5 \times 7! \times \underbrace{\frac{1}{4}}_{90^\circ \text{ 회전}}$

		□
△		□
		□

(ii) △가 변의 중간에 오는 경우

$4 \times 3 \times 7! \times \frac{1}{4}$

∴ 구하는 경우의 수는 $5 \times 7! + 3 \times 7! = 8 \times 7!$ ∴ $K = 8$.

*

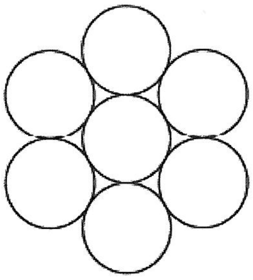
□		
△		

(i)에서 좌측처럼 자리바꿈에 대한 고려가 없어도 되나?

→ 없어도 됨.

∵ 회전을 통하면 이미 계산되어 있는 경우임을 알 수 있다.

* 2020년 3월 (4월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 나형 24번.

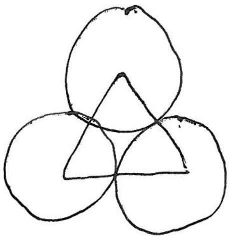


서로 다른 7개의 색을 사용하여 칠하는 경우.

(도형과 관련되는 원순열 문제일 때, 전체 배열을 하고, 회전을 생각)

$7! \times \frac{1}{6}$ //

→ 2012학년도 평가원 6월



$\Rightarrow 7! \times \frac{1}{3}$.

1차) 전체 배열

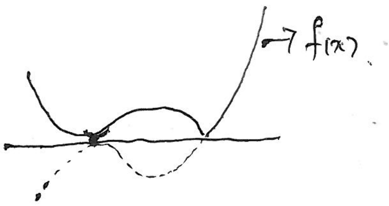
2차) 특정 배열에 대해 회전하여 같은 것 찾아.

* 2020년 3월 (4월 시행) 교육청 모의고사 고3수학 나형 18번.

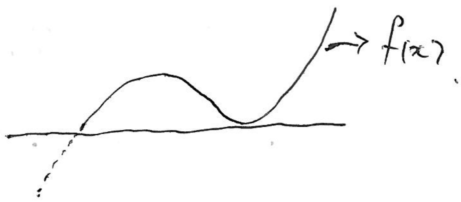
$a>0$, $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$. 이 때 $(x^2-9)(x+a)=g(x)$라 하면 $f(x)=|g(x)|$

$f(x)$는 오직 한 개의 x값에서만 미분불가. $f(x)$의 개형은 다음 2가지로 압축된다.

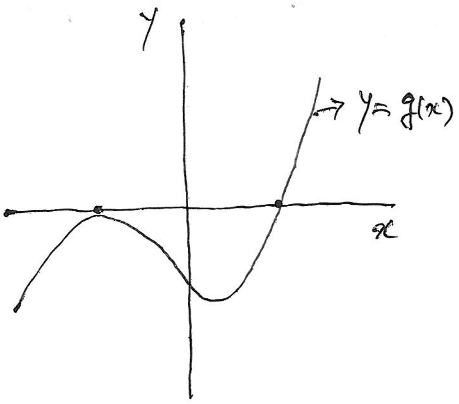
∴ (i)



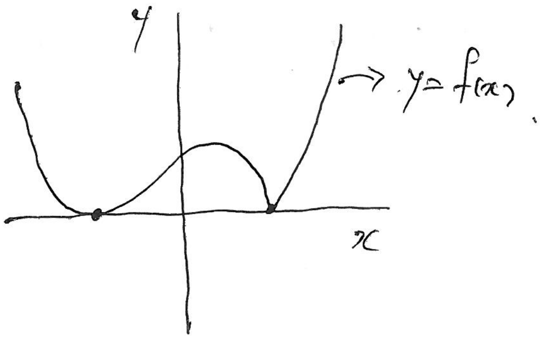
(ii)



$f(x)$의 실근과 $g(x)$의 실근은 동일한데, 음의 실근 2개 ($x=-a$, $x=-3$), 양의 실근 1개 ($x=3$)가 이미 확정된 상태이므로 (i) 개형 밖에는 불가하고, $-a=-3$ 이어야 하므로 $a=3$이 된다. 따라서 $f(x)$의 극댓값은 $g(x)$의 극솟값의 부호를 바꾼 값과 같다.



$\Rightarrow$

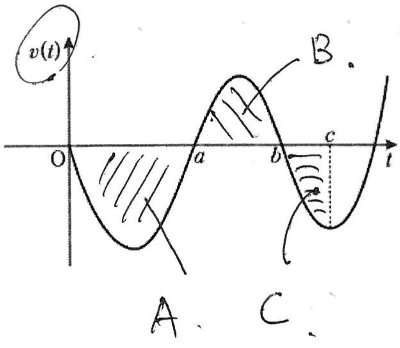


$\therefore\ g(x)=(x^2-9)(x+3)=x^3+3x^2-9x-27$.

$g'(x)=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)=3(x+3)(x-1)$.

$\therefore\ f(x)$의 극댓값은 $-g(1)$이므로 $-g(1)=-(1+3-9-27)=-(4-36)=32$ //

* 2020년3월 (4월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 15번



$\int_0^a v(t)dt = A < 0$, $B > 0$, $C < 0$.

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P.

처음으로 운동 방향을 바꿀 때 ⇒ $t = a$.

그 때의 위치가 -8 ⟹ $\int_0^a v(t)dt = -8$ (원점출발) $= A$.

시각 $t = c$에서의 점 P의 위치 $= \int_0^c v(t)dt = -6$. ∴ $A+B+C = -6$.

$\int_0^b v(t)dt = A+B = \int_b^c v(t)dt = C$ 이때 $\int_a^b |v(t)|dt = ?$

$A = -8$. $B+C = 2$, $-8+B = C$. ∴ $B = 5$.

$[a, b]$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이므로 $|v(t)| = v(t)$. ∴ $\int_a^b |v(t)|dt = \int_a^b v(t)dt = B = 5$

* 2020년 3월 (4월시행) 교육청 모의고사 고3수학 가형 18번.

$1 \le |m| < n \le 10$ 에 대하여 두 정수 m, n 이 m의 n제곱근이 존재한다. 순서쌍 (m, n)의 개수?

→ 5의 3제곱근 ⟺ $\sqrt[3]{5}$. ∴ n이 홀수이면 m이 양수이든, 음수이든 1개 존재 ····①.

n이 짝수이면 m이 양수일 때 2개 존재. ······②.

① 에서 $n=3, 5, 7, 9$ 일 때 가능한 m의 개수는 4, 8, 12, 16.

→ ex) $n=3$이라면 $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{-2}$ 와 같이 4개 존재.

② 에서 $n=2, 4, 6, 8, 10$일 때 가능한 m의 개수는 1, 3, 5, 7, 9.

→ ex) $n=6$이라면 $\sqrt[6]{1}$, $\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[6]{4}$, $\sqrt[6]{5}$ 와 같이 5개 존재.

∴ ①과 ②에서 구하는 순서쌍의 개수는 $40+25=65$

→ 박스 내용으로 변환해 보면

(i) $m>0$ 이면 항상 1개 존재. ∴ $m=1, 2, 3, \cdots, 9$일 때 $n=$ 9개, 8개, 7개, ···, 1개

∴ (가) $= 9+8+7+\cdots+1 = 45$

(ii) $m<0$ 이면 n이 홀수일 때만 1개 존재. ∴ $m=-1$일 때 $n=3, 5, 7, 9$ 가능.

∴ (나) $= 4+4+3+3+2+2+1+1 = 20$.

* 2020년 3월 (4월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 나형 14번.

1, 2, 3 을 사용하여 일곱 자리의 자연수 작성 → 중복 허용.

1, 2, 3 각각 한 번 이상씩 사용 + 2는 짝수번째 자리에만 가능 → 2를 (개수) 기준으로 분류.

(i) 2가 1개일 때 → 2가 자리할 수 있는 자리 선택 + 1, 3을 하나 이상 선택하여 자리 배치

⇒ $_3C_1 \times ({}_2\Pi_6 - 2)$. (${}_2\Pi_6$은 1, 3으로 6개 택하고 배열, 2는 1만으로 or 3만으로 구성된 경우)

(ii) 2가 2개일 때

⇒ $_3C_2 \times ({}_2\Pi_5 - 2)$

(iii) 2가 3개일 때

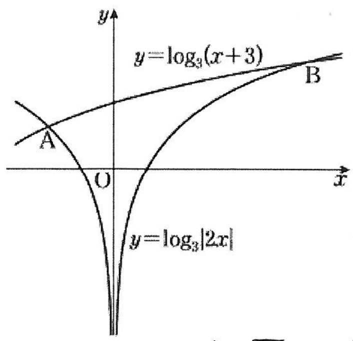
⇒ $_3C_3 \times ({}_2\Pi_4 - 2)$

∴ (i) (ii) (iii) 에서 구하는 경우의 수는

$3 \times 62 + 3 \times 30 + 1 \times 14 = 186 + 90 + 14 = 290$ //

∴ (가) $= {}_2\Pi_6 - 2 = 62$, (나) $= {}_3C_1 \times ({}_2\Pi_6 - 2) = 186$, (다) $= {}_3C_3 \times ({}_2\Pi_4 - 2) = 14$.

* 2020년 3월 (4월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 14번.



$x>0$, $x+3=2x$ 에서 $x=3$. $\therefore B(3, \log_3 6)$

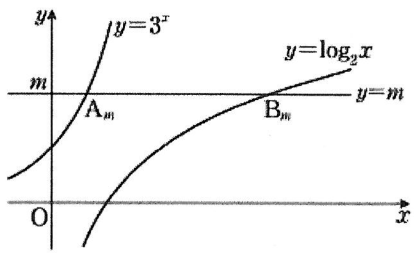
$-3<x<0$, $x+3=-2x$ 에서 $x=-1$. $\therefore A(-1, \log_3 2)$.

$\overline{AB}$의 기울기 $= \dfrac{\log_3 6-\log_3 2}{3-(-1)} = \dfrac{1}{4}$. $\therefore \overline{AB}$에 수직인 직선의 기울기는 -4.

따라서 $\overline{AB}$에 수직인 직선은 $y=-4(x+1)+\log_3 2=-4x+\log_3 2-4$. $C(0, \log_3 2-4)$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}$ ($\because \overline{AB}\perp\overline{AC}$) $=\frac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\sqrt{17}=\frac{17}{2}$ //

* 2020년 3월 (4월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 나형 16번.



$A_m(\log_3 m, m)$, $B_m(2^m, m)$

선분 A_mB_m의 길이는 $2^m-\log_3 m$ $(3^m>\log_3 m)$.

$\therefore$ 선분 $\overline{A_mB_m}=2^m-\log_3 m \rightarrow m=1)$ $2-0 \quad =2.$ $\cdots a_1$

$m=2)$ $4-\log_3 2$

$m=3)$ $8-1 \quad =7.$ $\cdots a_2$.

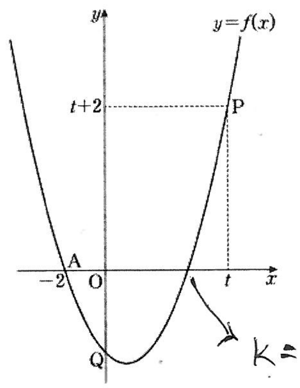
$\cdots\cdots$

$m=9)$ $2^9-\log_3 9=510$ $\cdots a_3$.

→ 자연수 조건이 나오면 해당되는 자연수 몇 개를 순차적으로 대입해서 관찰한다.

+α) → 양수조건, 음수조건, 0이 아닌 조건등이 나오면 분모에 대입가능하다.

* 2020년 3월 (4월시행) 교육청 모의고사 고3 수학 나형 26번.



$k=t-1$.

$f(x)=(x+2)(x-k)$ 가 $(t,\ t+2)$를 만족하므로

$t-k=1$ 에서 $k=t-1$.

$\therefore\ A(-2,0),\ P(t,\ t+2),\ Q(0,\ -2(t-1))$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{2}\times\overline{AP}-\overline{AQ}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{2}\times\sqrt{(t+2)^2+(t+2)^2}-\sqrt{4+4(t-1)^2}\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+16t+16-4-4t^2+8t-4}{2\left((t+2)+\sqrt{t^2-2t+2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{24t+8}{2\left(t+2+\sqrt{t^2-2t+2}\right)}=\frac{24}{2+2}=6$$

* 2020년 3월 (4월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 나형 17번.

등차수열 $\{a_n\}$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$, $a_3 = 42$ → $a_n = dn - 3d + 42$

(가) $a_{k-3} + a_{k-1} = -24$ → $a_{k-2} = -12$.

(나) $S_k = k^2$.

→ $S_n = \frac{dn^2+dn}{2} - 3dn + 42n$

$= \frac{dn^2 - 5dn + 84n}{2} = n^2$

$\therefore n = \frac{5d-84}{d-2}$ ($n \geq 4$, n은 자연수)

$a_{n-2} = d(n-2) - 3d + 42 = dn - 5d + 42$

$= \frac{5d^2 - 84d - 5d^2 + 10d}{d-2} + 42 = -12$.

$\therefore -74d = -54d + 108$ 에서 $d = -\frac{108}{20} = -\frac{27}{5}$.

$\therefore n = \frac{-\frac{111}{1}}{-\frac{37}{5}} = 15$ //

$a_n = -\frac{37}{5}n + \frac{129}{5}$

→ 등차중항 활용 ((가)조건을 통해서 문제가 등차중항을 활용하라는 힌트를 주고 있음)

$\therefore S_k = k \times \frac{(a_1 + a_k)}{2} = k \times \frac{(a_2 + a_{k-1})}{2} = k \times \frac{(a_3 + a_{k-2})}{2} = k \times \frac{30}{2} = k^2$. $\therefore k = 15$ //

→ 등차중항을 활용할 때는 항의 개수가 짝수냐 홀수냐는 구분할 필요가 없다.

ex) $1+2+3+4+5 = 5$(항의 개수) $\times 3$ (중항) $= 15$.

$1+2+3+4+5+6 = 6$(항의 개수) $\times 3.5$ (중간값, median) $= 21$.

* 2020년 3월 (4월시행) 교육청 모의고사 고3수학 나형 15번.

수열 $\{a_n\}$, $a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k$ $\longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} a_2 = a_1 \\ a_3 = a_1 + 2a_2 = 3a_2 \\ a_4 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 4a_3 \\ a_5 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 5a_4 \\ \cdots\cdots \end{array}\right.$

$a_1 = 2$.

$\therefore a_2 + \frac{a_{51}}{a_{50}} = a_2 + \frac{51 \cdot a_{50}}{a_{50}} = 2 + 51$

$= 53$ //

* 2020년 3월 (4월 시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 13번.

등비수열 $\{a_n\}$, $r > 1$

(가) $a_3 \times a_5 \times a_7 = (a_5)^3 = 125 = 5^3$. $\therefore a_5 = 5$. $\because a > 0$.

(나) $\frac{a_4 + a_8}{a_6} = \frac{ar^3 + ar^7}{ar^5} = \frac{1 + r^4}{r^2} = \frac{13}{6}$. $\therefore 6r^4 - 13r^2 + 6 = (3r^2 - 2)(2r^2 - 3) = 0$.

$\therefore r^2 = \frac{3}{2}$ $(\because r > 1)$ $\therefore a_9 = ar^8 = ar^4 \times r^4 = a_5 \times r^4 = 5 \times \frac{9}{4} = \frac{45}{4}$ //