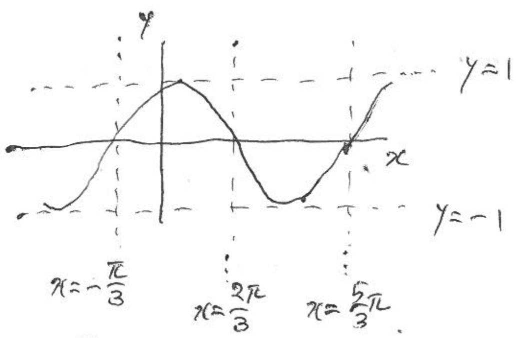
* 삼각함수의 각변환 (그래프와 평행이동)

삼각함수의 각변환에서 $\sin(x+\frac{\pi}{3})$, $\sin(\frac{2}{3}\pi-x)$, $\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 등과 같이 기준각을 활용하기 힘든 형태로 나오는 경우도 있다. (불가능은 아님).

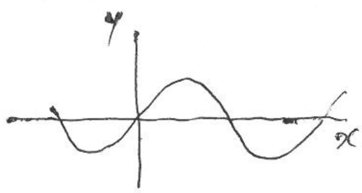
$$\sin\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

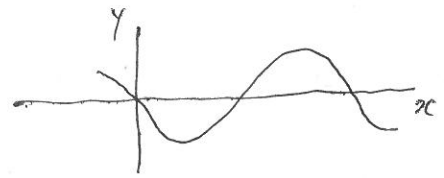
$$=-\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right).$$

평행이동 (식에 대입할 때는 reverse, 점에 대입할 때는 same)의 관점에서 보면



$y=\sin x$ → x축의 음의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼 평행이동 → $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$





$y=\sin x$ → x축 대칭 → $y=-\sin x$ → x축의 양의 방향으로 $\frac{2}{3}\pi$ 만큼 평행이동

→ $y=-\sin(x-\frac{2}{3}\pi)$

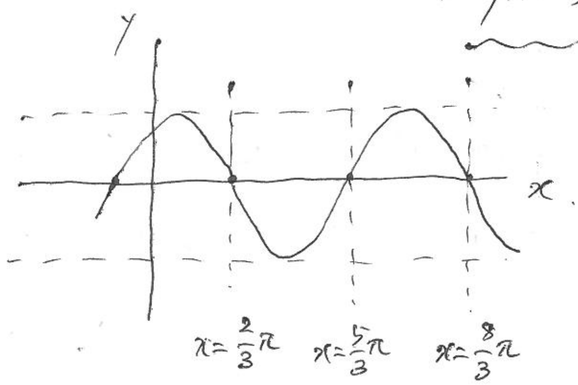
밑줄 친 두 그래프

$y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$ 와

$y=-\sin(x-\frac{2}{3}\pi)$ 는

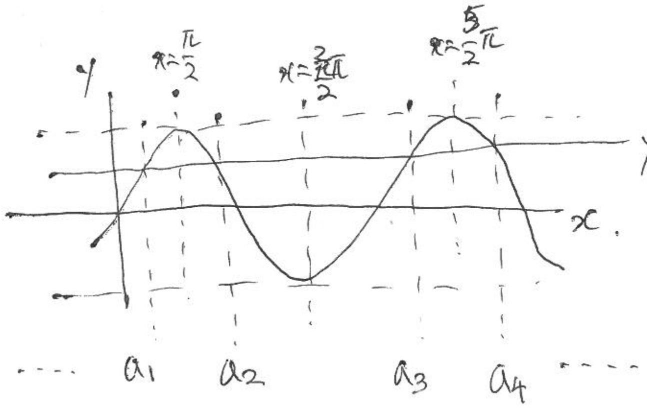
식에서만 같은 것이 아니고 이와 같이

그래프에서도 같은 그래프이다.



* 삼각함수의 실근의 규칙성과 대칭성.

ex)



$\sin x = k$ $(|k| \le 1)$

실근 중 양의 실근을 작은 값부터 차례로

$a_1, a_2, a_3, a_4,$ .... 라 할 때

$a_3 = a_1 + 2\pi,\ a_5 = a_3 + 2\pi,\ a_7 = a_5 + 2\pi,\ \cdots \rightarrow a_{2n+1} = a_{2n-1} + 2\pi$

$a_4 = a_2 + 2\pi,\ a_6 = a_4 + 2\pi,\ a_8 = a_6 + 2\pi,\ \cdots \rightarrow a_{2n+2} = a_{2n} + 2\pi.$

$a_1 + a_2 = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi,\quad a_3 + a_4 = 2 \times \frac{5}{2}\pi = 5\pi.$

$= a_1 + 2\pi + a_2 + 2\pi = a_1 + a_2 + 4\pi = 5\pi.$

$a_2 + a_3 = 2 \times \frac{3}{2}\pi = 3\pi$

→ 그래프를 통해서 규칙성이 나타나는 유형을 이해해야 한다. 위의 결과를 외워봐야 실제 문제에서는 변형이 이루어지고, 원리파악이 안되면 변형에 대한 적응이 힘들다.

→ 위에서 x축의 양의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$ 만큼 평행이동한다면 $(\sin(x-\frac{\pi}{6})=k)$

$a_1+\frac{\pi}{6},\ a_2+\frac{\pi}{6},\ a_3+\frac{\pi}{6},\ a_4+\frac{\pi}{6},$ .... 이 실근이 된다.

* 삼각방정식의 일반해

임의의 정수 n에 대하여 다음 각 삼각방정식의 한 특수해가 α 일 때 (일반적으로 방정식의 해 중에서 절댓값이 가장 작은 것을 α로 잡는다) → (위에서 $\sin\alpha = k$ 라는 의미).

1) $\sin x = k$ $(|k| \le 1) \rightarrow x = n\pi + (-1)^n \alpha$

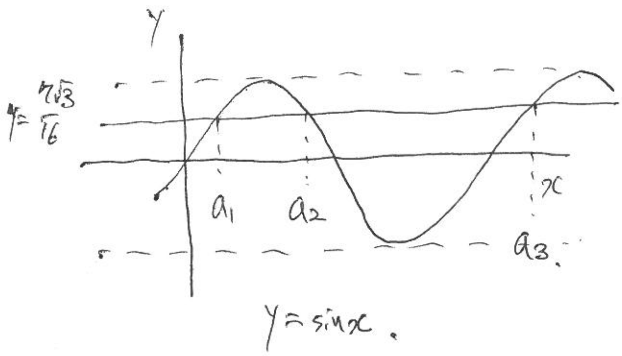
2) $\cos x = k$ $(|k| \le 1) \rightarrow x = 2n\pi \pm \alpha$

3) $\tan x = k$ $(-\infty < k < \infty) \rightarrow x = n\pi + \alpha$.

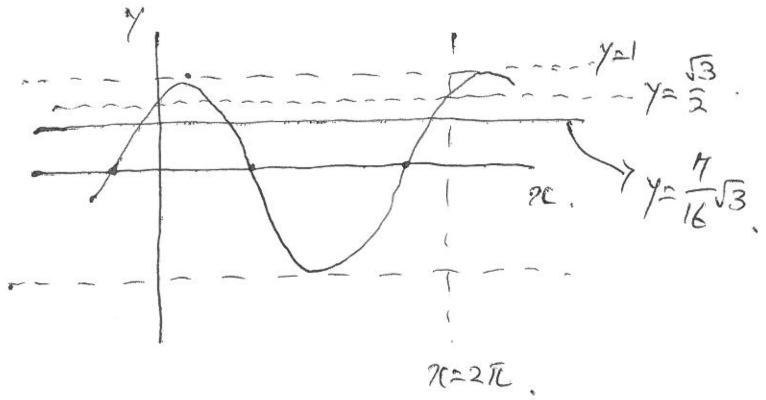
일반해 표기는 원래 주기를 사용해서 표기하지만 sine 함수, 방정식의 경우 특성상 $(-1)^n$ 을 활용한다.

* 2019년 9월 시행 교육청 모의고사 고2 수학 가형 28번.

방정식 $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(x+\frac{\pi}{3})-\frac{7}{8}=0$ 의 모든 실근의 합이 $\frac{q}{p}\pi$. (단, $0\le x\le 2\pi$, p, q는 서로소인 자연수).



→



* [이 그래프에서 $0\le x\le 2\pi$ 이 정의역이 된다.]

주의: $(0\le x\le 2\pi)$에서 정의된 함수 $\sin x$에 대하여 방정식 $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(x+\frac{\pi}{3})-\frac{7}{8}=0$ 의 ······ } 위 문제와 내용이 달라진다.

평행이동 전 상황에서의 근을 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$ (양의 실근으로 한정했을 때) 라 하면

$a_1+a_2=\pi$, $a_2+a_3=3\pi$, $a_3+a_4=5\pi$, $a_3=a_1+2\pi$, $a_4=a_2+2\pi$, ····

평행이동 후 실근에 해당되는 x값은 $a_2-\frac{\pi}{3}$, $a_3-\frac{\pi}{3}$ 이므로

모든 실근의 합은 $a_2-\frac{\pi}{3}+a_3-\frac{\pi}{3} = 3\pi-\frac{2\pi}{3} = \frac{7}{3}\pi$ //

* 평행이동 { 식 : reverse / 점 : same. → x축의 음의 방향이므로 $a_2 \to a_2-\frac{\pi}{3}$ 가 되는 점 인지해야 한다.