* 2019학년도 평가원 6월 수학 나형 21번.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx = x(x^2+ax+b)$. $\begin{cases} (가)\ f(-1) = -1+a-b > -1 & \rightarrow a>b. \\ (나)\ f(1)-f(-1) = 1+a+b+1-a+b > 8 & \rightarrow b>3. \end{cases}$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$\therefore 3 < b < a$. $f'(x)=0$의 판별식 $a^2-3b > b^2-3b > 0$ ($\because b>3$) 이므로

$f(x)$는 극대와 극소가 존재하는 삼차함수이다.

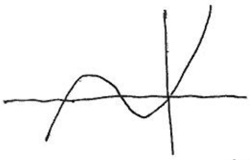
대칭기준 (변곡점) 인 $f'(x)=0$의 대칭축 $x=-\frac{a}{3}$ (<-1, $\because a>3$) 의 위치상 $x=0$ 이외의 실근이 존재하더라도 ($x>0$) 범위에서 나타나지 않는다. $\Rightarrow$

이런 개형은 불가능.

$f(x) = x(x^2+ax+b)$ 에서 $x^2+ax+b=0$의 근에

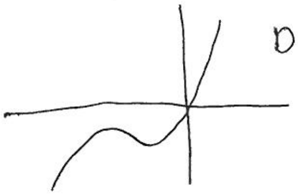
따라 3차방정식 $f(x)=0$의 근이 결정된다.

(i)



$D = a^2-4b > 0$

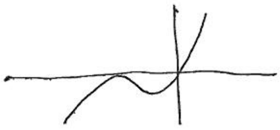
(ii)



$D = a^2-4b < 0$

(단, $-3 < D < 0$).

(iii)



$D = 0$.

ㄱ. True

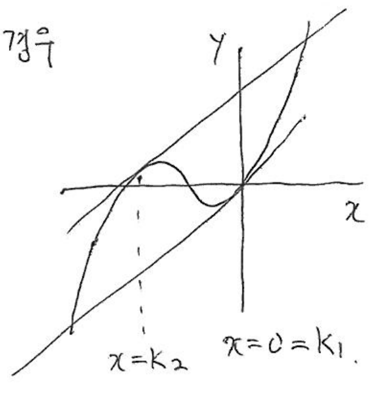
ㄴ. $\left.\begin{array}{l} f'(-1) = 3-2a+b = 3-a+b-a < 0 \\ f'(1) = 3+2a+b > 0 \end{array}\right\}$ $\therefore$ 사잇값 정리에 의해 열린구간 $(-1, 1)$ 에 $f'(x)=0$인 x가 존재하고, x의 좌우에서 부호가 바뀐다.

$\therefore -1<x<1$ 일 때, $f'(x) \geq 0 \rightarrow$ False

ㄷ. 방정식 $f(x) - f'(k)x = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때

개형 (i)의 경우

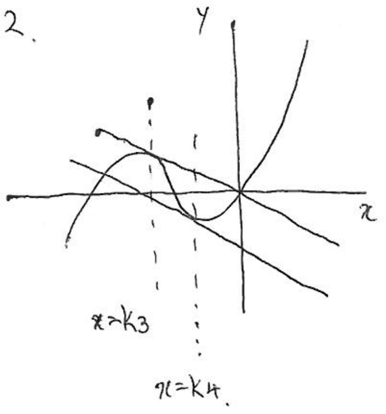
(i)-1.



$y = f'(k)x$ 는 원점을 지나는 직선이다.

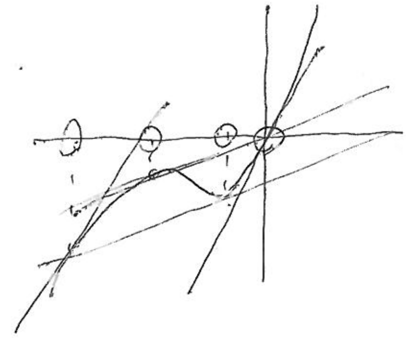
서로 다른 실근의 개수가 2인 경우는 왼쪽 그림처럼 2개의 직선이 나오고 k값도 2개가 존재한다.

(i) − 2.



또한 좌측 그림과 같이 $x=0$일 때 접하지 않고 만나는 직선인 경우도 가능하다. 이 경우역시 직선은 두개가 존재하고, k값도 두 개가 존재한다.

∴ ㄷ → True



(ii), (iii) 개형에서도 성립함을 확인할 것 →

* ㄷ을 식으로 확인하는 경우

$$f(x) - f'(k)x = x^3+ax^2+bx-(3k^2+2ak+b)x = x(x^2+ax-3k^2-2ak) = 0.$$

A) 실근이 $0, 0, \alpha(\neq 0)$인 경우 (위에서 (i) − 1인 경우. $x=0$에서 접한다)

$x^2+ax-3k^2-2ak=0$ 의 두 근이 0과 α. ∴ $\alpha = -a$ (∵ 근과 계수와의 관계)

$-3k^2-2ak=0$ $(0\times\alpha=0)$ 에서 $k=0,\ -\frac{2}{3}a$. (위에서의 k_1, k_2에 해당)

B) 실근이 $0, \alpha(\neq 0), \alpha(\neq 0)$인 경우 (위에서 (i)−2인 경우)

$x^2+ax-3k^2-2ak=0$의 두근이 α, α 이므로 중근을 갖는다.

∴ $D = a^2+12k^2+8ak = 12k^2+8ak+a^2 = (6k+a)(2k+a) = 0$ 에서

$\begin{pmatrix} 6 & a \\ 2 & a \end{pmatrix}$

$k = -\frac{a}{6}\ (=k_4),\ -\frac{a}{2}\ (=k_3)$