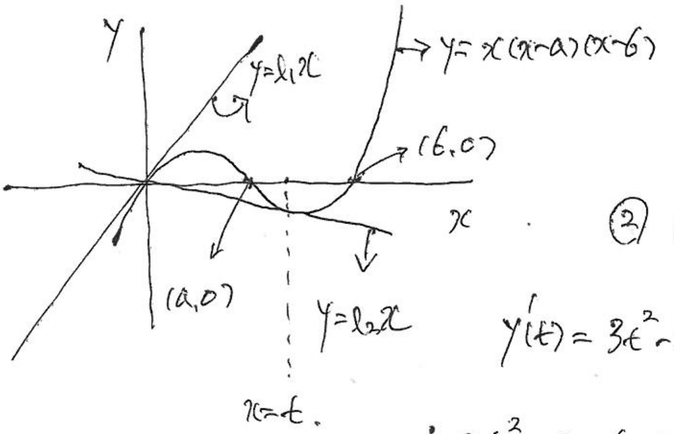
* 2020년 3월 (4월시행) 교육청 모의고사 고3수학 가형 17번.

$0<a<6$, 실수 a. $y = x(x-a)(x-6) = (x^2-6x)(x-a) = x^3-(a+6)x^2+6ax$

원점에서 그은 두 접선의 기울기의 곱의 min?



$y' = 3x^2-2(a+6)x+6a$.

① $l_1 = y'(0) = 6a$.

② $a<t<6$, 접점의 x좌표를 t라 하면,

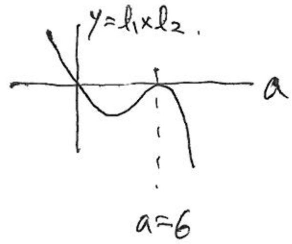
$$y'(t) = 3t^2-2(a+6)t+6a = \frac{t^3-(a+6)t^2+6at}{t-0} = t^2-(a+6)t+6a$$

$\therefore 2t^2-(a+6)t = t(2t-(a+6)) = 0$ 에서

$t=0$ or $\frac{a+6}{2}$. $\therefore t=\frac{a+6}{2}$ $(a<t<6)$.

$$\therefore l_2 = y'\left(\frac{a+6}{2}\right) = \frac{3(a+6)^2}{4} - (a+6)^2+6a = -\frac{1}{4}(a+6)^2+6a = -\frac{1}{4}(a^2-12a+36) = -\frac{1}{4}(a-6)^2.$$

$\therefore l_1\times l_2 = 6a\times\left(-\frac{1}{4}(a-6)^2\right) = -\frac{3}{2}a(a-6)^2$ $\rightarrow$



$\{l_1\times l_2\}' = \left\{-\frac{3}{2}a^3+18a^2-54a\right\}'$

$= -\frac{9}{2}a^2+36a-54 = -\frac{9}{2}(a^2-8a+12) = -\frac{9}{2}(a-2)(a-6)$

$\therefore l_1\times l_2$의 min은 $l_1\times l_2\big|_{a=2} = -\frac{3}{2}\times 2\times(-4)^2 = (-3)\times 16 = -48$ //

* 2020년 3월 (4월시행) 교육청 모의고사 고3 수학 가형 16번.

$f(x) = x^3 - 4x\int_0^1 |f(t)|\,dt$. $\int_0^1 |f(t)|\,dt = a$ (상수) 라 하면 $a>0$

$f(1) = 1-4a > 0$. $\therefore 0<a<\frac{1}{4}$.

(다항함수 형태가 주어지지 않았다면 상수함수의 가능성 때문에 $a \geq 0$, 상수함수 $\subset$ 다항함수)

$f(x) = x^3 - 4ax = x(x+2\sqrt{a})(x-2\sqrt{a})$

$$\therefore \int_0^1 |f(t)|\,dt = \int_0^{2\sqrt{a}} -f(t)\,dt + \int_{2\sqrt{a}}^1 f(t)\,dt = \left[-\frac{1}{4}t^4 + 2at^2\right]_0^{2\sqrt{a}} + \left[\frac{1}{4}t^4 - 2at^2\right]_{2\sqrt{a}}^1$$

$$= (-4a^2+8a^2) - 0 + \left(\frac{1}{4}-2a\right) - (4a^2-8a^2) = \frac{1}{4} - 2a + 8a^2 = \int_0^1 |f(t)|\,dt = a.$$

$$\therefore 8a^2 - 3a + \frac{1}{4} = 8\left(a^2 - \frac{3}{8}a + \frac{1}{64}\right) = \frac{1}{4}(32a^2 - 12a + 1) = \frac{1}{4}(8a-1)(4a-1) = 0.$$

$\therefore a = \frac{1}{8}$ $(\because 0<a<\frac{1}{4})$. $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$. $f(2) = 8-1 = 7$ //