평행이동과 함수의 그래프 With EBS, 제헌이 N제

작성 : 김익성 (중앙대학교 수학과)

검토 : 김경식 (OOO수학학원 원장)
이대은 (중앙대학교 수학과)
김익성 (중앙대학교 수학과)

도움을 주신 분 : 오인수

우리는 어떤 함수의 그래프가 있을 때, 그 함수의 그래프를 x 축 또는 y 축의 방향으로 평행이동한 함수의 그래프를 자주 볼 수 있습니다.

평행이동한 함수의 그래프를 나타내는 식을 구할 수 있어야 할뿐더러 좌표평면에서 기하적인 관점을 도입하여

'평행이동하기 전 함수의 그래프'와 '평행이동한 함수의 그래프'

를 같이 관찰하여 문제를 해결하는 상황을 자주 접하게 됩니다.

수학 (상)과목의 '도형의 이동'에 대하여 먼저 살펴봅시다.

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점을 Q 라 하면 $\mathrm{Q}(x+a, y+b)$ 이다.

이와 같이 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 를 점 $\mathrm{Q}(x+a, y+b)$ 로 이동하는 것을 평행이동이라 정의하고,

$$T : (x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$$

와 같이 나타낸다.

(※ 교과서에서는 $T : (x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 에 대하여 언급하고 있지 않지만, 이 칼럼에서는 편의상 사용하도록 하겠습니다.)

한편, 어떤 도형을 평행이동시켰을 때의 도형의 방정식은 다음과 같습니다.

좌표평면 위의 도형 $f(x, y)=0$ 을 T 에 의하여 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-a, y-b)=0$$

이다.

방정식 $f(x-a, y-b)=0$ 을 설명하기 위해서는 **증명 과정**을 눈여겨볼 필요가 있습니다.
증명 과정은 다음과 같습니다.

좌표평면 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 가 도형 $f(x, y)=0$ 위의 점일 때,
점 P 를 x 축, y 축의 방향으로 각각 a, b 만큼 이동한 점을 $\mathrm{Q}(x', y')$ 이라 하자.

$$x' = x+a, \quad y' = y+b$$

임은 자명하고, 이를 정리하면

$$x = x'-a, \quad y = y'-b$$

이므로

$$f(x, y) = f(x'-a, y'-b) = 0$$

이 성립한다. 이는 방정식 $f(x-a, y-b)=0$ 의 근이 $x=x'$, $y=y'$ 임을 의미하므로
점 Q 를 포함하는 도형의 방정식은 $f(x-a, y-b)=0$ 임을 알 수 있다.

함수의 그래프도 도형의 일종이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프를 T에 의해 평행이동시킨 함수의 그래프를 나타내는 식은

$$y-b=f(x-a) \Leftrightarrow y=f(x-a)+b$$

임을 알 수 있습니다.

평행이동된 도형의 방정식을 알아보는 과정에서 우리는 **'점'**에 대하여 집중할 필요가 있습니다.
어떤 도형 위의 **'임의의 점'**을 평행이동시키는 과정을 통해 도형의 방정식을 구해내는 과정 말이죠.
'점'의 이동이 '도형'의 이동으로 일반화되는 것을 직관적으로 이해할 필요가 있는 것입니다.

두 실수 a, b에 대하여 앞서 정의한 $T:(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$를 '규칙'이라고 합시다.
'도형의 이동' 개념을 조금 자세한 관점에서 관찰하면 다음과 같은 결론을 낼 수 있습니다.

> 평행이동하기 전 함수의 그래프를 나타내는 식을 $y=f(x)$라 하고
> 평행이동한 후의 함수의 그래프를 나타내는 식을 $y=g(x)$라 하면, 두 조건
>
> p : 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 서로 평행이동 관계에 있다.
>
> q : 같은 규칙 T에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 두 점을
> 평행이동시킨 두 점은 함수 $y=g(x)$의 그래프 위에 있다.
>
> 는 서로 필요충분조건이다.
>
> (※ 증명은 '도형의 이동'에서의 증명과 같습니다.)

이를 한 문장으로 쓰면 다음과 같습니다.

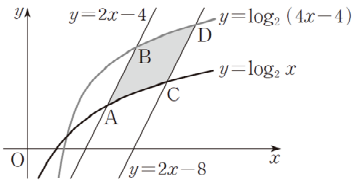
> 같은 규칙 T에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 두 점을 평행이동시킨
> 두 점을 지나는 함수 $y=g(x)$의 그래프는, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 평행이동 관계에 있다.

추가적으로, 어떤 점 P를 규칙 T에 의해 평행이동한 점을 Q라 하면, 직선 PQ의 기울기는 $\frac{(y+b)-y}{(x+a)-x}=\frac{b}{a}$로 일정한 값을 갖습니다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 점 P를 규칙 T에 의해 평행이동한 점을 Q라 하면, 직선 PQ는 좌표평면상에서 유일하게 결정됩니다.

다음 문제는 2021학년도 수능 대비 수능특강 수학1 34p의 3번 문제입니다.

[20007-0055]

3 그림과 같이 제1사분면에서 직선 $y=2x-4$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(4x-4)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=2x-8$이 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(4x-4)$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 두 선분 AB, CD와 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(4x-4)$로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는?



① $2\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

먼저 $\log_2(4x-4)=\log_2(x-1)+2$ 입니다.

앞선 내용에 따르면, 주어진 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-1)+2$의 그래프는 규칙

$$T:(x,\ y)\ \rightarrow\ (x+1,\ y+2)$$

에 의한 평행이동 관계에 있습니다.

즉, **함수 $y=\log_2 x$ 위의 임의의 점을 규칙 T에 의해 평행이동시키면 모두 함수 $y=\log_2(4x-4)$의 그래프 위로 옮겨지고, 평행이동되기 전의 점과 평행이동된 점을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{2}{1}=2$로 일정한 값을 갖습니다.**

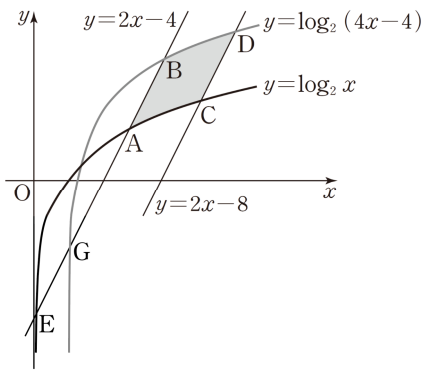
즉, **점 A가 T에 의해 평행이동되는 점은 직선 $y=2x-4$과 곡선 $y=\log_2(4x-4)$ 위에 (동시에) 있어야 합니다.** 따라서 점 A가 규칙 T에 의해 평행이동된 점은 B입니다.

따라서 위 문제에서 두 점 A, B의 x좌표와 y좌표의 차는 각각 1과 2이므로 $\overline{AB}=\sqrt{5}$이고, 같은 방법으로 $\overline{CD}=\sqrt{5}$ 입니다. **방정식**

$$\log_2 x=2x-4$$

의 실근을 일반적인 방법으로 구할 수 없다는 사실에 착안했을 때, 이 내용은 굉장히 의미가 있다고 볼 수 있습니다.

한편, 제4사분면에서 직선 $y=2x-4$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(4x-4)$와 만나는 점을 각각 E, G라 할 때, 같은 방법으로 $\overline{EG}=\sqrt{5}$ 입니다.



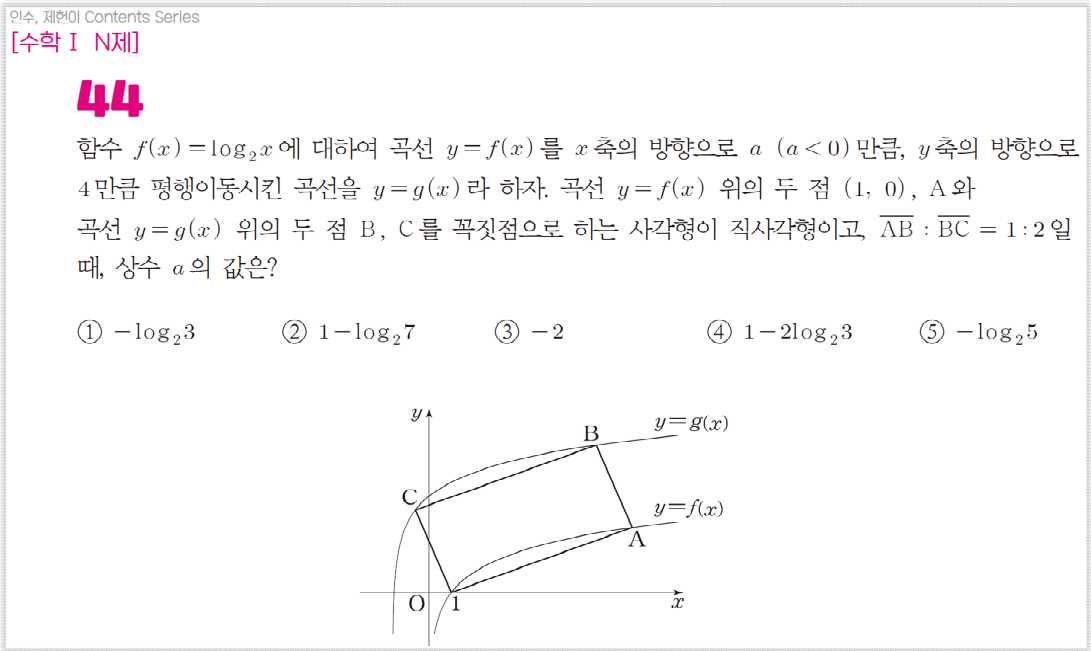
그러나 두 점 **A, G는 규칙 T와 관련이 없으므로 주의**[1] 해야 합니다.

---

1) 순서를 잘 따져야 합니다. 점 G가 규칙 T에 의해 평행이동된 점은 곡선 $y=\log_2\{4(x-1)-4\}+2$와 직선 $y=2x-4$의 교점이 되어야 합니다. 실제로 점 G의 좌표에 미지수를 두고 계산하면, 옳은 값이 나오지 않습니다.

마찬가지로 두 점 B, E의 관계를 규칙 T로 생각하면 안 되는데, 위의 그림에서 두 점 B, E가 규칙 T의 관계에 있다면, 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 '점 G와 규칙 T의 관계에 있는 점'이 존재하지 않기 때문입니다. 따라서 점 B는 점 A와 T의 관계에 있다고 보는 것이 타당합니다.

또 다른 예시를 보겠습니다. 2021학년도 수능 대비 제헌이 N제 수학1 40p의 44번 문제입니다.


인수, 제헌이 Contents Series

[수학 I N제]

44

함수 $f(x)=\log_2 x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 a $(a<0)$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=g(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(1,\ 0)$, A와 곡선 $y=g(x)$ 위의 두 점 B, C를 꼭짓점으로 하는 사각형이 직사각형이고, $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$일 때, 상수 a의 값은?

① $-\log_2 3$ ② $1-\log_2 7$ ③ -2 ④ $1-2\log_2 3$ ⑤ $-\log_2 5$

(문항 출제자인 오인수님께 예시 사용을 허락받았습니다.)

위 문제에 대한 본 칼럼 작성자의 해설은 다음과 같습니다.

점 $(1,\ 0)$을 D$(1,\ 0)$이라 합시다. $\overline{DC}=\overline{AB}$이고 직선 DC와 직선 AB는 서로 평행하므로, 점 D를 점 C로 옮기는 '규칙'과 점 A를 점 B로 옮기는 '규칙'은 **같은 규칙**입니다.

변 DC와 변 AB를 빗변으로 하는 **합동인 두 직각삼각형**을 만들 수 있다는 의미입니다.

주어진 조건에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 서로 평행이동 관계이므로 이 문제에서의 '규칙'은

$$T:(x,\ y)\rightarrow(x+a,\ y+4)$$

입니다. 그러므로 점 C의 좌표는 규칙 $T:(1,\ 0)\rightarrow(1+a,\ 0+4)$에 의해 C$(a+1,\ 4)$로 바로 작성할 수 있으며 닮음을 이용하여 점 A의 좌표 또한 A$(9,\ -2a)$로 바로 작성할 수 있습니다.

따라서 정답은 $\log_2 9=-2a \Leftrightarrow a=-\log_2 3$이 됩니다.

마치며...

평가원은 그동안 EBS연계를 충실히 해 오면서,
2018학년도 수능 가형 27번, 2019학년도 수능 가형 29번, 2020학년도 9월 모의평가 수학 나형 28번, 2020학년도 수능 나형 28번 등 수많은 문제에서 EBS를 제대로 공부한 학생에게 꿀 같은 유리함을 선사해주었습니다. 연계성을 느낀 수험생에게는 더할 나위 없는 시험장에서의 안정감을 준 것이죠. 향후 출시될 수능완성, 이미 출시된 수능특강의 모든 과목에서도 이런 연계 가능한 씨앗을 발견하실 수 있길 바랍니다.

평행이동은 수능수학에서 다항함수, 다항함수가 아닌 함수를 가리지 않고 결합되어 출제됩니다.
'함수의 그래프의 평행이동'은 단순히 이동되기 전 함수 위의 모든 점이 이동된 것일 뿐,
그 이상 그 이하도 아니라는 것을 이해하셨다면 **길이, 넓이, 점의 좌표를 식으로 표현하여 답을 구하는 평행이동 문제들을 한층 더 쉽고 교육과정에서 지향하는 바 그대로 읽게 될 것**입니다.