

제 2 교시

경찰대(99~20) • 사관학교(02~20) 문제지

수학 I-지수와 로그 (공 통)

성명		수험 번호												
----	--	-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

얼음 뚫고 봄의 빛장 열어 마주하는 희망

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고 하시오.
배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

GOGUMA LAB

1. 정의역 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $f(x) = a^{x^2 - 4x - 1}$ ($a > 0, a \neq 1$) 의 최댓값이 32 이다. 상수 a 의 값은?

[2001년 경찰대 07]

2. $\log_2(a^2 + b^2 - ab - a - b + 3) = 1$ 을 만족할 때, $a + b$ 의 값은?

[2002년 경찰대 12]

3. 실수 x, y 에 대하여 a, b 를 각각 $a = 9^x, b = 3^y$ 이라 할 때, $\log_a \sqrt{b}$ 를 x 와 y 로 나타내면? (단, $x \neq 0$)

[2점][2002년 사관학교 가나01]

- ① $\frac{y}{4x}$ ② $\frac{y}{3x}$ ③ $\frac{2y}{3x}$ ④ $\frac{3y}{4x}$ ⑤ $\frac{2y}{x}$

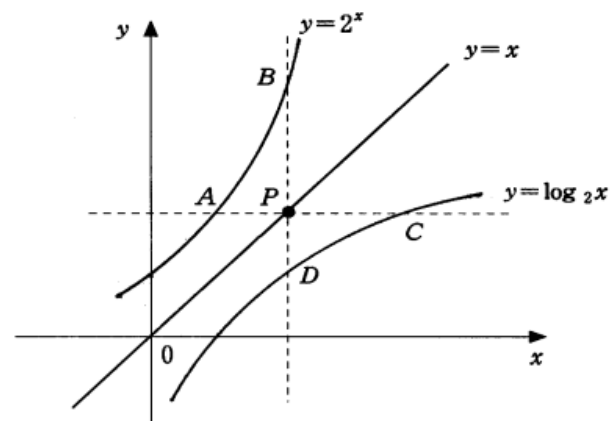
4. $3^n = 31381059609$ 를 만족하는 양의 정수 n 의 값을 구하시오.
(단, $0.47 < \log 3 < 0.48$)

[4점][2002년 사관학교 가나26]

5. 아래 그림은 두 함수 $y = 2^x, y = \log_2 x$ 의 그래프이다.

점 $P(2, 2)$ 에서 x 축과 y 축에 평행한 직선을 그어 함수 $y = 2^x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B 라 하고, 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 C, D 라 한다. 이때, $\triangle ADP$ 와 $\triangle BPC$ 의 면적의 비는?

[3점][2003년 사관학교 가나08]



- ① 1 : 1 ② 1 : 2 ③ 1 : 3
④ 1 : 4 ⑤ 2 : 3

6. 자연수 n 을 $n = 3^m \cdot k$ (단, m 은 음이 아닌 정수, k 는 3의 배수가 아닌 자연수)로 나타냈을 때, $f(n) = m$ 이라 하자. 예를 들면, $f(36) = f(3^2 \cdot 4) = 2$ 이다.

- ㄱ. $f(10000) = 0$ 이다.
ㄴ. $n_1 < n_2$ 이면 $f(n_1) \leq f(n_2)$ 이다.
ㄷ. $n_1 < n_2$ 이면 $f(3^{n_1}) < f(3^{n_2})$ 이다.

위의 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[3점][2003년 사관학교 가나04]

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 어떤 소리의 세기 I 의 세기준위 β 는 $\beta=10\log_{10}\frac{I}{I_0}$ 이고, 단위는 데시벨(dB)이다. 여기서 I_0 는 인간이 들을 수 있는 최소의 소리의 세기이다. 지하철의 소리의 세기준위가 100 dB 이고, 제트엔진의 소리의 세기준위가 150 dB 일 때, 제트엔진의 소리의 세기는 지하철의 소리의 세기의 몇 배인가?
- [3점][2003년 사관학교 가나09]
- ① 1.5 배 ② 15 배 ③ 50 배
 ④ 10^3 배 ⑤ 10^5 배

8. $-6 \cdot 2^x + 2^y = 4^x$ 일 때, $-10 \cdot 2^x + 2^y$ 이 최솟값을 갖는 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값을 구하면?
- [2004년 경찰대 05]
- ① -5 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

9. $4^{\frac{1}{3}} \div 8^{-\frac{1}{2}} = 4^x$ 일 때, x 의 값은?
- [2점][2004년 사관학교 가나01]
- ① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{13}{5}$ ③ $\frac{13}{8}$ ④ $\frac{13}{10}$ ⑤ $\frac{13}{12}$

10. 함수 $f(x)=4^x$ 과 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x)=f(g(2^x+6))$ 의 실근을 α 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?
- [3점][2004년 사관학교 가나08]
- ① $-2 \leq \alpha < -1$ ② $-1 \leq \alpha < 0$ ③ $0 \leq \alpha < 1$
 ④ $1 \leq \alpha < 2$ ⑤ $2 \leq \alpha < 3$

11. D 대학교 2003년도 학생 복지금은 학교 전체 예산의 1.1%라고 한다. 2003년부터 이 대학교는 매년 학교 예산과 학생 복지금을 전년대비 각각 5%, 7%씩 늘려갈 계획이다. 그러면, 학생 복지금이 학교 예산의 1.3% 이상이 되는 것은 몇 년 후인가? (단, 아래 상용로그표에 있는 값만 이용하여 계산하시오.)

[4점][2004년 사관학교 나24]

상용로그표

	0	1	...	4	5	6	7
1.0	.0000	.0043	...	.0170	.0212	.0253	.0294
1.1	.0414	.0453	...	.0569	.0607	.0645	.0682
1.2	.0792	.0828	...	.0934	.0969	.1004	.1038
1.3	.1139	.1173	...	.1271	.1303	.1335	.1367
1.4	.1461	.1492	...	.1584	.1614	.1644	.1673

- ① 9년 ② 10년 ③ 11년 ④ 12년 ⑤ 13년

12. 집합 $A = \{2, 3, 4, 5\}$ 에서 연산 $*$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$a*b = \begin{cases} a - (a-b)[\log_a b], & b=2 \text{ 또는 } b=3 \\ b - (b-a)[\log_b a], & b=4 \text{ 또는 } b=5 \end{cases}$$

(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

이 때, 방정식 $4*(4*x) = x$ 를 만족하는 x 의 개수는?

[4점][2004년 사관학교 가나07]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

13. 서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = |\log_2 x - 2|$ 가 $f(a) = f(b)$ 를 만족할 때, $a \times b$ 의 값을 구하시오.

[4점][2004년 사관학교 가나25]

14. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} 4^x = 2^{x+3} - 2^{y+1} \\ 4^y = 2^{y+3} - 2^{x+1} \end{cases}$ 의 모든 해가

$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ 일 때 $\left[\sum_{k=1}^n a_k \right]$ 의 값은

(단 $[a]$ 는 a 를 넘지 않는 최대정수이다.)

[2005년 경찰대 17]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

15. 다음은 곡선 $y = \log_2 x$ 위의 두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 p, q 라 할 때, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 이면 $\frac{\log_2 p}{p} + \frac{\log_2 q}{q} \leq 1$ 임을 증명한 것이다.

<증명>

$pq = \boxed{\text{(가)}}$ 이므로

$$\frac{\log_2 p}{p} + \frac{\log_2 q}{q} = \frac{q \log_2 p + p \log_2 q}{pq}$$

$$= \frac{q \log_2 p + p \log_2 q}{\boxed{\text{(가)}}} \quad \dots \text{㉠}$$

$\overline{PQ}$ 를 $p : q$ 로 내분하는 점을 $R(x_0, y_0)$ 라 하면

$$x_0 = \boxed{\text{(나)}},$$

$$y_0 = \frac{q \log_2 p + p \log_2 q}{p+q} \quad \dots \text{㉡}$$

그런데 곡선 $y = \log_2 x$ 는 $\boxed{\text{(다)}}$ 이므로

$y_0 \leq \log_2 x_0$ 이다.

따라서 ㉠, ㉡에서

$$\frac{\log_2 p}{p} + \frac{\log_2 q}{q} \leq 1$$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

[3점][2005년 사관학교 나16]

- | (가) | (나) | (다) |
|----------|-----|--------|
| ① $p+q$ | 2 | 위로 볼록 |
| ② $-p-q$ | 3 | 위로 볼록 |
| ③ $p+q$ | 3 | 위로 볼록 |
| ④ $-p-q$ | 2 | 아래로 볼록 |
| ⑤ $p+q$ | 3 | 아래로 볼록 |

16. $(\log_{\sqrt{6}} 2)(\log_6 4) + (\log_{\sqrt{6}} 3)(\log_6 9) + (\log_{\sqrt{6}} 4)(\log_6 9)$ 의 값은?

[2점][2005년 사관학교 가나01]

- ① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

17. $\frac{2^{500}}{A}$ 을 10^n (n 은 음의 정수)의 꼴로 나타낼 수 있을 때, 자연수 A 의 최고자리 숫자는 ?
(단, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$)

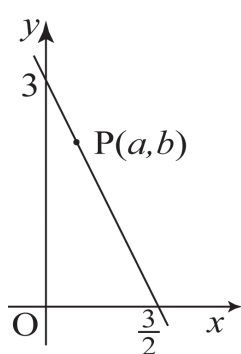
[3점][2005년 사관학교 나12]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

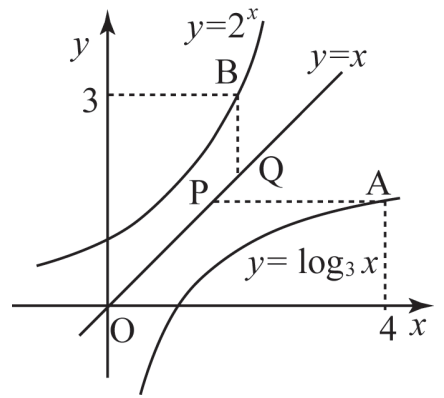
18. 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(0, 3)$ 과 $(\frac{3}{2}, 0)$ 을 지나는 직선 l 이 있다. 이 직선 위의 임의의 한 점을 $P(a, b)$ 라 할 때, $9^a + 3^b$ 의 최솟값은?

[3점][2005년 사관학교 가나11]

- ① $3\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{3}$
③ $4\sqrt{2}$ ④ $6\sqrt{2}$
⑤ $6\sqrt{3}$



19. 오른쪽 그림은 직선 $y=x$ 와 함수 $y=2^x$, $y=\log_3 x$ 의 그래프이다. x 좌표가 4인 곡선 $y=\log_3 x$ 위의 점 A에서 y 축에 내린 수선이 직선 $y=x$ 와 만나는 점을 P라 하고, y 좌표가 3인 곡선 $y=2^x$ 위의 점 B에서 x 축에 내린 수선이 직선 $y=x$ 와 만나는 점을 Q라 한다. 이때, $\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ 의 값은? (단, O는 원점)



[4점][2005년 사관학교 가나19]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

20. 광도(물체의 밝기)가 B_0 인 물체를 $r(\text{km})$ 의 거리에서 바라볼 때의 물체의 광도가 B 이면 대기혼탁도 n (네블/km)은

$$\log B = \log B_0 - 0.03nr$$

의 관계를 만족한다. 예를 들어, 대기혼탁도가 1네블/km인 대기에서 1km 떨어진 물체를 바라보면 $\frac{B}{B_0} = 10^{-0.03} = 0.9333$ 이므로 물체의 밝기 B 는 본래 밝기 B_0 의 93.33%로 줄어든다. 대기혼탁도가 1네블/km인 대기에서 500m 떨어진 어떤 물체를 바라보면, 이 물체의 밝기는 본래 밝기의 몇 % 정도로 줄어드는가?

[4점][2005년 사관학교 나23]

상용로그표

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.5	0.9777	0.9782	0.9786	0.9791	0.9795	0.9800	0.9805	0.9809	0.9814	0.9818
9.6	0.9823	0.9827	0.9832	0.9836	0.9841	0.9845	0.9850	0.9854	0.9859	0.9863

- ① 95.5% ② 95.8% ③ 96.2%
④ 96.6% ⑤ 96.9%

21. n 이 정수일 때, $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합은?

[2006년 경찰대 10]

- ① 63 ② 73 ③ 83 ④ 93 ⑤ 103

22. 실수 x, y 가 1보다 클 때, $\frac{\log_x 2 + \log_y 2}{\log_{xy} 2}$ 의 최솟값은?

[2006년 경찰대 12]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

23. 두 곡선 $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$ 와 직선 $x = 32$ 로 둘러싸인 영역에 포함되는 x, y 좌표가 모두 정수인 점의 개수는? (단, 경계 위의 점은 제외한다.)

[2006년 경찰대 18]

- ① 29 ② 31 ③ 33 ④ 35 ⑤ 37

24. $n = 2006$ 이고 $a = \frac{3}{4}$ 일 때, 세 수 A, B, C 를 각각

$$A = {}^n\sqrt{a^{n-1}}, B = {}^n\sqrt{a^{n+1}}, C = {}^{n+1}\sqrt{a^n}$$

이라 하자. 다음 중 세 수 A, B, C 의 대소관계로 옳은 것은?

[2점][2006년 사관학교 가나01]

- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
 ④ $B < C < A$ ⑤ $C < A < B$

25. 두 부등식 $\begin{cases} \log_y (1 - x^2) \leq 2 \\ 2^y \leq 2 \cdot 4^x \end{cases}$ 을 동시에 만족시키는 영역의 넓이는?

[4점][2006년 사관학교 가12나16]

- ① $\frac{1}{4}(\pi + 1)$ ② $\frac{1}{4}(\pi + 3)$ ③ $\frac{1}{4}(\pi + 5)$
 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

26. 1보다 큰 세 실수 a, b, c 에 대하여 두 등식

$$\begin{cases} a^2 b^3 = 64 \\ 3(\log_a c)^2 - 2(\log_b c)^2 = -(\log_a c)(\log_b c) \end{cases}$$

이 성립하도록 하는 두 수 a 와 b 에 대하여 $\log_2 ab$ 의 값은?

[4점][2006년 사관학교 나18]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

27. 두 지수함수 $f(x) = 9^x + a$, $g(x) = b \cdot 3^x + 2$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 곡선 $y = g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나고 두 교점의 x 좌표가 $x = \log_3 2$, $x = \log_3 k$ (단, $k > 2$)일 때, [보기]에서 a, b 에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면?

[4점][2006년 사관학교 나23]

$\neg$. $b^2 = 4a - 8$	$\neg$. $a = 2b - 2$	$\neg$. $a > 6$
-------------------------	-----------------------	------------------

- ① $\neg$ ② $\neg$, $\neg$ ③ $\neg$, $\neg$
 ④ $\neg$, $\neg$ ⑤ $\neg$, $\neg$, $\neg$

28. 다음은 오존층의 두께를 조사하는 방법 중 하나를 서술한 것이다.

태양광선이 대기권에 도달하기 전의 특정한 파장의 세기를 I_0 , 그 파장이 두께가 x cm 인 오존층을 통과한 후의 파장의 세기를 I 라 하면

$$\log_a I_0 - \log_a I = kx$$

이 성립한다.
 여기서, a 는 $2 < a < 3$ 인 상수이고, k 는 그 파장에 대한 오존의 흡수상수이다.

위와 같은 공식을 이용하면, 진폭이 3×10^{-8} cm 인 특정파장이 두께가 0.2 cm인 오존층을 통과하였을 때, $I = \frac{5}{6} I_0$ 를 만족한다고 한다. 이 때, $1000 \log_{10} a^k$ 의 값을 구하시오.
 (단, $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ 로 계산한다.)

[4점][2006년 사관학교 나28]

29. 연립방정식

$$\begin{cases} \frac{2}{\log_x 4} + \frac{1}{\log_y 2} = 3 \\ \log_2 3x + \log_{\sqrt{2}} y = \log_2 48 \end{cases}$$

의 해를 $x = \alpha$, $y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하시오.

[3점][2006년 사관학교 나26]

30. 연립부등식

$$\begin{cases} 1 < [\log_4 x]^2 + [\log_4 y]^2 < 4 \\ x + y < 20 \end{cases}$$

을 만족하는 순서쌍 (x, y) 중에서 x, y 가 모두 정수인 순서쌍의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[2007년 경찰대 18]

- ① 66 ② 78 ③ 84 ④ 87 ⑤ 91

31. 좌표평면에서 자연수 k 에 대하여 네 부등식

$x > 0$, $y > 0$, $y < 2^{-x} + k$, $x < k + \frac{1}{2}$ 을 모두 만족하는 영역에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수인 점의 개수를 $N(k)$ 라 하자. $\sum_{k=1}^{10} N(k)$ 의 값은?

[4점][2007년 사관학교 나16]

- ① 55 ② 125 ③ 144 ④ 252 ⑤ 385

32. 세 로그함수 $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \log_b x$, $h(x) = \log_c x$ 의 밑 a, b, c 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[4점][2007년 사관학교 가나20]

〈 보기 〉

- ㄱ. $a+c$ 의 최솟값은 $2b$ 이다.
 ㄴ. $\frac{1}{f(5)}, \frac{1}{g(5)}, \frac{1}{h(5)}$ 은 이 순서로 등차수열을 이룬다.
 ㄷ. $f(x_1) = g(x_2) = h(x_3) = 5$ 이면 x_1, x_2, x_3 은 이 순서로 등비수열을 이룬다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

33. 공기는 산소, 수소, 질소 등과 같은 여러 가지 원소들로 이루어져 있다. 지표면에서부터 높이가 x (km)인 곳에서의 어떤 원소의 밀도를 $n(x)$ 라 하면 관계식 $\log n(x) = \log n_0 - kx$ (단, n_0 은 지표면에서의 밀도, k 는 양의 상수)가 성립한다고 한다. 이 원소의 밀도가 지표면에서의 밀도의 $\frac{1}{2}$ 배, $\frac{1}{1000}$ 배가 되는 높이를 각각 x_1, x_2 라 할 때, $\frac{x_2}{x_1}$ 의 값은? (단, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.)

[4점][2007년 사관학교 가나23]

- ① 5 ② 8 ③ 10 ④ 15 ⑤ 20

34. $\frac{2^{68} \times 5^{68}}{2^7 \times 5^7 + 2^4 \times 5^4} = \alpha \times 10^n$ (단, $1 \leq \alpha < 10$)라 할 때, 자연수 n 의 값을 구하시오.

[3점][2006년 사관학교 나27]

35. $(17.8)^n$ 의 정수부분이 9자리의 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 값은? (단, $\log 1.78 = 0.25$ 로 계산한다.)

[3점][2007년 사관학교 나04]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

36. 사람이 약물을 복용한 후 약물의 혈중 농도는 감소하기 시작한다. 어느 약물의 혈중 농도가 매 10시간마다 $\frac{1}{2}$ 의 비율로 감소한다고 하자. 이 약물의 혈중 농도가 지금의 40%로 줄어드는데 걸리는 시간은? (단, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.)

[2007년 경찰대 14]

- ① 13 시간 20 분 ② 13 시간 40 분 ③ 14 시간
 ④ 14 시간 20 분 ⑤ 14 시간 40 분

37. 수면에서 수면과 수직인 방향으로 물속을 향해 발사된 총알은 시간이 지날수록 물의 저항에 의해 속도가 줄어든다. 수면에서 1000 (m/초)의 속도로 어떤 총알이 발사된 후 t 초 $\left(0 \leq t < \frac{1}{50}\right)$ 가 지난 순간 총알의 속도를 $v(t)$ (m/초)라 하면 관계식 $v(t) = a \cdot b^{100t}$ (단, a 와 b 는 양의 상수)이 성립한다고 하자. 발사 후 $\frac{1}{100}$ 초가 지난 순간 총알의 속도가 50(m/초) 이었다. 총알의 속도가 $100\sqrt{5}$ (m/초)가 되는 것은 총알이 발사된 후 p 초가 지난 순간이다. $\frac{1}{p}$ 의 값을 구하시오.

[4점][2007년 사관학교 가나29]

38. 모든 실수 x, y 에 대하여 부등식

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

를 만족시키는 $f(x)$ 를 <보기>에서 모두 고른 것은?

[2008년 경찰대 13]

- < 보 기 > ————
- ㉠. $f(x) = \sqrt{|x|}$
 ㉡. $f(x) = 2^{|x|}$
 ㉢. $f(x) = \log_2(|x|+1)$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

39. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 $P(x, y)$ 에 대하여 $\log_{\frac{1}{2}}(y+1) - \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, 2^m 의 값은? (단, $y \neq -1$ 이다.)

[4점][2008년 사관학교 나09]

- ① 3 ② $\frac{3}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

40. 1이 아닌 두 양수 a, b 에 대하여 $a^2 \cdot \sqrt[5]{b} = 1$ 이 성립할 때, $\log_a \frac{1}{ab}$ 의 값은?

[2점][2008년 사관학교 가나01]

- ① -9 ② -3 ③ 3 ④ 5 ⑤ 9

41. 1보다 큰 실수 x 에 대하여 $\log x$ 의 소수부분을 α 라 하면 $(\log x)^2 + \alpha^2 = 8$ 이 성립한다. 이 때, $\log x$ 의 값은?

[3점][2008년 사관학교 나04]

- ① $1 + \sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $1 + \sqrt{3}$
 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

42. 다음 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

[4점][2008년 사관학교 나12]

— <보기> —

- ㄱ. $1 < a < b$ 이고 $0 < \log_a c < 1$ 이면 $\log_b c > \log_b a$ 이다.
 ㄴ. $0 < a < 1 < b$ 이고 $0 < \log_a c < 1$ 이면 $\log_b a < \log_b c$ 이다.
 ㄷ. $0 < a < b < 1$ 이고 $\log_a c < 0$ 이면 $\log_a b < \log_c b$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

43. 자연수 n 에 대하여 2.52^{10n} 의 최고자리의 숫자를 a_n 이라 하자. 예를 들어, $2.52^{10} \doteq 1.03 \times 10^4$, $2.52^{20} \doteq 1.06 \times 10^8$, $2.52^{30} \doteq 1.10 \times 10^{12}$ 이므로 $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ 이다. $a_n > 1$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 2.52 = 0.4014$ 로 계산한다.)

[4점][2008년 사관학교 가나30]

44. 방정식 $3(1 - \log_2 x)^2 - 2(1 - \log_2 x) - 4 = 0$ 의 두 근을 각각 α, β 라 할 때, $\alpha^3 \beta^3$ 의 값을 구하시오.

[3점][2008년 사관학교 가나25]

45. 어떤 영화의 흥행수입을 분석한 결과, 개봉한 후 50일째까지의 총 흥행수입이 400억원이고, 개봉한 후 100일째까지의 총 흥행수입이 640억원이라고 한다. 이 영화를 개봉한 후 n 일째까지의 총 흥행수입을 $f(n)$ (억원)이라 하면

$f(n) = a(1 - b^n)$ (단, a, b 는 양의 상수, n 은 자연수)이 성립한다고 하자. 이 영화의 총 흥행수입이 처음으로 800억원을 넘어서는 날은 개봉한 후 며칠 쯤인가? (단, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.48$ 로 계산한다.)

[4점][2008년 사관학교 가나24]

- ① 140일 ② 150일 ③ 160일
 ④ 170일 ⑤ 180일

46. 1보다 큰 자연수 k 에 대하여 $y = k \cdot 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a_k 만큼 평행이동하면 $y = 2^x$ 의 그래프와 일치한다. 이 때, $\sum_{n=1}^{10} a_{2n} = \log_2 m$ 을 만족시키는 자연수 m 의 값은?

[2009년 경찰대 15]

- ① $2 \cdot 10!$ ② $2^9 \cdot 10!$ ③ $2^{10} \cdot 10!$
 ④ $2^9 \cdot 20!$ ⑤ $2^{10} \cdot 20!$

47. 기울기가 -1 인 직선 l 이 곡선 $y = \log_2 x$ 와 만나는 점을 $A(a, b)$, 직선 l 이 곡선 $y = \log_4(x+2)$ 와 만나는 점을 $B(c, d)$ 라고 하자. $\overline{AB} = \sqrt{2}$ 일 때, $a+c$ 의 값은? (단, $1 < a < c$)

[2009년 경찰대 19]

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

48. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}(3^x - 3^{-x})$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 다음을 만족시키는 x 의 값 전체의 곱은?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{g(x)g(-x)\}^n = -\frac{1}{5}$$

[2009년 경찰대 24]

- ① $-\frac{1}{5}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ -1

49. 함수 $f(x) = |2^x - 2|$ 의 그래프 위의 세 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $(c, f(c))$ 가 $0 < a < b < c$ 와 $f(a) > f(b) > f(c)$ 를 만족할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

[4점][2009년 사관학교 가나18]

- ㄱ. $0 < c < 1$
 ㄴ. $0 < f(a) + f(b) + f(c) < 3$
 ㄷ. 방정식 $f(x) - a = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

50. 어느 대학은 학교 발전을 위하여 대학예산에서 시설투자비가 차지하는 비율을 증가시키기로 하였다. 2008년에 이 대학의 대학예산에서 시설투자비가 차지하는 비율은 4%이다. 이후 대학예산의 증가율은 매년 12%, 시설투자비의 증가율은 매년 20%로 일정하다면 처음으로 대학예산에서 시설투자비가 차지하는 비율이 6% 이상이 될 때는 2008년을 기준으로 몇 년 후부터인가? (단, $\log_{10} 1.12 = 0.0492$, $\log_{10} 1.20 = 0.0792$, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 계산한다.)

[3점][2009년 사관학교 나14]

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

51. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[3점][2009년 사관학교 나13]

- ㄱ. $y = f(x)$ 의 그래프가 점 (a, b) 를 지나면 $a = \log_3(b+2) - 1$ 이다.
 ㄴ. 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = 3^x$ 의 그래프는 한 점에서 만난다.
 ㄷ. 부등식 $f(x) < 3^x$ 를 만족시키는 x 의 값의 범위는 $x < 0$ 이다.

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

52. 세 실수 a, b, c 가 $ab=12$, $bc=8$, $2^a=27$ 을 만족시킬 때,
 4^c 의 값을 구하시오.

[2점][2009년 사관학교 가나25]

53. 자연수 n 에 대하여 $2^n \leq x \leq 2^{n+10}$ 에서 $|\log_2 x - 2n|$ 의
 최댓값을 a_n 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값을 구하시오.

[4점][2009년 사관학교 나30]

54. 방정식 $7^{\log_3 x} \cdot x^{\log_3 5x} = 1$ 의 모든 근의 합이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의
 값은? (단, p, q 는 서로소인 양의 정수이다.)

[2010년 경찰대 17]

- ① 81 ② 71 ③ 61 ④ 51 ⑤ 41

55. 함수 $f(x) = \log_2(x^2 + x + 1) - \log_2 x$ 에 대하여
 $[f(1)] + [f(2)] + [f(3)] + \dots + [f(1022)]$ 의 값은?
 (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[2010년 경찰대 24]

- ① $2^{11} + 2$ ② $2^{12} - 2$ ③ $2^{12} + 2$
 ④ $2^{13} - 2$ ⑤ $2^{13} + 2$

56. $(\sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{250})^3$ 의 값은?

[2점][2010년 사관학교 가나01]

- ① 48 ② 54 ③ 72 ④ 96 ⑤ 108

57. 세 실수 a, b, c 가 $abc \neq 0$, $ab+bc+ca=abc$ 를 만족시킨다.
 $\log_2 x = a$, $\log_3 x = b$, $\log_5 x = c$ 일 때, 양수 x 의 값은?

[2010년 경찰대 02]

- ① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

58. 다음은 어느 보석 상점에서 판매하는 다이아몬드 가격표의 일부이다.

무게(캐럿)	가격(만원)
0.3	70
0.6	210

이 상점에서 판매하는 다이아몬드의 무게가 x 캐럿일 때, 그 가격 $f(x)$ 만원은

$$f(x) = a(b^x - 1) \quad (\text{단, } a > 0, b > 1 \text{ 인 상수})$$

로 주어진다고 한다. 이때, 이 상점에서 판매하는 무게가 1.5 캐럿인 다이아몬드의 가격은?

[3점][2010년 사관학교 가나09]

- ① 1875만원 ② 1965만원 ③ 1980만원
④ 2170만원 ⑤ 2250만원

59. 파장이 λ 이고 강도가 I_0 인 광선이 어떤 용액을 통과하면 이 용액에 광선이 흡수되어 입사광의 강도가 감소된다. 광선이 농도가 c 인 용액을 통과한 거리가 d 일 때의 광선의 강도를 I 라 하면 I 와 입사광의 강도 I_0 사이에는

$$I = I_0 \times 10^{-acd}, \quad a = \frac{4\pi k}{\lambda} \quad (\text{단, } k \text{는 소멸계수})$$

인 관계가 성립하고, 이 용액의 흡광도 A 를

$$A = \log I_0 - \log I$$

로 정의한다. 파장이 λ_1 인 광선이 농도가 0이 아닌 어떤 용액을 통과한 거리가 d_1 일 때의 흡광도를 A_1 , 파장이 $2\lambda_1$ 인 광선이 동일한 농도의 이 용액을 통과한 거리가 $4d_1$ 일 때의 흡광도를 A_2 라 하자. 이때, 소멸계수 k 가 일정하다고 할 때

$\frac{A_2}{A_1}$ 의 값은? (단, $\lambda_1 d_1 \neq 0$ 이다.)

[3점][2010년 사관학교 가나12]

- ① 8 ② 2 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

60. 임의의 실수 x 에 대하여

$$x = n + \alpha \quad (n \text{은 정수, } 0 \leq \alpha < 1)$$

일 때, n 을 x 의 정수 부분, α 를 x 의 소수 부분이라 하자.

$10 < a < b < 50$ 인 두 자연수 a, b 에 대하여 $\log_2 a$ 의 소수 부분과 $\log_2 b$ 의 소수 부분이 같을 때 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

[3점][2010년 사관학교 가나11]

- ① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

61. 실수 전체의 집합의 두 부분집합 A, B 를 각각

$$A = \{x \mid \log_4(x-1) \leq \log_{16}(x+5)\}$$

$$B = \{x \mid 8^x - 11 \cdot 4^x + 38 \cdot 2^x - 40 = 0\}$$

이라 할 때, 집합 $A \cap B$ 의 모든 원소들의 합은?

[4점][2010년 사관학교 나18]

- ① $\log_2 10$ ② $\log_2 20$ ③ $\log_2 40$
④ $\log_2 60$ ⑤ $\log_2 80$

62. 방정식 $2^{\frac{x}{2}} = \log_{\sqrt{2}} |x|$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

[4점][2010년 사관학교 나20]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

63. $\log_{15} A = 30$, $\log_{45} B = 15$ 인 두 자연수 A , B 에 대하여 $\frac{B}{A}$ 를 소수로 나타내면 소수점 아래 n 째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나온다. 이때, n 의 값을 구하시오.
(단, $\log 2 = 0.3010$)

[3점][2010년 사관학교 나26]

64. 다음 등식을 만족시키는 세 실수 a , b , c 가 있다.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^a = 2a, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{2b} = b, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2c} = c$$

이때, 세 실수 a , b , c 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

[4점][2010년 사관학교 가나24]

- ① $a < b < c$ ② $a < c < b$ ③ $b < a < c$
④ $b < c < a$ ⑤ $c < a < b$

65. 다음을 만족시키는 실수 x 의 개수는?

$$(x^2 - 2x)^{x^2 + 6x + 5} = 1$$

[2011년 경찰대 04]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

66. 1이 아닌 양수 x 에 대하여 부등식 $|\log_x n| \leq 2$ 를 만족시키는 가장 큰 자연수 n 을 $f(x)$ 라 하자. <보기>에서 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은?

- <보 기>
ㄱ. $f(2) = 4$
ㄴ. $x < y$ 이면 $f(x) \leq f(y)$ 이다.
(단, x 와 y 는 1이 아닌 양수이다.)
ㄷ. $f\left(\frac{1}{x}\right) \leq 30$ 을 만족시키는 자연수 x 는 6개다.

[2011년 경찰대 19]

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

67. 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = \log_2 x$ 의 점 $(n, \log_2 n)$ 과 곡선 $y = 2^x$ 의 점 $(\log_2 n, n)$ 을 잇는 선분에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n 이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{2011} a_n$ 의 값은?

[2011년 경찰대 24]

- ① 2000 ② 2003 ③ 2006 ④ 2009 ⑤ 2012

68. 물질의 부패지수(Del)는 일평균상대습도가 $H\%$ 이고 일평균기온이 $T^\circ\text{C}$ 일 때, 다음과 같이 계산한다.

$$\text{부패지수(Del)} = \left(\frac{H-65}{14} \right) \times 1.05^T$$

일평균상대습도가 72% 이고 일평균기온이 30°C 일 때의 부패지수와 일평균상대습도가 $h\%$ 이고 일평균기온이 5°C 일 때의 부패지수가 서로 같다. 이때 h 의 값의 범위는? (단, $\log 1.05 = 0.021$, $\log 3.35 = 0.525$ 로 계산한다.)

[2011년 경찰대 14]

- ① $84 < h < 85$ ② $86 < h < 87$ ③ $88 < h < 89$
④ $90 < h < 91$ ⑤ $92 < h < 93$

69. $10^{0.76}$ 의 정수부분은? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ 로 계산한다.)

[3점][2011년 사관학교 가나04]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

70. n 이 자연수일 때, 집합 A_n 을

$$A_n = \{x \mid x^n = 2011, x \text{는 실수}\}$$

라 하자. 집합 A_n 의 원소의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때,

$$\sum_{n=1}^{2011} (-1)^n f(n) \text{의 값은?}$$

[3점][2011년 사관학교 나05]

- ① 502 ② 1004 ③ 1005 ④ 2010 ⑤ 2011

71. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 지수함수 $y = a^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼 평행이동시킨 것이다. 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이고, 모든 자연수 n 에 대하여 점 (n, a_n) 은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점일 때, 두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

[3점][2011년 사관학교 나08]

- ① $-\log_3 2$ ② $1 - \log_3 2$ ③ $2 - \log_3 2$
④ $3 - \log_3 2$ ⑤ $4 - \log_3 2$

72. 모든 실수 x 에 대하여 부등식

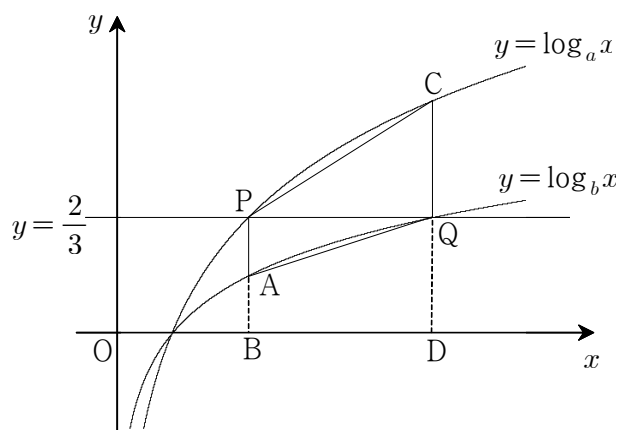
$$2^{4x} + a \cdot 2^{2x-1} + 10 > \frac{3}{4}a$$

를 만족시키는 자연수 a 의 최댓값은?

[3점][2011년 사관학교 나09]

- ① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

73. 그림과 같이 직선 $y = \frac{2}{3}$ 가 두 곡선 $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ 와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P를 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = \log_b x$ 와 x 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = \log_a x$ 와 x 축과 만나는 점을 각각 C, D라 하자.



$\overline{PA} = \overline{AB}$ 이고, 사각형 PAQC의 넓이가 1일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $1 < a < b$ 이다.)

[4점][2011년 사관학교 가나22]

- ① $12\sqrt{2}$ ② $14\sqrt{2}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $18\sqrt{2}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

74. 어떤 기계 장치는 작동하기 시작한 순간부터 시간이 지남에 따라 그 정확도가 점점 떨어진다고 한다. 이 기계가 작동하기 시작하여 t 시간이 되는 순간의 정확도를 $I(\%)$ 라 하면 관계식

$$I = a \log(t+7) + b \quad (a, b \text{는 상수}, 0 \leq t \leq 200)$$

가 성립한다고 한다. 처음 이 기계가 작동하기 시작한 순간의 정확도는 100이며, 작동하기 시작하여 28시간이 되는 순간의 정확도는 79라고 한다. 이 기계가 작동하기 시작하여 63시간이 되는 순간의 정확도는? (단, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.)

[3점][2011년 사관학교 가나13]

- ① 55 ② 60 ③ 65 ④ 70 ⑤ 75

75. 두 수 n, α 가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) n 은 자연수이고, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 이다.

(나) $\log_4 n = 1 - \alpha$

등식 $\log_2 m^2 = n + \alpha$ 를 만족시키는 실수 m 에 대하여 $3m^4$ 의 값을 구하시오.

[3점][2011년 사관학교 나26]

76. 방정식 $\sqrt{15}x^{\log_{15} x} = x^2$ 의 모든 실근의 곱은?

[2012년 경찰대 07]

- ① 15 ② 15^2 ③ 30 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\sqrt{15}$

77. 지질학에서 암석의 연대를 측정하는 방법 중 하나로 포타슘-40은 방사선 분해과정을 거쳐 일정한 비율로 아르곤-40으로 바뀌는 점을 이용한 포타슘-아르곤연대측정법을 사용한다. 암석이 생성되어 t 년이 되었을 때, 포타슘-40과 아르곤-40의 양을 각각 $P(t)$, $A(t)$ 라 하면

$$2^t = \left\{ 1 + 8.3 \times \frac{A(t)}{P(t)} \right\}^c \quad (\text{단, } c \text{는 상수이다.})$$

이 성립한다고 하자. 이 방법으로 암석의 연대를 측정하였을 때 포타슘-40의 양이 아르곤-40의 양의 20배인 암석이 생성된 것은 k 년 전이다. k 의 값은? (단, $\log 1.415 = 0.15$, $\log 2 = 0.30$ 으로 계산한다.)

[3점][2012년 사관학교 가나07]

- ① $\frac{1}{3}c$ ② $\frac{1}{2}c$ ③ $2c$ ④ $3c$ ⑤ $4c$

78. x, y 에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_2 \frac{1}{y} = 1 \\ \log_9 3x + \log_{\frac{1}{2}} y = 1 - \frac{k}{2} \end{cases}$$

의 해를 $x = \alpha$, $y = \beta$ 라 할 때, $\alpha \leq \beta$ 를 만족시키는 정수 k 의 최댓값은?

[3점][2012년 사관학교 나12]

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

79. $0 < a < b < 1$ 일 때, 직선 $y = 1$ 이 $y = \log_a x$ 의 그래프와 $y = \log_b x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 직선 $y = -1$ 이 $y = \log_a x$ 의 그래프와 $y = \log_b x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 네 직선 PS, PR, QS, QR의 기울기를 각각 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

[4점][2012년 사관학교 가나23]

- ① $\delta < \alpha < \beta < \gamma$ ② $\gamma < \alpha < \delta < \beta$
 ③ $\gamma < \alpha < \beta < \delta$ ④ $\gamma < \alpha = \delta < \beta$
 ⑤ $\alpha = \delta < \beta < \gamma$

80. 1보다 큰 실수 a 에 대하여 두 함수 $f(x) = a^{2x}$,

$g(x) = a^{x+1} - 2$ 가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = |f(x) - g(x)|$ 라 하자. $y = h(x)$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[4점][2012년 사관학교 가나24]

ㄱ. $a = 2\sqrt{2}$ 일 때 $y = h(x)$ 의 그래프와 x 축은 한 점에서 만난다.

ㄴ. $a = 4$ 일 때 $x_1 < x_2 < \frac{1}{2}$ 이면 $h(x_1) > h(x_2)$ 이다.

ㄷ. $y = h(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 이 오직 한 점에서 만나는 a 의 값이 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

81. 어떤 살아있는 쥐에 있는 세균 S의 개체 수는 4이고, 세균 T의 개체 수는 256이다. 그 쥐가 살아 있는 동안에는 두 세균의 개체 수에 변함이 없고, 죽는 순간부터 세균 S의 개체 수는 4시간마다 두 배로 증가하며, 세균 T의 개체 수는 6시간마다 두 배로 증가한다. 쥐가 죽은 후 두 세균 S와 T의 개체 수가 같아졌을 때, 세균 S의 개체 수는?

[2013년 경찰대 03]

- ① 2^{20} ② 2^{21} ③ 2^{22} ④ 2^{23} ⑤ 2^{24}

82. 어느 지역에 서식하는 어떤 동물의 개체 수에 대한 변화를 조사한 결과, 지금으로부터 t 년 후에 이 동물의 개체 수를 N 이라 하면 등식

$$\log N = k + t \log \frac{4}{5} \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

가 성립한다고 한다. 이 동물의 현재 개체 수가 5000일 때, 개체 수가 처음으로 1000보다 적어지는 때는 지금으로부터 n 년 후이다. 자연수 n 의 값은? (단, $\log 2 = 0.3010$ 으로 계산한다.)

[3점][2013년 사관학교 가나08]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

83. $\log_2 77$ 의 소수 부분을 a , $\log_5 77$ 의 소수 부분을 b 라 하자. 다음을 만족시키는 두 자연수 p 와 q 에 대하여 $p+q$ 의 최솟값은?

$$2^{p+a} 5^{q+b} \text{은 } 250 \text{의 배수이다.}$$

[2013년 경찰대 10]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

84. 집합 $G = \{(x, y) \mid y = 6^x, x \text{는 실수}\}$ 에 대하여 <보기>에서 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은?

[2013년 경찰대 04]

<보 기>

ㄱ. $(a, 2^b) \in G$ 이면 $b = a \log_2 6$ 이다.

ㄴ. $(a, b) \in G$ 이면 $\left(-a, \frac{1}{b}\right) \in G$ 이다.

ㄷ. $(a, b) \in G$ 이고 $(c, d) \in G$ 이면 $(a+c, b+d) \in G$ 이다.

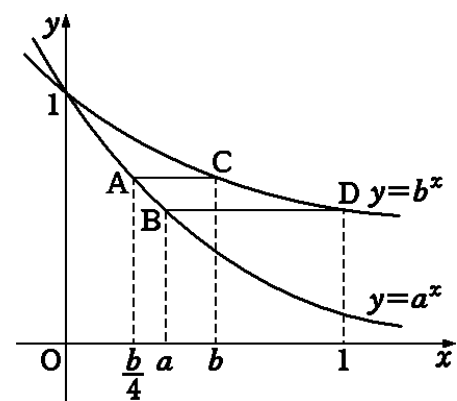
- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

85. 그림과 같이 $0 < a < b < 1$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 곡선

$y = a^x$ 위의 두 점 A, B의 x 좌표는 각각 $\frac{b}{4}, a$ 이고, 곡선

$y = b^x$ 위의 두 점 C, D의 x 좌표는 각각 $b, 1$ 이다. 두 선분 AC와 BD가 모두 x 축과 평행할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

[3점][2013년 사관학교 가나07]



- ① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{9}{16}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

86. $\log_{25}(a-b) = \log_9 a = \log_{15} b$ 를 만족시키는 두 양수 a, b 에 대하여 $\frac{b}{a}$ 의 값은?

[3점][2013년 사관학교 나12]

- ① $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{5}$
 ④ $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$

87. 부등식

$$\log_2(x+y-4) + \log_2(x+y) \leq 1 + \log_2 x + \log_2 y$$

를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $7y-x$ 의 최댓값을 구하여라.

[3점][2013년 사관학교 나26]

88. 지수방정식 $9^x - 2(a+4)3^x - 3a^2 + 24a = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 양수가 되도록 하는 모든 정수 a 의 값의 합을 구하여라.

[4점][2014년 경찰대 24]

89. 대기의 혼탁 정도를 나타내는 하나의 척도로 주간에 한 목표물을 볼 수 있는 최대거리는 시정거리를 사용한다. 상대습도가 70%일 때, 먼지농도 $d(\mu\text{g}/\text{m}^3)$ 와 시정거리 $x(\text{m})$ 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\log x = 3 + \log 1.2 - \log d$$

상대습도가 70%일 때, 시정거리가 3000(m) 이상이 되기 위한 먼지농도의 최댓값은 $d_1(\mu\text{g}/\text{m}^3)$ 이다. d_1 의 값은?

[3점][2014년 사관학교 나08]

- ① 0.1 ② 0.2 ③ 0.3 ④ 0.4 ⑤ 0.5

90. 양수 x 에 대하여 x 의 정수 부분을 $f(x)$ 라 할 때,

$$\sum_{k=1}^{10} f(2^k) + \sum_{k=2}^{1024} f(\log_2 k)$$

[4점][2014년 사관학교 나20]

- ① 9850 ② 9950 ③ 10050
 ④ 10150 ⑤ 10250

91. 로그방정식

$$\log_2(3x^2 + 7x) = 1 + \log_2(x + 1)$$

의 해는 $x = \frac{q}{p}$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라.

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

[3점][2014년 사관학교 나23]

92. 5^{25} 은 m 자리의 정수이고 5^{25} 의 최고 자리의 숫자는 n 이다.
 $m+n$ 의 값은? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ 로 계산한다.)

[3점][2015년 경찰대 03]

- ① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

93. $(\log_6 4)^2 + (\log_6 9)^2 + 2\log_6 4 \times \log_6 9$ 의 값은?

[2점][2015년 사관학교 나01]

- ① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

94. 어느 상품의 수요량이 D , 공급량이 S 일 때의 판매가격을 P 라 하면 관계식

$$\log_2 P = C + \log_3 D - \log_9 S$$

가 성립한다고 한다. 이 상품의 수요량이 9배로 증가하고 공급량이 3배로 증가하면 판매가격은 k 배로 증가한다. k 의 값은?

[3점][2015년 사관학교 가07나08]

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

95. 방정식 $\sqrt{2016}x^{\log_{2016} x} = x^2$ 의 해의 곱을 N 이라 할 때, N 의 마지막 두 자리를 구하면?

[4점][2016년 경찰대 06]

- ① 16 ② 36 ③ 56 ④ 76 ⑤ 96

96. 두 자연수 m, n 에 대하여 부등식 $\left| \log_3 \frac{m}{15} \right| + \log_3 \frac{n}{3} \leq 0$ 을 만족시키는 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하여라.

[4점][2016년 경찰대 23]

97. 어느 액체의 끓는 온도 $T(^{\circ}\text{C})$ 와 증기압 $P(\text{mmHg})$ 사이에는 다음 관계식이 성립한다.

$$\log P = k - \frac{1000}{T+250} \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

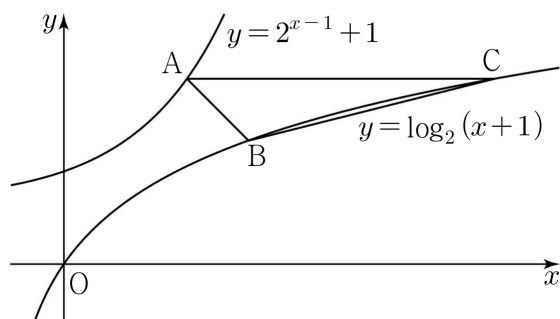
이 액체의 끓는 온도가 0°C 일 때와 50°C 일 때의 증기압을 각각 $P_1(\text{mmHg})$, $P_2(\text{mmHg})$ 라 할 때, $\frac{P_2}{P_1}$ 의 값은?

[3점][2016년 사관학교 가나08]

- ① $10^{\frac{1}{4}}$ ② $10^{\frac{1}{3}}$ ③ $10^{\frac{1}{2}}$ ④ $10^{\frac{2}{3}}$ ⑤ $10^{\frac{3}{4}}$

98. 그림과 같이 곡선 $y=2^{x-1}+1$ 위의 점 A와 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 두 점 B, C에 대하여 두 점 A와 B는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고, 직선 AC는 x 축과 평행하다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (p, q) 일 때, $p+q$ 의 값은?

[4점][2016년 사관학교 나18]



- ① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{17}{3}$ ③ 6 ④ $\frac{19}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

99. 연립방정식

$$\begin{cases} \log_x y = \log_3 8 \\ 4(\log_2 x)(\log_3 y) = 3 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$ 라 할 때, $\alpha\beta$ 의 값은? (단, $\alpha > 1$ 이다.)

[3점][2016년 사관학교 나10]

- ① 4 ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

100. $60^a = 5$, $60^b = 6$ 일 때, $12^{\frac{2a+b}{1-a}}$ 의 값을 구하시오.

[3점][2017년 경찰대 21]

101. 1이 아닌 두 양수 a , b 에 대하여 등식

$$\log_3 a = \frac{1}{\log_b 27}$$

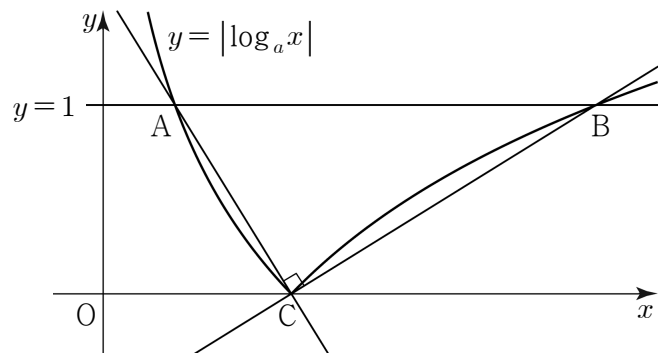
이 성립할 때, $\log_a b^2 + \log_b a^2$ 의 값은?

[3점][2017년 사관학교 나07]

- ① 6 ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$ ④ 8 ⑤ $\frac{26}{3}$

102. 그림과 같이 곡선 $y = |\log_a x|$ 가 직선 $y=1$ 과 만나는 점을 각각 A, B라 하고 x 축과 만나는 점을 C라 하자. 두 직선 AC, BC가 서로 수직이 되도록 하는 모든 양수 a 의 값의 합은? (단, $a \neq 1$)

[3점][2017년 사관학교 가13]



- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

103. $\log_m 2 = \frac{n}{100}$ 을 만족시키는 자연수의 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하시오.

[3점][2018년 경찰대 21]

104. $\log 6 = a$, $\log 15 = b$ 라 할 때, 다음 중 $\log 2$ 를 a , b 로 나타낸 것은?

[3점][2018년 사관학교 나08]

- ① $\frac{2a-2b+1}{3}$ ② $\frac{2a-b+1}{3}$ ③ $\frac{a+b-1}{3}$
 ④ $\frac{a-b+1}{2}$ ⑤ $\frac{a+2b-1}{2}$

105. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 $n^{\frac{4}{k}}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 k 의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어 $f(6)=3$ 이다. $f(n)=8$ 을 만족시키는 n 의 최솟값을 구하시오.

[4점][2018년 사관학교 나28]

106. 세 양수 a, b, c 에 대하여

$$\begin{cases} \log_{ab} 3 + \log_{bc} 9 = 4 \\ \log_{bc} 3 + \log_{ca} 9 = 5 \\ \log_{ca} 3 + \log_{ab} 9 = 6 \end{cases}$$

이 성립할 때, abc 의 값은?

[4점][2019년 경찰대 06]

- ① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

107. 부등식 $10^{10} \leq 2^x 5^y$ 을 만족시키는 양의 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 정수 부분을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$, $\log 5 = 0.7$ 로 계산한다.)

[4점][2019년 경찰대 23]

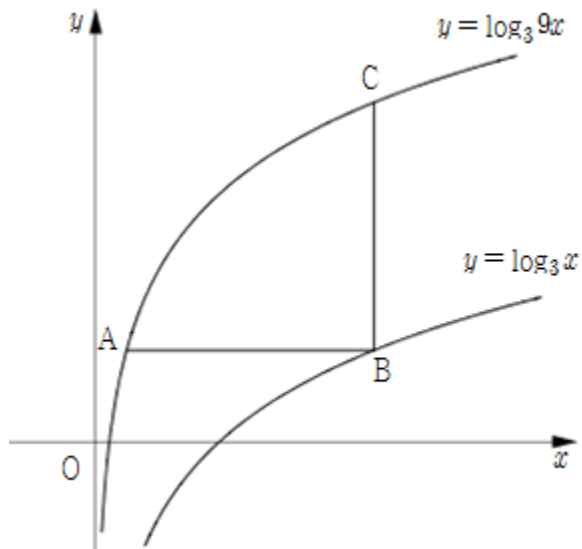
108. 방정식 $2^x + \frac{16}{2^x} = 10$ 의 모든 실근의 합은?

[2점][2019년 사관학교 가03]

- ① 3 ② $\log_2 10$ ③ $\log_2 12$ ④ $\log_2 14$ ⑤ 4

109. 곡선 $y = \log_3 9x$ 위의 점 $A(a, b)$ 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y = \log_3 x$ 와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = \log_3 9x$ 와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $a + 3^b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

[3점][2019년 사관학교 가13]



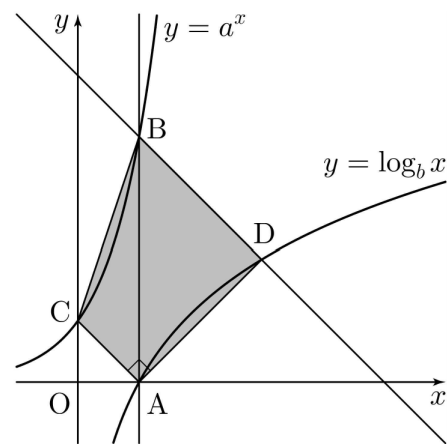
- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

110. $\sqrt{3\sqrt[4]{27}} = 3^{\frac{q}{p}}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[3점][2019년 사관학교 나22]

111. 그림과 같이 1보다 큰 두 상수 a, b 에 대하여 점 $A(1, 0)$ 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = a^x$ 과 만나는 점을 B라 하고, 점 $C(0, 1)$ 에 대하여 점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 곡선 $y = \log_b x$ 와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AC} \perp \overline{AD}$ 이고, 사각형 ADBC의 넓이가 6일 때, $a \times b$ 의 값은?

[4점][2020년 사관학교 가16]



- ① $4\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ 8 ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

112. 두 양수 a, b ($a > b$)에 대하여

$$9^a = 2^{\frac{1}{b}}, (a+b)^2 = \log_3 64$$

일 때, $\frac{a-b}{a+b}$ 의 값은?

[4점][2020년 사관학교 나15]

- ① $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{30}}{6}$

113. $\sqrt[3]{36} \times \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^2 = 2^a$ 일 때, a 의 값은?

[2점][2020년 사관학교 나02]

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

114. 실수 x 에 대하여 $2^{3x} = 9$ 일 때, $3^{\frac{2}{x}}$ 의 값은?

[3점][2020년 경찰대 01]

- ① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

115. $x > 1$ 일 때, $\log_x 1000 + \log_{100} x^4$ 가 $x = a$ 에서 최솟값 m 을 갖는다. $\log_0 a^m$ 의 값은?

[3점][2020년 경찰대 02]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

116. 두 실수 x, y 가 $\log_2(x + \sqrt{2}y) + \log_2(x - \sqrt{2}y) = 2$ 를 만족할 때, $|x| - |y|$ 의 최솟값은?

[5점][2020년 경찰대 19]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

제 2 교시

경찰대(99~20) • 사관학교(02~20) 정답 및 해설

수학 I-지수와 로그 (공 통)

성명		수험 번호												
----	--	-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

얼음 뚫고 봄의 빛장 열어 마주하는 희망

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고 하시오.
배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

GOGUMA LAB

2

수학 영역

[정답] 경찰대·사관학교 : 수학 I - 지수와 로그

- 1) $\frac{1}{2}$
- 2) 2
- 3) ①
- 4) 22
- 5) ④
- 6) ④
- 7) ⑤
- 8) ⑤
- 9) ⑤
- 10) ④
- 11) ①
- 12) ③
- 13) 16
- 14) ③
- 15) ①
- 16) ②
- 17) ③
- 18) ⑤
- 19) ①
- 20) ④
- 21) ④
- 22) ④
- 23) ⑤
- 24) ④
- 25) ③
- 26) ④
- 27) ③
- 28) 395
- 29) 20
- 30) ②
- 31) ⑤
- 32) ⑤
- 33) ③
- 34) 60
- 35) ②
- 36) ①
- 37) 200
- 38) ②
- 39) ④
- 40) ⑤
- 41) ③
- 42) ②
- 43) 22
- 44) 16
- 45) ③
- 46) ③
- 47) ⑤

- 48) ③
- 49) ⑤
- 50) ①
- 51) ⑤
- 52) 81
- 53) 75
- 54) ②
- 55) ⑤
- 56) ②
- 57) ③
- 58) ④
- 59) ②
- 60) ②
- 61) ②
- 62) ③
- 63) 11
- 64) ①
- 65) ⑤
- 66) ①
- 67) ②
- 68) ③
- 69) ①
- 70) ②
- 71) ⑤
- 72) ②
- 73) ③
- 74) ④
- 75) 256
- 76) ②
- 77) ②
- 78) ③
- 79) ②
- 80) ③
- 81) ①
- 82) ③
- 83) ②
- 84) ②
- 85) ③
- 86) ②
- 87) 32
- 88) 19
- 89) ④
- 90) ⑤
- 91) 10
- 92) ②
- 93) ②
- 94) ④
- 95) ③
- 96) 55

- 97) ④
- 98) ⑤
- 99) ③
- 100) 150
- 101) ②
- 102) ③
- 103) 9
- 104) ④
- 105) 64
- 106) ③
- 107) 172
- 108) ⑤
- 109) ⑤
- 110) 15
- 111) ②
- 112) ④
- 113) ①
- 114) ②
- 115) ①
- 116) ⑤

[해설] 경찰대·사관학교 : 수학 I - 지수와 로그

1) $\frac{1}{2}$

구간 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $y = x^2 - 4x - 1$ 의 개형을 고려하면 꼭지점 즉, $x = 2$ 에서 최솟값 -5 를 가지며, $x = 4$ 일 때 최댓값 -1 을 가진다. 지수함수의 경우 밑의 크기에 따라 함수의 개형이 단조 증가하는 경우와 단조 감소하는 경우로 달라지므로 다음과 같이 나누어 고려해야 한다.

1) $0 < a < 1$ 인 경우 :

단조 감소 하는 경우이므로 지수가 최소인 경우에 함수값이 최대이다. 즉,

$$a^{-5} = 32, \quad a = \frac{1}{2}$$

2) $a > 1$ 인 경우 :

단조 증가하는 경우이므로 지수가 최대일 때 함수값은 최대가 된다. 즉,

$$a^{-1} = 32, \quad a = \frac{1}{32}$$

이므로 전제조건에 부합하지 않는다.

2) 2

$$a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 = 0$$

$$(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 = 0$$

$$\therefore a = b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

3) ①

$$a = 9^x \Leftrightarrow x = \log_9 a = \frac{1}{2} \log_3 a, \quad b = 3^y \Leftrightarrow y = \log_3 b$$

$$\therefore \log_a \sqrt{b} = \frac{\frac{1}{2} \log_3 b}{\log_3 a} = \frac{\frac{1}{2} y}{2x} = \frac{y}{4x}$$

4) 22

$3^n = 31381059609$ (11자리정수) 이므로 로그의 성질에서

$$10 < \log 3^n < 11 \Leftrightarrow \frac{10}{\log 3} < n < \frac{11}{\log 3}$$

$$\therefore 21. \dots < n < 22. \dots$$

$$\therefore n = 22$$

5) ④

$P(1, 2)$ 이므로

$$\text{i) } 2^x = 2 \therefore x = 1 \therefore A(1, 2) \text{ 또, } B(2, 4)$$

$$\text{ii) } \log_2 x = 2 \therefore x = 4 \therefore C(4, 2) \text{ 또, } D(2, 1)$$

$$\text{그러므로 } \triangle ADP = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\triangle BPC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

$$\triangle ADP : \triangle BPC = 1 : 4$$

6) ④

$$\neg. 10000 = 3^0 \times 10000 \text{ 이므로 } \therefore f(10000) = 0$$

$$\neg. \text{ 반례) } f(3) = 1, \quad f(4) = 0$$

$$\neg. n_1 < n_2 \text{ 이면 } f(3_1^n) = n_1 < f(3_2^n) = n_2 \text{이다.}$$

7) ⑤

$$\text{i) } 10 \log_{10} \frac{I_{\text{지}}}{I_0} = 100 \Leftrightarrow \log_{10} \frac{I_{\text{지}}}{I_0} = 10$$

$$\therefore I_{\text{지}} = 10^{10} I_0$$

$$\text{ii) } 10 \log_{10} \frac{I_{\text{제}}}{I_0} = 150 \Leftrightarrow \log_{10} \frac{I_{\text{제}}}{I_0} = 15$$

$$\therefore I_{\text{제}} = 10^{15} I_0 = 10^5 I_{\text{지}}$$

$$\therefore 10^5 \text{ 배}$$

8) ⑤

주어진 식으로부터

$$2^y = 4^x + 6 \cdot 2^x \dots (1)$$

$2^x = t$ ($t > 0$) 로 치환하고 식 (1)을 이용하면

$$2^y = t^2 + 6t = t(t+6) > 0 \dots (2)$$

$$\therefore t > 0 \text{ 또는 } t < -6$$

$$\therefore t > 0 \quad (\because t (= 2^x) > 0)$$

그러므로

$$\begin{aligned} \text{준 식} &= -10 \cdot 2^x + 2^y \\ &= (2^x)^2 - 4 \cdot (2^x) \\ &= t^2 - 4t \\ &= (t-2)^2 - 4 \quad (t > 0) \end{aligned}$$

준 식은 $t = 2$ 일 때 최솟값 -4 이다. 따라서,

$$t = 2^x = 2, \quad \therefore x = 1$$

$$2^y = t^2 + 6t = 4 + 12 = 16,$$

$$\therefore y = 4 \quad (\because \text{식 (2)})$$

$$\therefore x + y = 5$$

9) ⑤

$$4^{\frac{1}{3}} \div 8^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{3}} \div 2^{-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}} = 2^{\frac{13}{6}} = 4^{\frac{13}{12}}$$

10) ④

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$f(x) = f(g(2^x + 6))$ 에서 $4^x = 2^x + 6$ 이다.

$2^x = t$ ($t > 0$) 라 두면

$$t^2 - t - 6 = 0 \text{ 에서}$$

$$t = -2 \text{ 또는 } t = 3$$

$$\therefore t = 2^x = 3 \quad \therefore \alpha = \log_2 3$$

$$\therefore 1 \leq \alpha < 2$$

11) ①

2003 년도 학교 전체 예산을 A 원이라 두면

	학교전체예산	학생복지금
2003년도	A	$0.011A$
n 년 후	$(1+0.05)^n A$	$(1+0.07)^n 0.011 A$

$$(1+0.07)^n 0.011 A \geq 0.013 \times (1+0.05)^n A \text{ 이므로}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$n \log 1.07 + \log 0.011 \geq n \log 1.05 + \log 0.013$$

$$(\log 1.07 - \log 1.05) n \geq \log 0.013 - \log 0.011$$

주어진 상용로그표에서

$$\log 1.07 = 0.0294, \quad \log 1.05 = 0.0212$$

$\log 1.3 = 0.1139$ 이므로 $\log 0.013 = -2 + 0.1139$ 이고,
 $\log 1.1 = 0.0414$ 이므로 $\log 0.011 = -2 + 0.0414$ 이다.
 $\therefore (0.0294 - 0.0212)n \geq (-2 + 0.1139) - (-2 + 0.0414)$
 $0.0082 \times n \geq 0.0725$
 $\therefore n \geq 8.8 \cdots$ 이므로 9 년후

12) ㉓

연산 $4 * x$ 를 각각 계산하면

$4 * 2 = 4 - (4 - 2) [\log_4 2] = 4 - 2 \left[\frac{1}{2} \right] = 4 \therefore 4 * 2 = 4$
 $4 * 3 = 4 - (4 - 3) [\log_4 3] = 4 - [\log_4 3] = 4 \therefore 4 * 3 = 4$
 $4 * 4 = 4 - (4 - 4) [\log_4 4] = 4 \therefore 4 * 4 = 4$
 $4 * 5 = 5 - (5 - 4) [\log_5 4] = 5 - [\log_5 4] = 5 \therefore 4 * 5 = 5$
그러므로 방정식 $4 * (4 * x) = x$ 에서
i) $x = 2$ 이면 $4 * (4 * 2) = 4 * 4 = 4$ (×)
ii) $x = 3$ 이면 $4 * (4 * 3) = 4 * 4 = 4$ (×)
iii) $x = 4$ 이면 $4 * (4 * 4) = 4 * 4 = 4$ (○)
iv) $x = 5$ 이면 $4 * (4 * 5) = 4 * 5 = 5$ (○)
 $\therefore x = 4$ 또는 $x = 5$

13) 16

$|\log_2 a - 2| = |\log_2 b - 2|$ 이고, $a \neq b$ 이므로
 $\log_2 a - 2 = -(\log_2 b - 2)$
 $\log_2 a + \log_2 b = 4$
 $\log_2 ab = 4$
 $\therefore ab = 16$

14) ㉓

$2^x = X, 2^y = Y$ (단, $X > 0, Y > 0$)
로 놓으면 주어진 식은 다음과 같다.

$X^2 = 8X - 2Y \cdots (1)$
 $Y^2 = 8Y - 2X \cdots (2)$

그러므로

$X^2 + Y^2 = 6(X + Y) \cdots (3)$
 $X^2 - Y^2 = 10(X - Y) \cdots (4)$

1) $X = Y$ 인 경우 : 식 (3)에 의해

$X^2 - 6X = X(X - 6) = 0$
 $X = 2^x = 6, Y = 2^y = 6$ ($\because X > 0, Y > 0$)
 $\therefore (x, y) = (\log_2 6, \log_2 6)$

2) $X \neq Y$ 인 경우: 식 (4)에 의해

$X + Y = 10 \cdots (5)$
식 (3)을 이용하면
 $X^2 + Y^2 = (X + Y)^2 - 2XY = 10^2 - 2XY = 6 \cdot 10$
 $\therefore XY = 20 \cdots (6)$
식 (5)와 (6)으로부터
 $X = 2^x = 5 \pm \sqrt{5}, Y = 2^y = 5 \mp \sqrt{5}$
 $\therefore (x, y) = (\log_2 (5 + \sqrt{5}), \log_2 (5 - \sqrt{5}))$
 $\qquad \qquad \qquad = (\log_2 (5 - \sqrt{5}), \log_2 (5 + \sqrt{5}))$

$\left[\sum_{k=1}^n a_k \right] = [\log_2 6 + \log_2 (5 - \sqrt{5}) + \log_2 (5 + \sqrt{5})]$
 $\qquad \qquad \qquad = [\log_2 120]$
 $\qquad \qquad \qquad = 6$

15) ㉑

$pq = [p + q]$ 이므로
 $\frac{\log_2 p}{p} + \frac{\log_2 q}{q} = \frac{q \log_2 p + p \log_2 q}{pq} \cdots \cdots \textcircled{㉑}$
 $\qquad \qquad \qquad = \frac{q \log_2 p + p \log_2 q}{[p + q]}$

$\overline{PQ}$ 를 $p : q$ 로 내분하는 점을 $R(x_0, y_0)$ 라 하면

$x_0 = \frac{pq + qp}{p + q} = \frac{2pq}{p + q} = [2],$
 $y_0 = \frac{q \log_2 p + p \log_2 q}{p + q} \cdots \cdots \textcircled{㉒}$

그런데 곡선 $y = \log_2 x$ 는 [위로 볼록] 이므로

$y_0 \leq \log_2 x_0$ 이다.

따라서 ㉑, ㉒에서

$\frac{\log_2 p}{p} + \frac{\log_2 q}{q} \leq 1$

16) ㉒

준식) $= 4(\log_6 2)^2 + 4(\log_6 3)^2 + 8(\log_6 2)(\log_6 3)$
 $= 4(\log_6 2 + \log_6 3)^2 = 4$

17) ㉓

$\frac{2^{500}}{A}$ 을 10^n (n 은 음의 정수)의 꼴로 나타낼려면
 $A = 2^{500} \times 10^m$ (m 은 양의 정수)꼴이어야 하므로
 A 의 최고자리의 숫자는 2^{500} 의 최고자리의 수와 같다.
 $\log_{10} 2^{500} = 500 \log_{10} 2 = 500 \times 0.3010 = 150 + 0.5000$
그러므로 $\log_{10} 2^{500}$ 의 가수가 0.5 는
 $\log_{10} 3 = 0.4771 < 0.5000 < 0.6020 = \log_{10} 4$ 이다.
 $\log_{10} 3 \times 10^{150} < \log_{10} 2^{500} < \log_{10} 4 \times 10^{150}$
 $\therefore 3 \times 10^{150} < 2^{500} < 4 \times 10^{150}$ 이므로
그러므로 최고자리 숫자는 3

18) ㉕

직선의 방정식은 $y = -2x + 3$ 이고
점 $P(a, b)$ 가 직선 위의 임의의 점이므로 $b = -2a + 3$ 이다.
 $\therefore 9^a + 3^b = 3^{2a} + 3^{-2a+3} \geq 2 \times \sqrt{3^{2a} \times 3^{-2a+3}} = 6\sqrt{3}$

19) ㉑

주어진 그래프에서
 $A(4, \log_3 4)$ 이므로 $P(2 \log_3 2, 2 \log_3 2)$ 이다.
 $\overline{OP} = \sqrt{(2 \log_3 2)^2 + (2 \log_3 2)^2} = 2\sqrt{2} \log_3 2$
 $B(\log_2 3, 3)$ 이므로 $Q(\log_2 3, \log_2 3)$ 이다.
 $\overline{OQ} = \sqrt{(\log_2 3)^2 + (\log_2 3)^2} = \sqrt{2} \log_2 3$
 $\therefore \overline{OP} \cdot \overline{OQ} = 2\sqrt{2} \log_3 2 \times \sqrt{2} \log_2 3 = 4$

20) ㉔

주어진 식 $\log B = \log B_0 - 0.03nr$ 에 $n = 1, r = 0.5$ 을 대입하면
 $\log \frac{B}{B_0} = -0.015 \Leftrightarrow \frac{B}{B_0} = 10^{-0.015}$

$$\log 10^{-0.015} = -0.015 = -1 + 0.9850$$

지표는 -1 , 가수는 0.9850 이고

주어진 상용로그표에서 $\log 9.66 = 0.9850$ 이므로

$$\therefore \frac{B}{B_0} = 10^{-0.015} = 0.996$$

$\therefore B = 0.996B_0$ 이므로 96.6% 정도로 줄어든다.

21) ④

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{n}} = (3^{-4})^{\frac{1}{n}} = 3^{-\frac{4}{n}} \dots (1)$$

식 (1)의 값이 자연수가 될 수 있는 n 값은 $-1, -2, -4$ 이다.

$$1) n = -1 \text{ 일 때 : } 3^3 = 81$$

$$2) n = -2 \text{ 일 때 : } 3^2 = 9$$

$$3) n = -4 \text{ 일 때 : } 3^1 = 3$$

따라서,

$$81 + 9 + 3 = 93$$

22) ④

주어진 식을 변형하면

$$\text{준 식} = \frac{\frac{\log 2}{\log x} + \frac{\log 2}{\log y}}{\log 2} = \frac{(\log x + \log y)^2}{\log x \cdot \log y} \dots (1)$$

$x > 1, y > 1$ 이므로 $\log x > 0, \log y > 0$

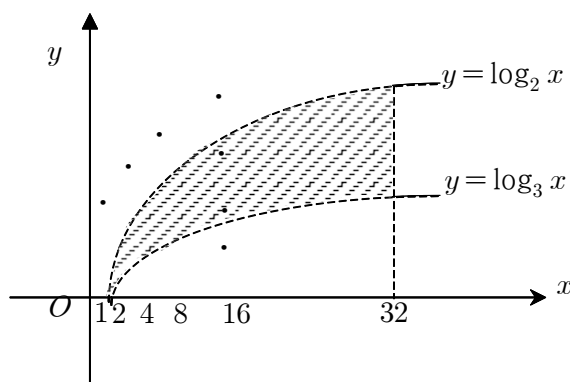
따라서, 산술기하평균에 의해

$$\frac{\log x + \log y}{2} \geq \sqrt{\log x \cdot \log y}$$

이를 이용하면 식 (1)은

$$\frac{(\log x + \log y)^2}{\log x \cdot \log y} \geq \frac{(2\sqrt{\log x \cdot \log y})^2}{\log x \cdot \log y} = \frac{4\log x \cdot \log y}{\log x \cdot \log y} = 4$$

23) ⑤



그림의 $x=16$ 인 경우에 빗금 친 영역 내에 있는 정수 격자점의 수는

$$[\log_2 16] - [\log_3 16] - 1$$

마지막 항은 곡선 $y = \log_2 x$ 위의 격자점은 제외하는 것을 의미한다.

같은 방법을 이용하면 빗금 친 영역 내에 있는 정수 격자점의 수는

$$\sum_{k=2}^{31} [\log_2 k] - \sum_{x=1}^{31} [\log_3 k] - 4$$

첫 번째 항은

$$\sum_{k=1}^{31} [\log_2 k] = (1 \times 2) + (2 \times 4) + (3 \times 8) + (4 \times 16) = 98$$

두 번째 항은

$$\sum_{x=1}^{31} [\log_3 k] = (1 \times 6) + (2 \times 18) + (3 \times 5) = 57$$

따라서, 정수 격자 점의 수는

$$98 - 57 - 4 = 37$$

24) ④

$0 < a < 1$ 에서 $f(x) = a^x$ 는 감소 함수이고

$$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n} \text{ 이므로 } A > C > B$$

25) ③

$\log_y (1-x^2) \leq 2$ 에서 y 는 로그의 밑이므로 $y > 0, y \neq 1$ 이고

$$1-x^2 > 0 (\because \text{로그의 진수}) \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$$(i) 0 < y < 1 \text{ 일 때, } \begin{cases} 1-x^2 \geq y^2 \\ y \leq 2x+1 \end{cases}, -1 < x < 1$$

$$(ii) y > 1 \text{ 일 때, } \begin{cases} 1-x^2 \leq y^2 \\ y \leq 2x+1 \end{cases}, -1 < x < 1$$

$$\text{이므로 영역의 넓이는 } \frac{\pi+5}{4}$$

26) ④

$3(\log_a c)^2 - 2(\log_b c)^2 = -(\log_a c)(\log_b c)$ 을 인수분해하면

$$(3\log_a c - 2\log_b c)(\log_a c + \log_b c) = 0$$

$\neg$) $\log_a c + \log_b c = 0$ 이면

$$\log_a c = -\log_b c$$

$$\log a + \log b = \log ab = 0$$

$$\therefore ab = 1 \quad (a > 1, b > 1 \text{에 모순})$$

$\neg$) $3\log_a c - 2\log_b c = 0$ 이면

$$3\log_a c = 2\log_b c$$

$$3\log b = 2\log a$$

$$\therefore a^2 = b^3$$

여기서 $a^2 b^3 = 64$ 이므로

$$a^2 = b^3 = 8$$

$$a = 2\sqrt{2}, b = 2$$

$$\log_2 ab = \log_2 4\sqrt{2} = \frac{5}{2}$$

27) ③

$x = \log_3 z$ 라고 하면

$$f(x) = 9^x + a = 9^{\log_3 z} + a = z^2 + a \equiv p(z)$$

$$g(x) = b \cdot 3^x + 2 = b \cdot 3^{\log_3 z} + 2 = bz + 2 \equiv q(z)$$

문제의 조건에서 $f(x) = g(x)$ 의 근은

$$x = \log_3 2, x = \log_3 k \quad (k > 2) \text{ 이므로}$$

$p(z) = q(z)$ 의 근은 $z = 2, z = k \quad (k > 2)$ 이다.

$$p(z) = q(z) \Leftrightarrow z^2 + a = bz + 2$$

$$\Leftrightarrow z^2 - bz + a - 2 = 0 \text{ ----- ①}$$

z 에 대한 이차 방정식은 서로 다른 두 실근 $2, k \quad (k > 2)$ 을

가지므로

$$(\text{판별식}) = (-b)^2 - 4 \cdot (a-2) > 0 \Leftrightarrow b^2 > 4a-8 : (\neg) \text{은}$$

거짓

$z = 2$ 는 방정식의 근이므로

$4 - 2b + a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2b - 2 : (\sqcup)$ 은 참
 (두 근의 곱) $= 2k = a - 2 > 4 (\because k > 2)$
 $\Leftrightarrow a > 6 : (\sqsubset)$ 은 참

28) 395

$$\log_a \frac{I_0}{I} = kx \Leftrightarrow \frac{I_0}{I} = a^{kx}$$

$$x = 0.2 \text{ 일 때, } I = \frac{5}{6} I_0 \text{ 이므로 } \frac{I_0}{\frac{5}{6} I_0} = a^{\frac{k}{5}}$$

$$\therefore a^k = \left(\frac{6}{5}\right)^5$$

$$\therefore 1000 \log_{10} a^k = 1000 \log_{10} \left(\frac{6}{5}\right)^5 = 5000 \times 0.079 = 395$$

29) 20

$$\frac{2}{\log_x 4} + \frac{1}{\log_y 2} = 3 \text{ -----①}$$

$$\log_2 3x + \log_{\sqrt{2}} y = \log_2 48 \text{ -----②}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 y = 3 \text{ -----①'}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \log_2 x + 2\log_2 y = \log_2 \frac{48}{3} = 4 \text{ -----②'}$$

①', ②'의 연립 방정식을 풀면

$$\log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 = 4$$

$$\log_2 y = 1 \Leftrightarrow y = 2$$

$$\therefore \alpha = 4, \beta = 2 \text{ 이므로 } \alpha^2 + \beta^2 = 20$$

30) ②

$$\log_4 x = X, \log_4 y = Y \text{ 라 하면 } 1 < [X]^2 + [Y]^2 < 4$$

즉, $[X]^2 + [Y]^2 = 2, 3$ 이다.

1) $[X]^2 + [Y]^2 = 2$ 인 경우 :

x, y 가 정수이므로 가능한 경우는 $[X] = 1, [Y] = 1$ 인 경우 뿐이다. 따라서,

$$1 \leq \log_4 x < 2, 1 \leq \log_4 y < 2$$

$$4 \leq x < 16, 4 \leq y < 16$$

가능한 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13 = 78 \text{ (가지)}$$

2) $[X]^2 + [Y]^2 = 3$ 인 경우 : 존재하지 않는다.

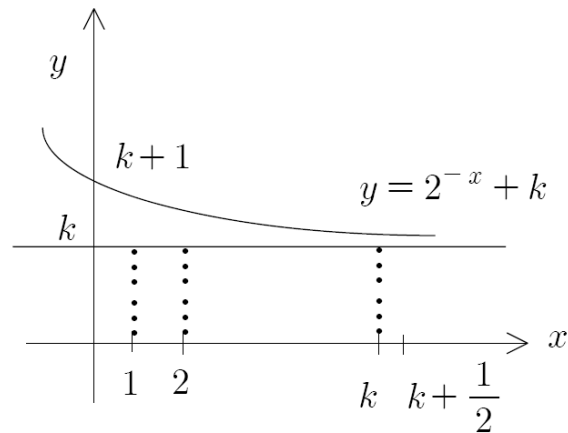
따라서, 답은 78 가지이다.

31) ⑤

그림과 같이 $x = k$ 일 때 주어진 부등식의 영역 내에 있는 격자점의 수 $N(k)$ 는

$$N(k) = \sum_{n=1}^k \left[\frac{1}{2^n} + k \right] = \sum_{n=1}^k k = k^2 \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{10} N(k) = \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 = 385$$



32) ⑤

밑 조건에 의하여 a, b, c 는 1이 아닌 양수이고 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$b^2 = ac \cdots (1)$$

$\because a, b, c$ 가 양수이므로 산술 · 기하평균에 의하여

$$\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac} = \sqrt{b^2} = b$$

따라서, $a+c$ 의 최솟값은 $2b$ 이다 (참)

$$\because \frac{1}{f(5)} = \log_5 a, \frac{1}{5} = \log_5 b, \frac{1}{h(5)} = \log_5 c \text{ 이므로}$$

식 (1)의 양 변에 밑이 5인 로그를 취하면

$$2\log_5 b = \log_5 a + \log_5 c$$

$$\therefore \frac{2}{g(5)} = \frac{1}{f(5)} + \frac{1}{f(5)}$$

따라서 $\frac{1}{f(5)} = \frac{1}{f(5)} + \frac{1}{h(5)}$ 는 등차수열을 이룬다. (참)

$\because x_1 = a^5, x_2 = b^5, x_3 = c^5$ 이므로 식 (1)에 대입하면

$$\left[\frac{1}{x_2^5} \right] = \left[\frac{1}{x_1^5} \right] + \left[\frac{1}{x_3^5} \right]$$

$$\therefore x_2^2 = x_1 \cdot x_3$$

따라서, x_1, x_2, x_3 은 등비수열을 이룬다. (참)

33) ③

지표면에서 원소의 밀도를 a 라 하면 밀도가 $\frac{1}{2}$ 배인 지점 x_1 에서

$$\text{다음 관계가 성립한다. } \log \frac{1}{2} a = \log a + kx_1$$

$$\therefore x_1 = -\frac{\log 2}{k}$$

마찬가지로 원소의 밀도가 $\frac{1}{1000}$ 배인 지점 x_2 에서

$$\text{관계식은 } \log \frac{1}{1000} a = \log a + kx_2 \quad \therefore x_2 = -\frac{3}{k}$$

$$\text{따라서 } \frac{x_2}{x_1} = \frac{-\frac{3}{k}}{-\frac{\log 2}{k}} = \frac{3}{\log 2} = \frac{3}{0.3} = 10$$

34) 60

$$\frac{2^{68} \times 5^{68}}{2^7 \times 5^7 + 2^4 \times 5^4} = \frac{10^{68}}{10^7 + 10^4} \text{ 이고}$$

$a > 0$ 일 때, $y = \frac{a}{x} (x > 0)$ 는 감소함수이므로

$$\frac{9 \times 10^{68}}{10^8} < \frac{10^{68}}{10^7 + 10^4} < \frac{10^{68}}{10^7} \quad (\because \frac{10^8}{9} > 10^7 + 10^5 > 10^7)$$

$$\frac{9 \times 10^{68}}{10^8} = 9 \times 10^{60}, \quad \frac{10^{68}}{10^7} = 10^{61}$$

$$\therefore 9 \times 10^{60} < \frac{10^{68}}{10^7 + 10^4} < 10^{61}$$

$$\therefore \frac{10^{68}}{10^7 + 10^4} = a \times 10^{60} \quad (9 < a < 10) \text{ 이므로}$$

$n = 60$ 이다.

35) ㉔

$(17.8)^n$ 이 9자리수가 되기 위해서 $8 \leq \log(17.8)^n < 9$ 이어야 한다.

$$\log 17.8 = \log 1.78 \times 10 = 1.25 \text{ 이므로}$$

$$\frac{8}{\log 17.8} \leq n < \frac{9}{\log 17.8}$$

$$\frac{32}{5} \leq n < \frac{36}{5}$$

$$\therefore n = 7$$

36) ㉑

현재의 혈중농도를 a 라 하고,

10 시간마다 측정하는 혈중농도를 수열 a_n 으로 고려하면

10 시간 후의 농도 $a_1 = \frac{1}{2}a$ 이고,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$$

이므로, 수열 $\{a_n\}$ 은 초항이 $\frac{1}{2}a$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다.

따라서,

$$a_n = \frac{1}{2}a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

따라서, 혈중농도가 $\frac{2}{5}a$ 가 될 때의 n 값은

$$a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{5}a$$

$$n = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{5} = -\log_2 \frac{2}{5} = -\frac{\log 2 - \log 5}{\log 2}$$

$$= -\frac{\log 2 - (1 - \log 2)}{\log 2} = \frac{1 - 2\log 2}{\log 2} = \frac{0.4}{0.3} = \frac{4}{3}$$

그러므로 걸리는 시간은

$$\frac{4}{3} \times 10 = 13 \text{ 시간 } 20 \text{ 분}$$

37) 200

$$v(0) = a = 1000$$

$$v\left(\frac{1}{100}\right) = 1000 \cdot b = 50 \text{ 에서 } b = \frac{1}{20}$$

$$100\sqrt{5} = 1000 \cdot b^{100p} \text{ 에서 } b^{100p} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

$$100p \log \frac{1}{20} = \log \sqrt{\frac{1}{20}} \text{ 에서 } 100p = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{p} = 200$$

38) ㉔

모든 실수 x, y 에 대하여 $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ 을 만족하기

위해서 함수의 개형은 아래로 볼록한 형태이어야 한다.

ㄱ. 함수 $f(x) = \sqrt{|x|}$ 는 $y = \sqrt{x}$ (단, $x \geq 0$)와

$y = \sqrt{-x}$ (단, $x < 0$)이므로 $x < 0 < y$ 인 경우에 만족하지 않는다. (거짓)

ㄴ. 함수 $f(x) = 2^{|x|}$ 는 $y = \begin{cases} 2^x & (x \geq 0) \\ 2^{-x} & (x < 0) \end{cases}$ 이므로 모든 실수 x, y 에

대하여 조건을 만족한다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x) = \log_2(|x|+1)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x+1) & (x \geq 0) \\ \log_2(-x+1) & (x < 0) \end{cases}$$

이므로 $x < 0 < y$ 인 경우에 조건을 만족하지 않는다. (거짓)

39) ㉔

주어진 식은 결국 $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{y+1}{x+3}\right)$ 의 최솟값을 구하라는 것과 같다.

그런데, 밑은 $0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 $\frac{y+1}{x+3}$ 이 최대일때 주어진 식은

최솟값을 갖는다.

여기서, $\frac{y+1}{x+3}$ 의 의미를 살펴보면 $\frac{y-(-1)}{x-(-3)}$, 즉 원 위의 점

$P(x, y)$ 와 $(-3, -1)$ 을 이은 직선의 기울기의 최댓값을 구하라는 것으로 해석할 수 있다.

이 때, 기울기의 최솟값은 $(-3, -1)$ 을 지나면서 기울기가 k 인

직선이 원과 접할 때의 k 값이다.

$$\therefore y+1 = k(x+3), \quad kx - y + 3k - 1 = 0$$

결국 원의 중심으로부터 직선까지의 거리가 1이 되는 그러한 m 값을 찾아주면 된다.

$$\therefore \frac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}} = 1 \Rightarrow 4k^2 - 3k = 0, \quad \therefore k = \frac{3}{4} \quad (\because y \neq -1)$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{y+1}{x+3}\right) \geq \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{4} = m$$

$$\therefore 2^m = \frac{4}{3}$$

40) ㉕

$$a^2 \sqrt[5]{b} = 1 \Rightarrow a^{10}b = 1 \Rightarrow a^{10} = \frac{1}{b}$$

$$\therefore \log_a \frac{1}{b} = 10$$

$$\therefore \log_a \frac{1}{ab} = -1 + \log_a \frac{1}{b} = 9$$

41) ㉓

$\log x = n + \alpha$ 라 하자. (단, n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)

준식에 대입해서 정리하면

$$(n+\alpha)^2 + \alpha^2 = 8, \quad n^2 + 2\alpha n + 2\alpha^2 = 8$$

$x > 1$ 이면서 n 값은 정수이므로 $n = 0, 1, 2, \dots$ 등이 가능하다.

i) $n = 0$ 인 경우

$\alpha^2 = 4$ 를 만족시키는 실수 α 는 존재하지 않는다.

ii) $n = 1$ 인 경우

$$2\alpha^2 + 2\alpha - 7 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{15}}{2}$$

(주어진 α 의 범위를 만족시키지 않는다.)

iii) $n=2$ 인 경우
 $\alpha^2+2\alpha-2=0 \Rightarrow \alpha=-1+\sqrt{3} (\because 0 \leq \alpha < 1)$
 $n \geq 3$ 인 경우 가수 조건을 만족시키는 α 는 존재하지 않는다.
 $\therefore \log x=n+\alpha=2+(-1+\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$

42) ②
ㄱ) $0 < \log_a c < 1$ 이므로 $1 < c < a$ 를 만족시킨다. ($\because a > 1$)
그러므로, 구한 부등식의 양변에 $\log_b$ 를 달아주면 $\log_b c < \log_b a$ 를 만족한다.
ㄴ) $0 < \log_a c < 1$ 이므로 $a < c < 1$ 를 만족시킨다.
 $b > 1$ 이므로 $\log_b a < \log_b c$ 가 성립한다.
ㄷ) $\log_a c < 0$ 이므로 $c > 1$ 이다. 그러므로 $\log_a b > \log_c b$ 가 성립한다
 $\therefore$ ㄴ만 옳다.

43) 22
 $2.52^{10n} = N$ 이라 두고 양변에 상용로그를 취해주면
 $\log N = 10n \log 2.52 = 4 + 0.014n$ 이 된다.
이 때, $0.014n$ 은 $n \leq 71$ 일 때, 1보다 작으므로 저 범위에서 0.014는 소수부분이 된다.
최고자리수는 결국 그 소수부분의 범위와 관련이 있으므로
 $\log 2 \leq 0.014n < \log 3$ 을 만족시키는 최소의 n 값을 구해주면 된다.
여기서, $\log 2 = 0.3010$ 이므로 $0.3010 \leq 0.014n$,
 $14n \geq 301 \Rightarrow \therefore n \geq \frac{301}{14} = 21.5$
따라서, a_n 값이 1이 되는 자연수 n 의 최솟값은 22이다.

44) 16
 $\log_2 x = t$ 라 두면 주어진 방정식의 두 근은 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 가 된다.
 $3(1-t)^2 - 2(1-t) - 4 = 0, 3t^2 - 4t - 3 = 0$
이 방정식의 두 근의 합은 $\log_2 \alpha + \log_2 \beta = \log_2 \alpha \beta = -\frac{(-4)}{3} = \frac{4}{3}$
 $\therefore \alpha \beta = 2^{\frac{4}{3}}$
 $\therefore \alpha^3 \beta^3 = (\alpha \beta)^3 = \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^3 = 2^4 = 16$

45) ③
주어진 조건에서 50일 까지의 흥행 수입은 400억원 이므로
 $f(50) = a(1-b^{50}) = 400 \dots\dots(1)$
또한, 100일 까지의 흥행 수입은 640억원 이므로
 $f(100) = a(1-b^{100}) = a(1-b^{50})(1+b^{50}) = 640 \dots\dots(2)$
(1)식을 (2)식에 대입하면
 $400(1+b^{50}) = 640, 1+b^{50} = \frac{640}{400} = \frac{8}{5} \Rightarrow \therefore b^{50} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$
양변에 상용로그를 취해 계산하면
 $50 \log b = \log 6 - \log 10 = 0.30 + 0.48 - 1 = -0.22$
 $\therefore \log b = -\frac{0.22}{50} = -\frac{44}{10000} \Rightarrow b = 10^{-\frac{44}{10000}}$
이 여기서, 이 값을 (1)식에 대입하면
 $a\left(1-\frac{3}{5}\right) = 400$
 $\therefore a = 1000$
 $f(n) = 1000\left(1-10^{-\frac{44}{10000}n}\right)$
 $f(n)$ 값이 800이상이 되는 n 값을 구해주는 것이므로

$1000\left(1-10^{-\frac{44}{10000}n}\right) \geq 800$
 $\frac{2}{10} \geq 10^{-\frac{44}{10000}n} \Rightarrow \frac{10}{2} \leq 10^{\frac{44}{10000}n}$
양변에 상용로그를 취하면
 $1 - \log 2 = \frac{7}{10} \leq \frac{44}{10000}n$
 $\therefore n \geq \frac{7000}{44} \approx 159.0909 \dots$
따라서 개봉 후 160일 후에 처음으로 흥행 수입이 800억을 넘어간다.

46) ③
 $y = k \cdot 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a_k 만큼 평행이동하면
 $y = 2^x$ 의 그래프와 일치하므로
 $k \cdot 2_k^{x-a} = 2^x$
 $\therefore k = 2_k^a \qquad \qquad \qquad \therefore a_k = \log_2 k$
따라서 $a_{2n} = \log_2 2n$ 이므로
 $\sum_{n=1}^{10} a_{2n} = \sum_{n=1}^{10} (\log_2 2n) = \log_2 (2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 20)$
 $= \log_2 \{2^{10} \cdot (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 10)\}$
 $= \log_2 (2^{10} \cdot 10!)$
 $\therefore m = 2^{10} \cdot 10!$

47) ⑤
직선 l 을 $y = -x + m$ 이라 두면
 $A(a, -a + m), B(c, -c + m)$
그러므로 조건에 의해 $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (a-c)^2}$
 $\sqrt{2(a-c)^2} = \sqrt{2} \quad \therefore a - c = -1 \quad (\because 1 < a < c)$
또, 점 $A(a, b)$ 는 곡선 $y = \log_2 x$ 위의 점이고,
점 $B(c, d)$ 는 곡선 $y = \log_4 (x + 2)$ 위의 점이므로
 $b = \log_2 a, d = \log_4 (c + 2)$ 이다.
 $\overline{AB}$ 의 기울기가 -1 이므로
 $\frac{\log_2 a - \log_4 (c + 2)}{a - c} = -1$
 $\log_2 a - \frac{1}{2} \log_2 (c + 2) = 1 \quad (\because a - c = -1)$
 $2 \log_2 a - \log_2 (c + 2) = 2, \log_2 \frac{a^2}{c + 2} = 2$
 $a^2 = 4(c + 2)$
 $a^2 - 4a - 12 = (a - 6)(a + 2) = 0 \quad (\because c = a + 1)$
 $\therefore a = 6 \quad (\because 1 < a)$
따라서 $a + c = 6 + 7 = 13$ 이다.

48) ③
함수 $f(x) = \frac{1}{2}(3^x - 3^{-x})$ 의 역함수 $g(x)$ 는

$$x = \frac{1}{2}(3^y - 3^{-y}) \text{이므로}$$

$$2x = 3^y - \frac{1}{3^y}$$

$$3^{2y} - 2x \cdot 3^y - 1 = 0$$

$$3^y \text{를 } t \text{로 치환하면 } t^2 - 2xt - 1 = 0$$

$$t = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\therefore 3^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad (\because 3^y > 0)$$

$$\therefore g(x) = \log_3(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

그런데,

$$g(-x) = \log_3(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \log_3 \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \log_3 \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= -\log_3(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -g(x) \text{ 이므로}$$

$$g(x) \cdot g(-x) = g(x) \cdot \{-g(x)\} = -\{g(x)\}^2$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{\infty} \{g(x) \cdot g(-x)\}^n = \frac{-\{g(x)\}^2}{1 + \{g(x)\}^2} = -\frac{1}{5}$$

$$5\{g(x)\}^2 = 1 + \{g(x)\}^2$$

$$g(x) = \pm \frac{1}{2}$$

즉, $g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이므로 $f\left(\pm \frac{1}{2}\right) = x$ 의 값을 구하면

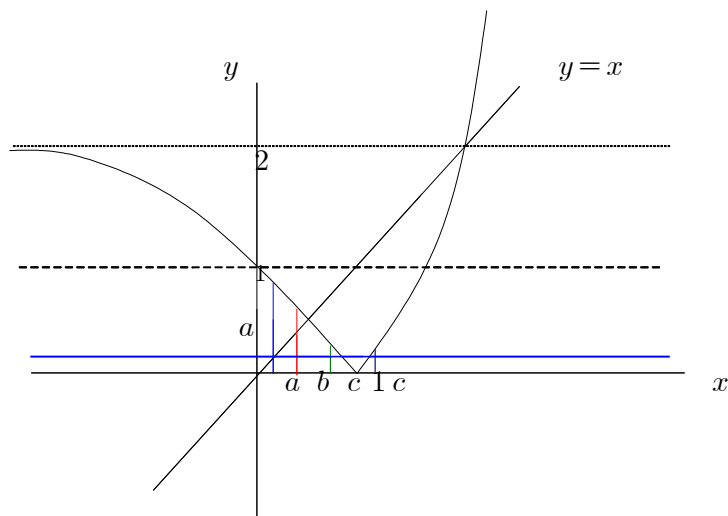
된다.

따라서 $f\left(\pm \frac{1}{2}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로 조건을 만족시키는 x 의 값 전체의

$$\text{곱은 } -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3} \text{이다.}$$

49) ⑤

$f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 그림에서, c 는 1보다 클 수 있다.

(단, a 와 b 는 1보다 작아야 한다.)

ㄴ. $0 < f(a) < 1$ 이므로 $0 < f(c) < f(b) < f(a) < 1$ 이다.

$$\therefore 0 < f(a) + f(b) + f(c) < 3$$

ㄷ. $y=x$ 그래프를 이용하면 $y=a$ 의 그래프를 그릴 수 있다.

$0 < a < 1$ 이므로 $f(x)=a$ 는 2개의 실근을 갖는다.

그러므로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

50) ①

2008년 대학예산을 A , 시설투자비를 B 라하면 $B = \frac{4}{100}A$

2008년부터 n 년후의 대학예산 : $\left(1 + \frac{12}{100}\right)^n A$

2008년부터 n 년후의 시설투자비 : $\left(1 + \frac{20}{100}\right)^n B$

$$\therefore \frac{(1.2)^n B}{(1.12)^n A} \geq \frac{6}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{(1.2)^n \cdot \frac{4}{100} A}{(1.12)^n \cdot A} \geq \frac{6}{100} \Rightarrow \frac{(1.2)^n}{(1.12)^n} \geq \frac{3}{2}$$

양변에 상용로그를 취해 정리해주면

$$n \geq \frac{\log 3 - \log 2}{\log 1.2 - \log 1.12} = \frac{0.1761}{0.0300} = 5.87$$

$\therefore$ 6년 후(2014년)부터 시설투자비가 대학예산의 6%를 넘어서게 된다.

51) ⑤

$$f(x) = 3^{x+1} - 2$$

ㄱ. $b = 3^{a+1} - 2$ 이므로 $b+2 = 3^{a+1}$, $a+1 = \log_3(b+2)$ 이므로

$$\therefore a = \log_3(b+2) - 1 \quad (\text{참})$$

ㄴ. $3^x = t > 0$ 라 두면 $t = 3t - 2$, $t = 1$ 이므로 $x = 0$ 에서 한번 만난다.

cf) $y = 3^x$ 과 $y = f(x)$ 의 그래프를 그려 확인할 수도 있다. (참)

ㄷ. $3^x = t > 0$ 라 두면 $3t - 2 < t$ 의 부등식의 해를 푸는 것과 같다.

$t < 1$ 이므로 $3^x < 1 = 3^0$ 이므로 $x < 0$ 이다. (참)

52) 81

$ab = 12$, $bc = 8$ 이므로 $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}$ 이므로 $a = \frac{3}{2}c$ 다.

$$\therefore 2^a = 2^{\frac{3}{2}c} = 27 = 3^3 \Rightarrow 2^c = 9$$

$$\therefore (2^c)^2 = 4^c = 9^2 = 81$$

53) 75

부등식에 밑을 2로 하는 로그를 취해주면

$$n \leq \log_2 x \leq n+10 \Rightarrow -n \leq \log_2 x - 2n \leq 10-n$$

$n < 5$ 일 때는 $10-n$ 의 절댓값이 더 크므로 $a_n = 10-n$

$n = 5$ 일 때는 $-n$ 과 $10-n$ 의 절댓값이 같으므로 $a_n = 5$

$n > 5$ 일 때는 $-n$ 의 절댓값이 더 크므로 $a_n = n$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = 9+8+7+6+5+6+7+8+9+10 = 75$$

54) ②

$7^{\log_3 x} \cdot x^{\log_3 5x} = 1$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3(7^{\log_3 x} \cdot x^{\log_3 5x}) = \log_3 1,$$

$$\log_3 7^{\log_3 x} + \log_3 x^{\log_3 5x} = 0$$

$$\begin{aligned}(\log_3 x)(\log_3 7) + (\log_3 5x)(\log_3 x) &= 0 \\(\log_3 x)(\log_3 7) + (\log_3 5 + \log_3 x)(\log_3 x) &= 0 \\(\log_3 x)^2 + (\log_3 5 + \log_3 7)\log_3 x &= 0 \\(\log_3 x)(\log_3 x + \log_3 35) &= 0 \\\therefore \log_3 x = 0 \text{ 또는 } \log_3 x = -\log_3 35 \\\log_3 x = 0 \text{에서 } x &= 1\end{aligned}$$

$$\log_3 x = -\log_3 35 \text{에서 } -\log_3 35 = \log_3 \frac{1}{35} \text{이므로 } x = \frac{1}{35}$$

$$\text{따라서 두 근의 합은 } 1 + \frac{1}{35} = \frac{36}{35} \text{이므로}$$

$$p + q = 35 + 36 = 71$$

55) ㉔

$$f(x) = \log_2(x^2 + x + 1) - \log_2 x$$

$$= \log_2 \frac{x^2 + x + 1}{x} = \log_2 \left(x + 1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{에서 } x \geq 1 \text{일 때 } x + 1 + \frac{1}{x} \geq 3 \text{이므로}$$

$$f(x) = \log_2 \left(x + 1 + \frac{1}{x} \right) > 1$$

$$\text{따라서 } [f(x)] = \left\lceil \log_2 \left(x + 1 + \frac{1}{x} \right) \right\rceil = k (k \text{는 자연수}) \text{라 하면}$$

$$k \leq \log_2 \left(x + 1 + \frac{1}{x} \right) < k + 1$$

$$2^k \leq x + 1 + \frac{1}{x} < 2^{k+1}$$

$$\therefore 2^k - 1 \leq x + \frac{1}{x} < 2^{k+1} - 1$$

$$k = 1 \text{일 때, } 1 \leq x + \frac{1}{x} < 3 \text{이므로 자연수 } x \text{는 } 1, 2 \text{의 } 2 \text{개}$$

$$k = 2 \text{일 때, } 3 \leq x + \frac{1}{x} < 7 \text{이므로 자연수 } x \text{는 } 3, 4, 5, 6 \text{의 } 4 \text{개}$$

$$k = 3 \text{일 때, } 7 \leq x + \frac{1}{x} < 15 \text{이므로 자연수 } x \text{는 } 7, 8, \dots, 14 \text{의 } 8 \text{개}$$

∴

$$k = 9 \text{일 때, } 511 \leq x + \frac{1}{x} < 1023 \text{이므로 자연수 } x \text{는}$$

$$511, 512, \dots, 1022 \text{의 } 512 \text{개}$$

$$\text{이때, } k = [f(x)] \text{이므로}$$

$$[f(1)] + [f(2)] + \dots + [f(1022)]$$

$$= 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + 9 \times 2^9$$

$$S = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + 9 \times 2^9 \quad \dots \text{㉑}$$

이라 하면

$$2S = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \dots + 8 \times 2^9 + 9 \times 2^{10} \dots \text{㉒}$$

이므로 ㉑ - ㉒을 하면

$$-S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 - 9 \times 2^{10} = \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 \times 2^{10}$$

$$\therefore S = -\frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} + 9 \times 2^{10}$$

$$= 9 \times 2^{10} - 2^{10} + 2 = 8 \times 2^{10} + 2 = 2^{13} + 2$$

56) ㉒

$$\left(-2^{\frac{4}{3}} + 250^{\frac{1}{3}} \right)^3$$

$$\begin{aligned}&= \left(-2 \times 2^{\frac{1}{3}} + 5 \times 2^{\frac{1}{3}} \right)^3 = \left(3 \times 2^{\frac{1}{3}} \right)^3 \\&= 27 \times 2 = 54\end{aligned}$$

57) ㉓

$abc \neq 0$ 이므로 $ab + bc + ca = abc$ 의 양변을 abc 로 나누면

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \quad \dots \text{㉑}$$

$$\text{한편, } \log_2 x = a \text{에서 } \log_x 2 = \frac{1}{a} \quad \dots \text{㉒}$$

$$\log_3 x = b \text{에서 } \log_x 3 = \frac{1}{b} \quad \dots \text{㉓}$$

$$\log_5 x = c \text{에서 } \log_x 5 = \frac{1}{c} \quad \dots \text{㉔}$$

㉑, ㉓, ㉔을 변끼리 더하면

$$\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 5 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\text{이때, } \log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 5 = \log_x (2 \cdot 3 \cdot 5) = \log_x 30$$

$$\text{이고, ㉑에서 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \text{이므로}$$

$$\log_x 30 = 1$$

$$\therefore x = 30$$

58) ㉔

$$f(0.3) = a(b^{0.3} - 1) = 70$$

$$f(0.6) = a(b^{0.6} - 1) = 210$$

$$\frac{f(0.6)}{f(0.3)} = \frac{(b^{0.3} - 1)(b^{0.3} + 1)}{b^{0.3} - 1} = 3$$

$$\therefore b^{0.3} = 2 \quad a = 70$$

$$\therefore f(1.5) = 70(b^{1.5} - 1) = 70(2^5 - 1) = 2170$$

59) ㉒

$$A = \log \frac{I_0}{I} = \log 10^{acd} = acd = \frac{4\pi k}{\lambda} cd$$

$$A_1 = \frac{4\pi k}{\lambda_1} cd_1, A_2 = \frac{4\pi k}{2\lambda_1} c4d_1$$

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{8}{4} = 2$$

60) ㉒

$$\log_2 10 < \log_2 a < \log_2 50$$

$$\log_2 10 < \log_2 b < \log_2 50$$

$$\log_2 b - \log_2 a = \text{정수}$$

$$0 < \log_2 \frac{b}{a} < \log_2 50 - \log_2 10 = \log_2 5 = 2.****$$

$$\therefore \log_2 \frac{b}{a} = 1 \text{ or } 2 \quad b = 2a \text{ or } b = 4a$$

$$1) b = 2a \text{일 때, } a = 11, 12, \dots, 24 \text{까지 가능}$$

$$2) b = 4a \text{일 때, } a = 11, 12 \text{만 가능}$$

$$\therefore \text{순서쌍의 개수} = 14 + 2 = 16$$

61) ㉒

집합 A 의 식을 정리하면

$$x - 1 > 0, x + 5 > 0 \text{이 성립하므로 } x > 1 \quad (\because \text{진수조건})$$

$$\log_4 (x-1) \leq \log_{16} (x+5)$$

$$\Rightarrow \log_4 (x-1) \leq \frac{1}{2} \log_4 (x+5)$$

$$\Rightarrow \log_4 (x-1)^2 \leq \log_4 (x+5)$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 \leq (x+5)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 \leq x + 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 \leq 0$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 4$$

그런데, 진수조건에 의해 $x > 1$ 이어야 하므로 $1 < x \leq 4$

집합 B 식을 정리하기 위해 $2^x = t > 0$ 라 치환하면

$$\text{주어진식} : t^3 - 11t^2 + 38t - 40 = 0$$

$$f(t) = t^3 - 11t^2 + 38t - 40 \text{이라 두면}$$

$$f(2) = 2^3 - 11 \cdot 2^2 + 38 \cdot 2 - 40 = 0$$

이므로 주어진 방정식은 $t=2$ 를 근으로 갖는다.

주어진 식을 인수분해하면

$$(t-2)(t^2 - 9t + 20) = 0 \Rightarrow (t-2)(t-4)(t-5) = 0$$

인수정리를 이용해 근을 구하면 $t=2$ or 4 or 5 이므로

$$x = \log_2 2 \text{ or } \log_2 4 \text{ or } \log_2 5$$

그런데 $\log_2 2 = 1$ 이므로 집합 A 의 근이 되지 않는다.

$$A \cap B = \{\log_2 4, \log_2 5\} \text{이므로}$$

$$\text{모든 원소의합} = \log_2 4 + \log_2 5 = \log_2 20$$

62) ③

주어진 그래프는 크게 $x > 0$ 인 경우와 $x < 0$ 인 경우로 나누어 생각해볼 수 있다.

i) $x < 0$ 일 때

$$2^{\frac{x}{2}} = \log_{\sqrt{2}}(-x)$$

$y = 2^{\frac{x}{2}}$ 의 그래프는 $x < 0$ 인 범위에서 점근선($y=0$)으로 근접해가는 그래프인데 반해, $y = \log_{\sqrt{2}}(-x)$ 의 그래프는 x 가 0쪽으로 갈때는 $-\infty$ 로 가고, x 값이 작아지는 경우, ∞ 로 가는 그래프이므로 교점은 1개 생긴다.

ii) $x > 0$ 일 때

$$2^{\frac{x}{2}} = \log_{\sqrt{2}}(x)$$

그런데, $2^{\frac{x}{2}} = (\sqrt{2})^x$ 이므로 두 그래프는 서로 역함수 관계에 있으며 $y=x$ 에 대칭이다. 또한 두 그래프의 교점 역시 $y=x$ 위에 존재한다.

즉, $y = 2^{\frac{x}{2}}$ 그래프와 $y=x$ 의 교점을 조사해도 된다.

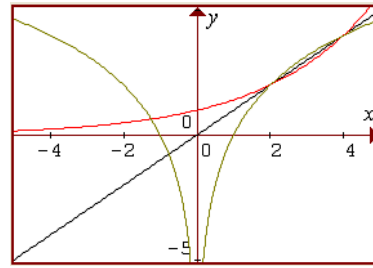
$$2^{\frac{x}{2}} = \log_{\sqrt{2}}(x) \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}} = x \Leftrightarrow 2^x = x^2 \text{의 교점을 조사하면 된다.}$$

이 그래프는 $x=2$ or 4 에서 만나기 때문에 교점을 2개 갖는다.

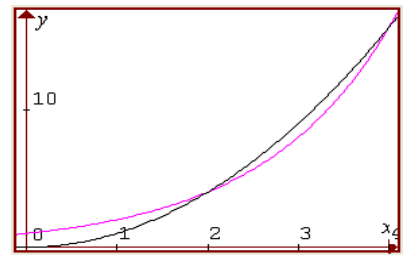
i), ii)에 의해 주어진 방정식은 총 3개의 실근을 갖는다.

(참고) 그래프는 다음과 같이 나타난다.

<그림1>은 $y = 2^{\frac{x}{2}}$, $y = \log_{\sqrt{2}} |x|$, $y=x$ 의 그래프를 나타낸 것이며 <그림2>는 $y=2^x$ 과 $y=x^2$ 의 그래프를 나타낸 것이다.



<그림1>



<그림2>

63) 11

$$\log_{15} A = 30 \Rightarrow A = 15^{30}$$

$$\log_{45} B = 15 \Rightarrow B = 45^{15}$$

$$\therefore \frac{B}{A} = \frac{45^{15}}{15^{30}} = \left(\frac{45}{225}\right)^{15} = \left(\frac{1}{5}\right)^{15}$$

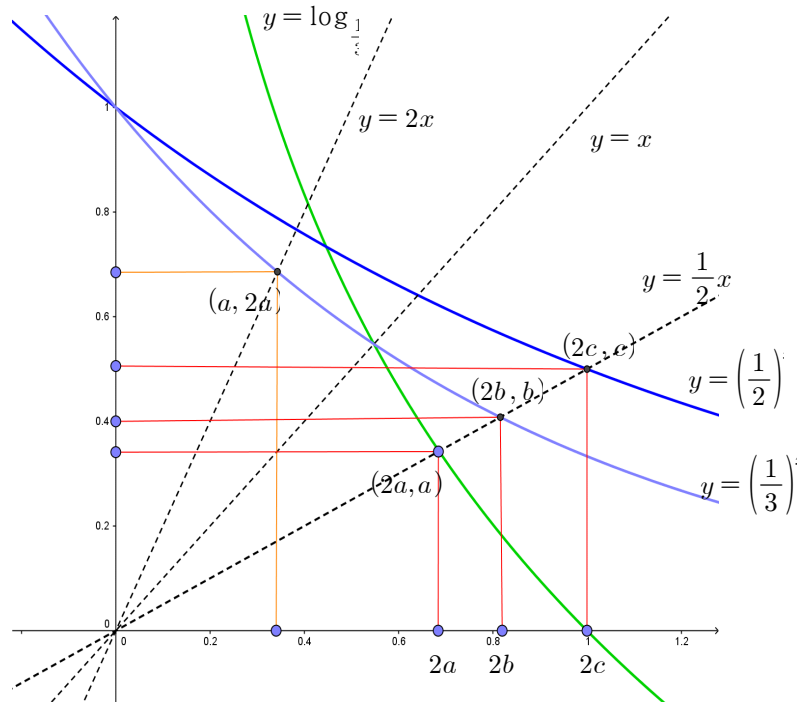
$$\log \frac{B}{A} = 15 \log \frac{1}{5} = -15 \cdot \log 5$$

$$= -15 \log \frac{10}{2} = -15(1 - 0.3010)$$

$$= -15 \cdot 0.6990 = -11 + 0.515$$

$\therefore$ 소수점 이하 11번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나온다.

64) ①



$$\therefore a < b < c$$

65) ⑤

$x^2 - 2x = 1$ 이거나 $x^2 - 2x = -1$ 일 때, $x^2 + 6x + 5$ 가 $2k$ (k 는 정수)꼴 이거나

$x^2 - 2x \neq 0$ 이고 $x^2 + 6x + 5 = 0$ 이면 된다.

$$\text{i) } x^2 - 2x = 1 \text{에서 } x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\text{ii) } x^2 - 2x = -1 \text{일 때, } (x-1)^2 = 0 \text{에서 } x = 1$$

$x = 1$ 일 때, $x^2 + 6x + 5 = 12$ (짝수)이므로

$x = 1$ 은 주어진 식을 만족한다.

$$\text{iii) } x^2 + 6x + 5 = 0 \text{ 즉, } (x+1)(x+5) = 0 \text{에서}$$

$$x = -1, x = -5$$

위의 값은 밑 $x^2 - 2x$ 를 0으로 하지 않으므로 주어진 식을 만족한다.

i), ii), iii)에서 구하는 실수 x 의 개수는 5(개)

66) ①

$$|\log_x n| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \log_x n \leq 2 \Leftrightarrow \log_x \frac{1}{x^2} \leq \log_x n \leq \log_x x^2$$

따라서 $x > 1$ 일 때, $\frac{1}{x^2} \leq n \leq x^2$ 이고 $x < 1$ 일 때,

$x^2 \leq n \leq \frac{1}{x^2}$ 이므로 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} [x^2] & (x > 1) \\ \left[\frac{1}{x^2}\right] & (0 < x < 1) \end{cases}$$

(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

ㄱ. $f(2) = [2^2] = 4$ (참)

ㄴ. $0 < x < y < 1$ 이면 $1 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ 즉, $\left[\frac{1}{y^2}\right] < \left[\frac{1}{x^2}\right]$ 이므로

$f(x) \geq f(y)$ (거짓)

ㄷ. $0 < \frac{1}{x} < 1$ 일 때, $f\left(\frac{1}{x}\right) = [x^2]$

$[x^2] \leq 30$ 에서 $x^2 < 31$

따라서 $f\left(\frac{1}{x}\right) \leq 30$ 을 만족하는 자연수 x 는

$x = 2, 3, 4, 5$ 의 4개가 존재한다. (거짓)

67) ②

점 $(n, \log_2 n)$ 과 점 $(\log_2 n, n)$ 을 잇는 선분의 기울기는 -1 이다.

점 (a, b) 가 기울기가 -1 인 직선위의 점일 때, 임의의 정수 m 에 대하여 점 $(a-m, b+m)$ 도 동일한 직선위에 놓이게 된다.

따라서 a 또는 b 가 정수가 아니면 이 직선위의 점 중에는 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점이 존재하지 않는다.

$\log_2 n$ 은 자연수 n 이 $n = 2^k$ (k 는 음이 아닌 정수)꼴일 때, 정수가 되고 나머지 경우는 정수가 되지 못한다. 따라서 $n = 2^k$ (k 는 음이 아닌 정수)꼴일 때, 점 $(n, \log_2 n)$ 과 점 $(\log_2 n, n)$ 을 잇는 선분위의 점 중 x 좌표와 y 좌표 모두 정수인 점이 존재하며 그 개수는 $n - \log_2 n + 1 = 2^k - k + 1$ 이다.

즉, $n = 2^k$ 일 때, $a_n = 2^k - k + 1$ 이고 $n \neq 2^k$ 일 때, $a_n = 0$ 이다. (k 는 음이 아닌 정수)

$2^{10} < 2011 < 2^{11}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2011} a_n &= \sum_{k=0}^{10} (2^k - k + 1) = \sum_{k=1}^{11} (2^{k-1} - k + 2) \\ &= \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} - \frac{11 \cdot 12}{2} + 2 \cdot 11 = 2003 \end{aligned}$$

68) ③

$$\left(\frac{72-65}{14}\right) \times 1.05^{30} = \left(\frac{h-65}{14}\right) \times 1.05^5 \text{에서}$$

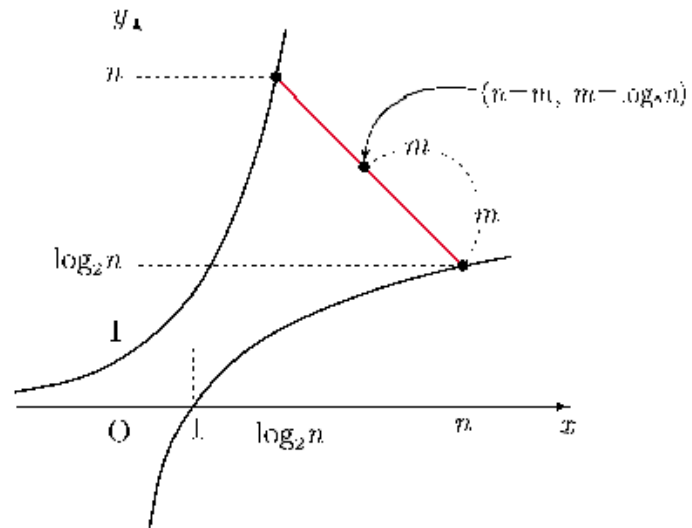
$$h = 65 + 7 \times 1.05^{25}$$

$$\log 1.05^{25} = 25 \times \log 1.05 = 25 \times 0.021 = 0.525 = \log 3.35$$

$$\therefore 1.05^{25} = 3.35$$

$$\therefore h = 65 + 7 \times 3.35 = 88.45$$

69) ①



$$\log 10^{0.76} = 0.76$$

$\log 5 = 0.6990 < 0.76 < \log 6 = 0.7781$ 이므로 정수부분은 5이다.

70) ②

n 이 홀수이면 $f(n) = 1$, n 이 짝수이면 $f(n) = 2$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{2011} (-1)^n f(n) = -(1 \times 1006) + (2 \times 1005) = 1004$$

71) ⑤

지수함수 $y = a^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼 평행이동시킨

함수식은 $y = a^{x-b}$ ㉠

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

(n, a_n) 점이 ㉠식 위의 점이므로 함수식을 만족한다.

즉, $a^{n-b} = 2 \times 3^{n-1}$ 이 성립한다.

이때 $a = 3$ 이어야 한다.㉡ (참고※)

대입하면, $3^{n-b} = 2 \times 3^{n-1}$ 에서

좌우변에 3^{n-1} 을 나누면 $3^{-b+1} = 2$

이 성립하고 로그의 정의에 의해서 $-b+1 = \log_3 2$

$$\therefore b = 1 - \log_3 2 \text{㉢}$$

㉡, ㉢에서

$$a+b = 4 - \log_3 2$$

72) ②

$2^{2x} = t$ (> 0)이라하면 부등식 $2^{4x} + a \cdot 2^{2x-1} + 10 > \frac{3}{4}a$ 은

$t^2 + \frac{a}{2}t + 10 - \frac{3}{4}a > 0$ 이고 $t > 0$ 인 모든 실수에 대하여 부등식이 성립하면 된다.

$f(t) = t^2 + \frac{a}{2}t + 10 - \frac{3}{4}a$ 라 하면 대칭축이 $t = -\frac{a}{4}$ 로 음수이므로

$f(0) \geq 0$ 이면 부등식이 성립하므로

$$10 - \frac{3}{4}a \geq 0 \quad \therefore a \leq \frac{40}{3}$$

그러므로 조건에 만족하는 자연수 a 의 최댓값은 13이다.

73) ③

$$\log_a x : \log_b x = 2 : 1 \quad \therefore b = a^2$$

$$\square PAQC = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{2} \times \overline{BD} = 1, \quad \overline{BD} = 2$$

$$a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 2, \quad a^{\frac{2}{3}} = 2 \quad \therefore ab = a^3 = 2^{\frac{9}{2}} = 16\sqrt{2}$$

74) ④

$$I = a \log(t+7) + b$$

처음 이 기계가 작동하기 시작한 순간의 정확도는 100에서
경과시간 $t=0$ 에 대응되는 정확도 $I=100$ 이므로

$$100 = a \log(0+7) + b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

작동하기 시작하여 28시간이 되는 순간의 정확도는 79에서
경과시간 $t=28$ 에 대응되는 정확도 $I=79$ 이므로

$$79 = a \log(28+7) + b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 을 변변 정리하면

$$-21 = a \log 5 = a(1 - \log 2) = a(0.7)$$

$$\therefore a = -30 \quad (\because \log 2 = 0.3)$$

$\textcircled{1}$ 식에 대입해서 b 의 값을 정리하면

$$100 = a \log(0+7) + b \quad \text{에서}$$

$$\therefore b = 100 + 30 \log 7$$

63시간이 되는 순간의 정확도를 x 라 두면

$$x = a \log(63+7) + b \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

이 성립한다. 위에서 얻은 a, b 의 값을 $\textcircled{3}$ 식에 대입하면

$$x = -30 \log 70 + 100 + 30 \log 7 = 100 - 30 = 70$$

75) 256

$$\frac{1}{2} < 1 - \alpha < 1, \quad \frac{1}{2} < \log_4 n < 1, \quad 2 < n < 4$$

$$\therefore n = 3$$

$$\text{그러면, } \log_4 3 = 1 - \alpha, \quad \alpha = 1 - \log_4 3$$

$$\therefore \alpha = \log_4 \frac{4}{3}$$

$$\text{따라서, } \log_2 m^2 = 3 + \log_4 \frac{4}{3}, \quad \log_4 m^4 = \log_4 \frac{4^4}{3}, \quad m^4 = \frac{4^4}{3}$$

$$\therefore 3m^4 = 4^4 = 256$$

76) ②

$$\sqrt{15}x^{\log_{15} x} = x^2 \text{의 양변에 밑이 15인 로그를 취하면}$$

$$\log_{15} \sqrt{15} + (\log_{15} x)^2 = \log_{15} x^2$$

$$2(\log_{15} x)^2 - 4(\log_{15} x) + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 은 $\log_{15} x$ 에 대한 이차방정식이고 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 주어진 방정식은 두 실근을 갖는다. 이 두 근을 α, β 라 하면

$$\log_{15} \alpha, \log_{15} \beta \text{는 방정식 } \textcircled{1} \text{의 두 실근이므로 근과 계수와의}$$

관계에서

$$\log_{15} \alpha + \log_{15} \beta = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{즉, } \log_{15} \alpha \beta = 2$$

$$\therefore \alpha \beta = 15^2$$

77) ②

$$\frac{A(t)}{P(t)} = \frac{1}{20} \text{이므로}$$

$$2^k = \left\{ 1 + 8.3 \times \frac{1}{20} \right\}^c = 1.415^c$$

위 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$k \times \log 2 = c \times \log 1.415$$

$$\therefore k = \frac{\log 1.415}{\log 2} c = \frac{0.15}{0.30} c = \frac{1}{2} c$$

78) ③

$\log_3 x = X, \log_2 y = Y$ 라 하면 주어진 연립방정식은

$$\log_3 x + \log_2 \frac{1}{y} = 1$$

$$\Leftrightarrow X - Y = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_9 3x + \log_{\frac{1}{2}} y = 1 - \frac{k}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \log_3 x) - \log_2 y = 1 - \frac{k}{2}$$

$$\Leftrightarrow X - 2Y = 1 - k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하면 $X = k+1, Y = k$

따라서 $\log_3 \alpha = k+1, \log_2 \beta = k$ 에서

$$\alpha = 3^{k+1}, \beta = 2^k$$

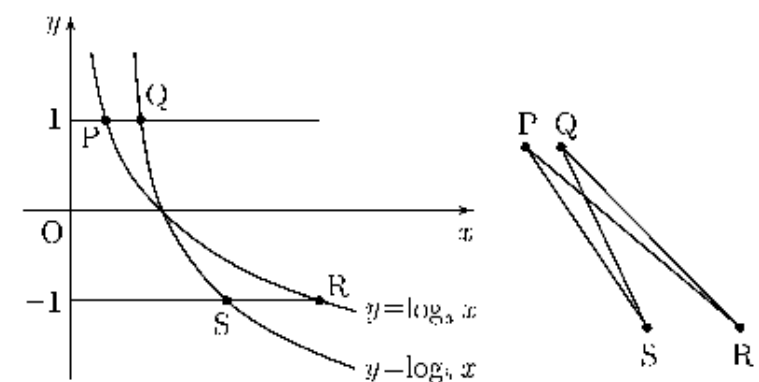
$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow 3^{k+1} \leq 2^k \Leftrightarrow 3 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2} < 3, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4} < 3, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{8}{27} > 3$$

이므로 $\alpha \leq \beta$ 를 만족하는 정수 k 의 최댓값은 -3 이다.

79) ②

함수 $y = \log_a x, y = \log_b x$ 의 그래프와 직선 $y=1, y=-1$ 를 그려
점 P, Q, R, S를 표시하면 다음과 같다.



위 그림에서 $\overline{PQ} < \overline{SR}$ 이므로 $\gamma < \alpha < \sigma < \beta$

80) ③

$$f(x) - g(x) = a^{2x} - a^{x+1} + 2$$

따라서 $a^x = t$ 라 하면

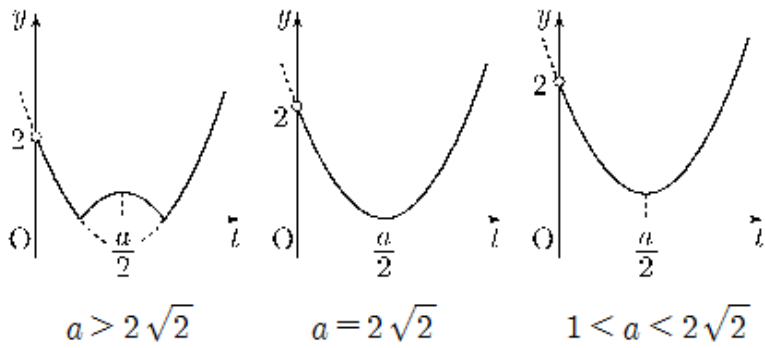
$$f(x) - g(x) = t^2 - at + 2$$

이차방정식 $t^2 - at + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 8 = 0 \text{에서 } a = 2\sqrt{2} \quad (\because a > 1)$$

$y = t^2 - at + 2$ 는 대칭축이 $t = \frac{a}{2}$ 이고 y 절편이 2인 이차함수이므로

a 의 크기에 따라서 $y = |t^2 - at + 2|$ 의 그래프의 개형을 그리면
다음과 같다.



이때, $t = a^x$ 는 모든 실수에서 임의의 양수로의 일대일 대응이고 $x_1 < x_2$ 에 대하여 $t_1 < t_2$ 를 만족한다. …… ㉠

ㄱ. $a = 2\sqrt{2}$ 일 때, $y = |t^2 - at + 2|$ 의 그래프는 x 축과 한 점에서 만나므로 (접하므로)

$y = h(x)$ 의 그래프도 x 축과 한 점에서 만난다. ($\because$ ㉠) (참)

ㄴ. $a = 4$ 일 때,

$t^2 - 4t + 2 = 0$ 에서 $t = 2 \pm \sqrt{2}$ 이므로

$y = |t^2 - at + 2|$ 의 그래프는 $0 < t < 2 - \sqrt{2}$ 에서 감소하고 $2 - \sqrt{2} < t < 2$ 에서 감소한다. …… ㉡

$x < \frac{1}{2}$ 일 때, $0 < t < 4^{\frac{1}{2}} = 2$ 이므로 ㉠, ㉡에 의해서 $h(x_1)$, $h(x_2)$ 의 대소를 비교할 수 없다. (거짓)

ㄷ. $y = t^2 - at + 2$ 의 그래프가 직선 $y = 1$ 과 접할 때, $y = h(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 이 오직 한 점에서 만나게 된다.

$t^2 - at + 2 = 1$ 에서 $t^2 - at + 1 = 0$

위의 방정식은 $a = 2$ 일 때 중근을 가지므로 $a = 2$ 일 때,

$y = h(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 이 오직 한 점에서 만나게 된다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

81) ㉠

개체의 수가 연속적으로 변한다고 가정할 때,

쥐가 죽은 뒤 t 시간 후의 두 세균 S 와 T 의 개체수는 각각

$$4 \cdot 2^{\frac{t}{4}}, 256 \cdot 2^{\frac{t}{6}} \text{ 이다.}$$

$$4 \cdot 2^{\frac{t}{4}} = 256 \cdot 2^{\frac{t}{6}} \text{ 에서 } 2 + \frac{t}{4} = 8 + \frac{t}{6}$$

$$\therefore t = 72$$

따라서 구하는 세균 S 의 개체수는

$$2^{2 + \frac{72}{4}} = 2^{20}$$

82) ㉢

$t = 0$ 일 때, 현재 개체 수가 5000이므로

$$\log 5000 = k + 0 \cdot \log \frac{4}{5}$$

가 성립한다.

$$\therefore k = 3 + \log 5$$

n 년 후 개체 수 N 가 1000보다 작을 때,

$$\log N = k + n \log \frac{4}{5} \leq \log 1000 \text{ 에서}$$

$$3 + \log 5 + n \log \frac{4}{5} \leq 3$$

$$\log 2 = 0.3010 \text{ 이므로}$$

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2 = 0.699$$

$$\log \frac{4}{5} = \log \frac{8}{10} = 3 \log 2 - 1 = -0.097$$

따라서 $0.699 - 0.097 \times n \leq 0$ 에서

$$n \geq \frac{0.699}{0.097} = 7. \times \times \times \times$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

83) ㉡

$$64 = 2^6 < 77 < 2^7 = 128 \text{ 이므로}$$

$$6 < \log_2 77 < 7$$

$$\therefore a = \log_2 77 - 6$$

$$25 = 5^2 < 77 < 5^3 = 125 \text{ 이므로}$$

$$2 < \log_5 77 < 3$$

$$\therefore b = \log_5 77 - 2$$

$$\begin{aligned} & 2^{p+a} 5^{q+b} \\ &= 2^{p-6+\log_2 77} 5^{q-2+\log_5 77} \\ &= 2^{p-6} \cdot 2^{\log_2 77} \cdot 5^{q-2} \cdot 5^{\log_5 77} \\ &= 2^{p-6} \cdot 77 \cdot 5^{q-2} \cdot 77 \\ &= 7^2 \cdot 11^2 \cdot 2^{p-6} \cdot 5^{q-2} \end{aligned}$$

$$250 = 2 \times 5^3 \text{ 이므로}$$

$$2^{p+a} 5^{q+b} \text{이 } 250 \text{의 배수이려면}$$

$$p-6 \geq 1, q-2 \geq 3$$

$$\therefore p \geq 7, q \geq 5$$

$$\therefore p+q \geq 12$$

따라서 구하는 $p+q$ 의 최솟값은 12이다.

84) ㉡

$$\neg. (a, 2^b) \in G \text{ 이므로 } 2^b = 6^a$$

$$\therefore b = \log_2 6^a = a \log_2 6 \text{ (참)}$$

$$\neg. (a, b) \in G \text{ 이므로 } b = 6^a$$

$$\therefore 6^{-a} = (6^a)^{-1} = \frac{1}{b}$$

$$\therefore \left(-a, \frac{1}{b}\right) \in G \text{ (참)}$$

$$\neg. (a, b) \in G \text{이고 } (c, d) \in G \text{ 이므로}$$

$$b = 6^a, d = 6^c$$

$$6^{a+c} = 6^a \cdot 6^c = bd \text{ 이므로}$$

$$(a+c, bd) \in G \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

85) ㉢

$$\text{점 A와 C의 } y \text{좌표가 일치하므로 } a^{\frac{b}{4}} = b^b$$

$$\therefore a^{\frac{1}{4}} = b \text{ (} \because b \neq 0 \text{)} \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{점 B와 D의 } y \text{좌표가 일치하므로}$$

$$a^a = b \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } a^a = a^{\frac{1}{4}}$$

$$a \neq 1 \text{ 이므로 } a = \frac{1}{4} \dots\dots \text{㉢}$$

$$\text{㉢을 ㉠에 대입하면 } b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$$

86) ②

 $\log_{25}(a-b) = \log_9 a = \log_{15} b = k$ 라 하면

$$a-b = 25^k = 5^{2k} \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a = 9^k = 3^{2k} \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$b = 15^k = 3^k \cdot 5^k \dots\dots \textcircled{㉢}$$

 $\textcircled{㉠} \times \textcircled{㉡} = \textcircled{㉢}^2$ 이 성립하므로

$$(a-b)a = b^2$$

$$\text{즉, } b^2 + ab - a^2 = 0$$

 $a > 0$ 이므로 위 식의 양변을 a^2 으로 나누면

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right) - 1 = 0$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

그런데 $a > 0$, $b > 0$ 이므로 $\frac{b}{a} > 0$ 이다.

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

87) 32

진수조건에 의해서

$$x+y-4 > 0, x+y > 0, x > 0, y > 0$$

$$\therefore x+y-4 > 0, x > 0, y > 0 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

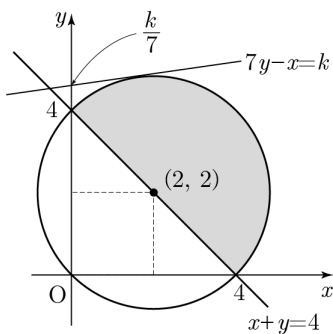
$$\log_2(x+y-4) + \log_2(x+y) \leq 1 + \log_2 x + \log_2 y$$

$$\Leftrightarrow (x+y-4)(x+y) \leq 2xy \text{ 이고 } \textcircled{㉡}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y \leq 0 \text{이고 } \textcircled{㉢}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 8 \text{이고 } \textcircled{㉣}$$

따라서 주어진 부등식을 만족하는 점 (x, y) 가 존재하는 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



$7y-x=k$ 라 할 때, $\frac{k}{7}$ 은 직선 $7y-x=k$ 의 y 절편이므로

k 는 위의 그림과 같이 원 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$ 과 직선

$7y-x=k$ 가 접할 때, 최대가 된다.

$$\frac{|7 \cdot 2 - 2 - k|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2} \text{에서 } |k-12| = 20 \text{이므로}$$

구하는 k 의 최댓값은 32이다.

88) 19

 $3^x = t$ 라 할 때, 주어진 방정식은

$$t^2 - 2(a+4)t - 3a^2 + 24a = 0 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

x 가 양수일 때, $t > 1$ 이므로 방정식 $\textcircled{㉠}$ 의 서로 다른 해는 모두 1보다 커야한다.

따라서 방정식 $\textcircled{㉠}$ 의 판별식을 D 라 할 때 $D > 0$ 이고,

$$f(t) = t^2 - 2(a+4)t - 3a^2 + 24a \text{라 할 때}$$

$f(1) > 0$, 이차함수 $f(t)$ 의 축 $x = a+4 > 1$ 이어야 한다.

$$\text{i) } D = (a+4)^2 - (-3a^2 + 24a) > 0 \text{에서}$$

$$4a^2 - 16a + 16 > 0$$

$$4(a-2)^2 > 0$$

따라서 $a \neq 2$ 인 모든 실수 a 에 대하여 위 부등식이 성립한다.

$$\text{ii) } f(1) = 1 - 2(a+4) - 3a^2 + 24a > 0 \text{에서}$$

$$3a^2 - 22a + 7 < 0$$

$$(3a-1)(a-7) < 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} < a < 7$$

$$\text{iii) } a+4 > 1 \text{에서 } a > -3$$

$$\text{i), ii), iii)에서 } \frac{1}{3} < a < 7 \text{이다.}$$

따라서 정수 a 는 1, 3, 4, 5, 6이다.

따라서 구하는 합은 $1+3+4+5+6=19$

89) ④

시정거리 x 가 3000(m)이상일 때,

$$3 + \log 1.2 - \log d_1 \geq \log 3000$$

$$\log d_1 \leq \log \frac{1.2}{3} = \log 0.4 \quad (\because \log 3000 = 3 + \log 3)$$

$$\therefore d_1 \leq 0.4$$

90) ⑤

$$\sum_{k=1}^{10} f(2^k) = \sum_{k=1}^{10} 2^k = \frac{2(2^{10}-1)}{2-1} = 2046$$

$2^n \leq k < 2^{n+1}$ 일 때, $n \leq \log_2 k < n+1$ 이므로 $f(\log_2 k) = n$ 이다.

이때, $f(\log_2 k) = n$ 인 자연수 k 의 개수는 $2^{n+1} - 2^n = 2^n$ 이다.

$$2 = 2^1, 1024 = 2^{10} \text{이므로}$$

$$\sum_{k=2}^{1024} f(\log_2 k) = \sum_{n=1}^9 n \cdot 2^n + 10$$

$$S = \sum_{n=1}^9 n \cdot 2^n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 9 \cdot 2^9 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이라 하면

$$2S = \sum_{n=1}^9 n \cdot 2^{n+1} = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \dots + 9 \cdot 2^{10} \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} \text{에서 } -S = \sum_{n=1}^9 2^n - 9 \cdot 2^{10}$$

$$\begin{aligned} S &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 9 \cdot 2^9 \\ -2S &= 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \dots + 9 \cdot 2^{10} \\ \hline -S &= 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 - 9 \cdot 2^{10} \end{aligned}$$

$$\therefore S = 9 \cdot 2^{10} - \sum_{n=1}^9 2^n$$

$$= 9 \cdot 2^{10} - \frac{2(2^9-1)}{2-1}$$

$$= 8 \cdot 2^{10} + 2$$

$$= 8194$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{1024} f(\log_2 k) = 8194 + 10 = 8204$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} f(2^k) + \sum_{k=2}^{1024} f(\log_2 k) = 2046 + 8204 = 10250$$

91) 10

$\log_2(3x^2+7x)$ 가 정의되어야 하므로

$$x < -\frac{7}{3} \text{ 또는 } x > 0 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$\log_2(x+1)$ 가 정의되어야 하므로

$$x > -1 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서 $x > 0$ 이다.

$$\log_2(3x^2+7x) = 1 + \log_2(x+1) \text{에서}$$

$$\log_2(3x^2+7x) = \log_2 2(x+1)$$

$$3x^2+7x = 2(x+1)$$

$$(3x-1)(x+2) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{3} \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore p = 3, q = 1$$

$$\therefore p^2 + q^2 = 10$$

92) ②

$$\log 5^{25} = 25 \log 5 = 25(1 - \log 2) = 25(1 - 0.3010) = 17.475$$

상용로그 $\log 5^{25}$ 의 지표가 17이므로 5^{25} 은 18자리의 정수이다.

$$\therefore m = 18$$

상용로그 $\log 5^{25}$ 의 가수가 0.475이고

$$\log 2 = 0.3010 < 0.475 < 0.4771 = \log 3 \text{이므로}$$

$$17 + \log 2 < \log 5^{25} < 17 + \log 3$$

$$2 \times 10^{17} < 5^{25} < 3 \times 10^{17}$$

따라서 5^{25} 의 최고 자리의 숫자는 2이다.

$$\therefore n = 2$$

$$\therefore m + n = 20$$

93) ②

$$(\log_6 4)^2 + (\log_6 9)^2 + 2 \log_6 4 \times \log_6 9$$

$$= (\log_6 4 + \log_6 9)^2$$

$$= (\log_6 36)^2$$

$$= 2^2 = 4$$

94) ④

상품의 수요량이 D , 공급량이 S 일 때의 판매가격은 P ,

상품의 수요량이 $9D$, 공급량이 $3S$ 일 때의 판매가격은 kP 이므로

주어진 식에 의하여

$$\log_2 P = C + \log_3 D - \log_9 S \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_2 kP = C + \log_3 9D - \log_9 3S \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉠}$ 에서

$$\log_2 k = \log_3 9 - \log_9 3 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore k = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

95) ③

$\sqrt{2016} x^{\log_{2016} x} = x^2$ 의 양변에 밑이 2016인 로그를 취하면,

$$\frac{1}{2} + (\log_{2016} x)^2 = 2 \log_{2016} x$$

$t = \log_{2016} x$ 라 하자.

$$t^2 - 2t + \frac{1}{2} = 0 \text{이고 근과 계수와의 관계에 의하여}$$

$$\log_{2016} x_1 + \log_{2016} x_2 = 2$$

$$\log_{2016} x_1 x_2 = 2, \text{ 즉 } x_1 x_2 = 2016^2 \text{이고}$$

이때, 끝 두자리수는 16^2 의 끝의 두자리 수와 같으므로 56이다.

96) 55

$$1) \log_3 \frac{m}{15} > 0 \Rightarrow m > 15 \text{일 때,}$$

$$\left| \log_3 \frac{m}{15} \right| + \log_3 \frac{n}{3} \leq 0 \Rightarrow 15 < m \leq \frac{45}{n} \text{이며,}$$

$$n = 1 \text{일 때, } 15 < m \leq 45 : 30 \text{개}$$

$$n = 2 \text{일 때, } 15 < m \leq 22.5 : 7 \text{개}$$

즉 37개다

$$2) \log_3 \frac{m}{15} = 0 \Rightarrow m = 15 \text{일 때,}$$

$$\left| \log_3 \frac{m}{15} \right| + \log_3 \frac{n}{3} \leq 0 \Rightarrow \log_3 \frac{n}{3} \leq 0 \Rightarrow n \leq 3 \text{이며,}$$

따라서 3개다.

$$3) \log_3 \frac{m}{15} < 0 \Rightarrow 0 < m < 15 \text{일 때,}$$

$$\left| \log_3 \frac{m}{15} \right| + \log_3 \frac{n}{3} \leq 0 \Rightarrow 5n \leq m < 15 \text{이며,}$$

$$n = 1 \text{일 때, } 5 \leq m < 15 : 10 \text{개}$$

$$n = 2 \text{일 때, } 10 \leq m < 15 : 5 \text{개}$$

즉 15개다.

총 55개

97) ④

주어진 식에 의하여

$$\log P_1 = k - \frac{1000}{0+250} = k - 4$$

$$\log P_2 = k - \frac{1000}{50+250} = k - \frac{10}{3}$$

$$\log \frac{P_2}{P_1} = \log P_2 - \log P_1$$

$$= \left(k - \frac{10}{3} \right) - (k - 4) = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{P_2}{P_1} = 10^{\frac{2}{3}}$$

98) ⑤

점 A의 x 좌표를 a 라 하면 A의 좌표는 $(a, 2^{a-1} + 1)$

점 A와 B는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

점 B의 좌표는 $(2^{a-1} + 1, a)$

점 B가 곡선 $y = \log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$$a = \log_2(2^{a-1} + 2)$$

$$2^a = 2^{a-1} + 2$$

$$2^{a-1} = 2$$

$$\therefore a = 2$$

점 A의 y 좌표는 $2^{2-1} + 1 = 3$

직선 AC가 x 축과 평행하므로 점 C의 y 좌표는 3이다.

$$\log_2(x+1) = 3 \text{에서 } x = 2^3 - 1 = 7$$

$\therefore A(2, 3), B(3, 2), C(7, 3)$

$$\therefore p = \frac{2+3+7}{3} = 4, \quad q = \frac{3+2+3}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore p+q = \frac{20}{3}$$

99) ㉓

$\log_2 x = X, \log_3 y = Y$ 라 하면

$$\log_x y = \log_3 8 \text{에서 } \frac{\log_3 y}{\log_3 x} = 3 \log_3 2$$

$$\log_3 y = 3 \log_3 2 \cdot \log_3 x$$

$$= 3 \log_3 2 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 3}$$

$$= 3(\log_3 2)^2 \cdot \log_2 x \cdots \cdots \text{㉑}$$

㉑을 $4(\log_2 x)(\log_3 y) = 3$ 에 대입하면

$$4(\log_2 x)\{3(\log_3 2)^2 \cdot \log_2 x\} = 3$$

$$(\log_2 x)^2 = \frac{1}{4(\log_3 2)^2} = \left(\frac{\log_2 3}{4}\right)^2$$

위의 방정식의 해 $\alpha > 1$ 이므로 $\log_2 \alpha > 0$ 이다.

$$\therefore \log_2 x = \frac{\log_2 3}{2} = \log_2 \sqrt{3}$$

따라서 $x = \sqrt{3}$, 즉 $\alpha = \sqrt{3}$ 이다.

$x = \sqrt{3}$ 을 ㉑에 대입하면

$$\log_3 y = 3(\log_3 2)^2 \cdot \log_2 \sqrt{3}$$

$$= \frac{3}{2} \log_3 2 = \log_3 2 \sqrt{2}$$

따라서 $y = 2\sqrt{2}$, 즉 $\beta = 2\sqrt{2}$ 이다.

$$\therefore \alpha\beta = \sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$$

100) 150

$$12^{\frac{2a+b}{1-a}} = \left(\frac{60}{5}\right)^{\frac{2a+b}{1-a}} = 60^{\frac{2a+b}{1-a}} 5^{\frac{2a+b}{a-1}} = (150)^{\frac{1}{1-a}} 60^{\frac{a(2a+b)}{a-1}}$$

$$= (150)^{\frac{1}{1-a}} (150)^{\frac{a}{a-1}} = (150)^{\frac{a-1}{a-1}} = 150 \text{이다.}$$

101) ㉒

$$\log_3 a = \frac{1}{\log_b 27} = \log_{27} b = \frac{1}{3} \log_3 b$$

$$\therefore \log_a b = \frac{\log_3 b}{\log_3 a} = 3$$

$$\text{준식} = 2 \log_a b + \frac{2}{\log_a b} = 2 \times 3 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

102) ㉓

점C는 $(1, 0)$ 이고

$$a > 1 \text{이면 } A\left(\frac{1}{a}, 1\right), B(a, 1)$$

$$0 < a < 1 \text{ 이면 } A(a, 1), B\left(\frac{1}{a}, 1\right)$$

$$\overline{AC} \text{기울기} \times \overline{BC} \text{기울기} = \frac{1}{\frac{1}{a}-1} \times \frac{1}{a-1} = -1$$

정리하면 $a^2 - 3a + 1 = 0$

a 값의 합은 3

103) 9

$$\log_m 2 = \frac{n}{100} \text{에서 } 2 = m^{\frac{n}{100}} \text{ 이므로 } 2^{100} = m^n,$$

따라서 n 은 100의 양의 약수이다. 즉

$$(2^{100})^1, (2^{50})^2, (2^{25})^4, (2^{20})^5, (2^{10})^{10}, (2^5)^{20}, (2^4)^{25}, (2^2)^{50}, (2)^{100}$$

과 같이 자연수의 순서쌍 (m, n) 은 모두 9개 이다.

104) ㉔

$$2 = \frac{60}{30} = \frac{6 \times 10}{15 \times 2} \text{ 이므로}$$

$$\log 2 = \log 10 + \log 6 - \log 15 - \log 2 = 1 + a - b - \log 2$$

$$\therefore \log 2 = \frac{a-b+1}{2}$$

105) 64

$n^{\frac{4}{k}}$ 의 값이 자연수인 경우의 예로 $n=6$ 이라고 하면

$6^{\frac{4}{k}}$ 에서 $k=1, 2, 4$ 인 3가지이므로 $f(6)$ 이다.

이것으로 부터 생각하기를 n 이 거듭제곱수인 경우를 관찰해 보자.

n 이 소수 m 의 완전제곱수이면 $(m^2)^{\frac{4}{k}} = m^{\frac{8}{k}}$ 에서

k 는 8의 양의 약수인 1, 2, 4, 8일 때이고 $f(n)=4$ 이다.

이것을 차례로 적용해 보면

n 이 세제곱수이면 $4 \times 3 = 12 = 2^2 \times 3$ 의 양의 약수의 개수 6

n 이 네제곱수이면 $4 \times 4 = 16 = 2^4$ 의 양의 약수의 개수 5

n 이 5제곱수이면 $4 \times 5 = 20 = 2^2 \times 5$ 의 양의 약수의 개수 6

n 이 6제곱수이면 $4 \times 6 = 24 = 2^3 \times 3$ 의 양의 약수의 개수 8

따라서 $f(n)=8$ 을 만족시키는 n 의 최솟값은 $2^6=64$ 이다.

106) ㉓

$$\log_{ab} 3 + \log_{bc} 3 + \log_{ca} 3 = 5$$

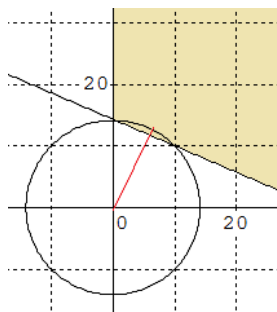
세 식을 연립하여 풀면

$$\log_{ab} 3 = 2, \log_{bc} 3 = 1, \log_{ca} 3 = 2$$

$$ab = \sqrt{3}, bc = 3, ca = \sqrt{3},$$

$$\therefore abc = 3$$

107) 172



$$10^{10} \leq 2^x 5^y \text{에서 } 10 \leq 0.3x + 0.7y,$$

$$\text{즉 } 3x + 7y \geq 100$$

원점에서 $3x + 7y = 100$ 에 이르는 거리에서

$$x^2 + y^2 \geq \frac{100^2}{3^2 + 7^2} = \frac{10000}{58} = 172.41 \cdots$$

따라서 최솟값의 정수부분은 172 이다.

108) ㉕

$$2^{2x} + 16 = 10 \times 2^x, \quad 2^{2x} - 10 \times 2^x + 16 = 0$$

$$(2^x - 2)(2^x - 8) = 0,$$

$$\therefore x=1, x=3, 1+3=4$$

109) ⑤

$$y = \log_3 9x = 2 + \log_3 x \text{ 이므로 } \overline{BC} = 2, \overline{AB} = 2$$

$$\text{따라서 } A(a, b), B(a+2, b) \text{ 이고, } b = \log_3 9a = \log_3 (a+2)$$

$$\text{이것을 풀면 } 3^b = 9a = a+2, a = \frac{1}{4}, 3^b = \frac{9}{4}$$

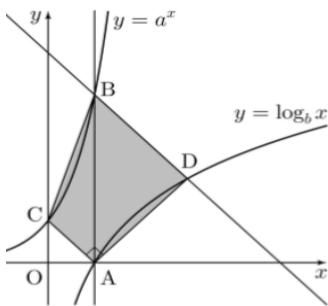
$$\therefore a + 3^b = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}$$

110) 15

$$\sqrt{3\sqrt[3]{27}} = \left(3 \times 27^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(3^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{7}{8}}$$

$$\therefore p+q=7+8=15$$

111) ②



$$A(1, 0), B(1, a), C(0, 1), D(k, k-1)$$

$$1+a=k+(k-1), 6=\frac{1}{2} \times a \times k,$$

$$k-1=\log_b k$$

$$\text{을 연립하여 풀면 } k=3, a=4, b=\sqrt{3}$$

$$\therefore ab=4\sqrt{3}$$

112) ④

$$9^a = 2^{\frac{1}{b}} \text{ 에서 } 3^{2a} = 2,$$

$$(a+b)^2 = \log_3 64 \text{ 에서 } 3^{(a+b)^2} = 64 = 2^6,$$

$$\text{즉 } 3^{\frac{(a+b)^2}{6}} = 2$$

$$2a = \frac{(a+b)^2}{6}, a^2 - 10ab + b^2 = 0,$$

$$t = \frac{a}{b} \text{ 라 하면 } a > b > 0 \text{ 에서 } t > 1 \text{ 이고}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 10\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0,$$

$$t^2 - 10t + 1 = 0, t = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{t-1}{t+1} = \frac{4+2\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} = \frac{2+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

113) ①

$$\sqrt[3]{36} \times \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^2 = (2^2 3^2)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$$

$$\therefore a = \frac{4}{3}$$

114) ②

$$2^{2x} = 9 = 3^2, 3^{\frac{2}{x}} = 4$$

115) ①

$$x > 1 \text{ 이면 } \log_x 100 > 0, \log_{100} x^4 > 0 \text{ 이므로}$$

$$\log_x 1000 + \log_{100} x^4 \geq 2\sqrt{\log_x 1000 \times \log_{100} x^4} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{등호는 } \log_x 1000 = \log_{100} x^4 = \sqrt{6} \text{ 일 때 이므로}$$

$$\log_{10} a = \frac{\sqrt{6}}{2}, m = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore \log_{10} a^m = 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = 6$$

116) ⑤

주어진 로그 등식에서

$$x + \sqrt{2}y > 0, x - \sqrt{2}y > 0, x^2 - 2y^2 = 4$$

$$\text{이므로 } |x| > |y| \text{ 이다. } |x| = X, |y| = Y \text{ 라 하면}$$

$$X^2 - 2Y^2 = 4, X - Y = k$$

$$\text{에서 } X^2 - 2(X-k)^2 = 4, X^2 - 4kX + 2k^2 + 4 = 0$$

$$D/4 = 4k^2 - 2k^2 - 4 = 2k^2 - 4 \geq 0, k \geq \sqrt{2}$$

$$k = \sqrt{2} \text{ 일 때 } X = 2\sqrt{2}, Y = \sqrt{2} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 구하는 최솟값은 } \sqrt{2} \text{ 이다.}$$

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.