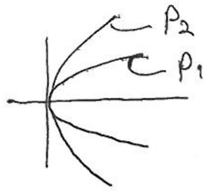
* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 19번.

$p\neq 0$, 두 포물선 $x^2=2y$ (①) 와 $(y+\frac{1}{2})^2=4px$ (②) 에 동시에 접하는 직선의 개수 = $f(p)$.

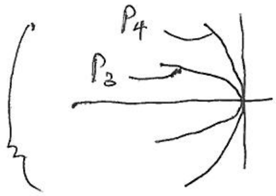
(변수가 p임).

$\lim_{p\to k+} f(p) > f(k)$ = ($p=k$)에서의 $f(p)$의 우극한값 > 함숫값.



$0<p_1<p_2$

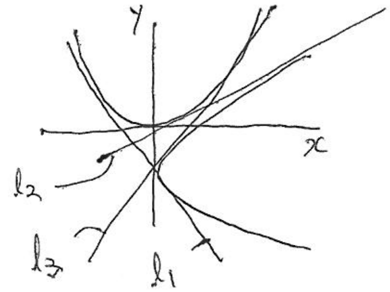
$p_4<p_3<0$

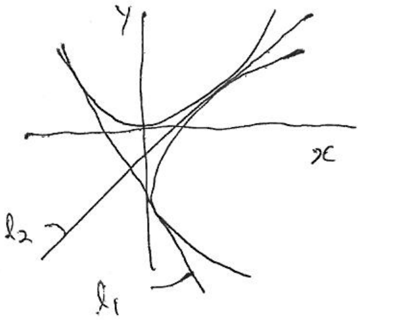


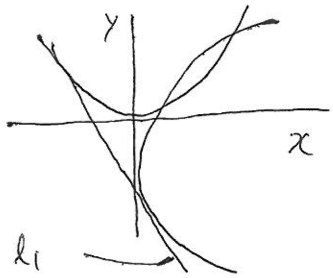
$y^2=4px$에서 $|p|$의 값이 커질수록 그래프상 더 벌어지는 그래프이다.

새통상 y축 대칭이므로 ($p>0$)을 기준으로 $f(p)$의 개형을 찾고, 대칭시키면 $f(p)$가 마무리된다.

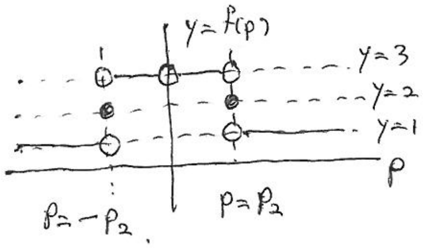
(i) $p=p_1$ (①과②의 교점 X) (ii) $p=p_2$ (교점 1개) (iii) $p=p_3$ (교점 2개)







∴ $f(p)$의 개형은 다음과 같다.



따라서 문제에서 묻는 우극한값이 함숫값보다 큰 $p=k$는

$-p_2$이다. ($k=-p_2$)

⇒ p_2값 찾고 (−)를 붙이면 된다.

(ii)의 경우 ③ 교점 좌표: $(t, \frac{t^2}{2}) = (t, 2\sqrt{pt}-\frac{1}{2})$ (단, $t>0$)

④ 접선: ①에서 $y=\frac{x^2}{2}$이므로 $\frac{dy}{dx}=x=t$. $\frac{4p}{t^2+1}$

②에서 $y^2+y+\frac{1}{4}=4px$이므로 $2y\,dy+1\cdot dy=4p\,dx$에서 $\frac{dy}{dx}=\frac{4p}{2y+1}$

③' $t^4+2t^2+1=16pt$

④' $t^3+t=4p$.

$16pt=4p\times 4t=4t^4+4t^2$

∴ $3t^4+2t^2-1=0$ ⟶ ∴ $t^2 \Rightarrow \frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 3\cdot(-1)}}{2\cdot 3} \Rightarrow \frac{1}{3}$ ($t^2>0$)

∴ $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ∴ $4p=\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3\sqrt{3}}$. ∴ $p_2=\frac{1}{3\sqrt{3}}$. ∴ $k=-p_2=-\frac{1}{3\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{9}$ //