오르비 파급효과 https://orbi.kr/profile/835293

삼각함수 호환

sin, cos과 tan, cot 호환이 자유자재로 되어야 삼각함수에서 실수를 줄일 수 있다.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=+\cos\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=+\sin\theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=+\cot\theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=+\cos\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$
$\sin(\pi-\theta)=+\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=+\tan\theta$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=+\cot\theta$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=+\sin\theta$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$
$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(2\pi-\theta)=+\cos\theta$ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$	$\sin(2\pi+\theta)=+\sin\theta$ $\cos(2\pi+\theta)=+\cos\theta$ $\tan(2\pi+\theta)=+\tan\theta$

위와 같은 표를 교과서에서 보고 무작정 외우는 안타까운 경우가 많다.
이를 굳이 외우지 않아도 실수 없이 sin, cos과 tan, cot 호환하는 방법을 알려주도록 하겠다.

※ $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$ 이다. cot 표현은 수학 1에서 등장하지 않으나 표현이 간결하여 본 교재에서는 쓰도록 하겠다.

소개할 $\frac{n}{2}\pi \pm \theta$에서 sin, cos과 tan, cot 호환하는 방법은 흔히 **'예각 가정법'**이라고 부르는 방법이다.

먼저, $\frac{n}{2}\pi \pm \theta$에서 n**이 짝수이면** sin**은** sin, cos**은** cos, tan**는** tan**로 두고,**
n**이 홀수이면** sin**은** cos, cos**은** sin, tan**는** cot**로 둔다.**

두 번째로, $\frac{n}{2}\pi \pm \theta$**에서** θ**를 항상 예각으로 간주하고 호환을 한다. (**θ**가 실제로는 둔각이든, 어떤 각이든)**
$\frac{n}{2}\pi \pm \theta$**를 나타내는 동경이 제 몇 사분면에 존재하는지 파악한 후, '호환하기 전 원래 삼각함수'의 부호가 양이면** $+$**를, 음이면** $-$**를 '호환 후 삼각함수' 앞에 붙여주자.**

빠른 이해를 돕기 위해 몇몇 예들을 살펴보자.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$를 호환할 때를 살펴보자. $\frac{n}{2}\pi+\theta$**에서** n**이 홀수이므로** cos**을** sin**으로 바꿔주자.**

θ를 예각으로 가정하면, $\frac{\pi}{2}+\theta$**를 나타내는 동경은 제2 사분면에 있다.**

제2 사분면에서는 **'호환하기 전 원래 삼각함수** $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$**의** cos**'의 부호가 음이다.**

따라서 **'호환 후 삼각함수** $\sin\theta$**' 앞에** $-$**를 붙여주자.** 종합하면 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$이다.

$\sin(\pi-\theta)$를 호환할 때를 살펴보자. $\frac{n}{2}\pi-\theta$**에서** n**이 짝수이므로** sin**을** sin**으로 두자.**
θ를 예각으로 가정하면, $\pi-\theta$**를 나타내는 동경은 제2 사분면에 있다.**
제2 사분면에서는 **'호환하기 전 원래 삼각함수** $\sin(\pi-\theta)$**의** sin**'의 부호가 양이다.**
따라서 **'호환 후 삼각함수** $\sin\theta$**' 앞에** $+$**를 붙여주자.** 종합하면 $\sin(\pi-\theta)=+\sin\theta$이다.

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$를 호환할 때를 살펴보자. $\frac{n}{2}\pi+\theta$**에서** n**이 홀수이므로** tan**를** cot**로 바꿔주자.**

θ를 예각으로 가정하면, $\frac{3\pi}{2}+\theta$**를 나타내는 동경은 제4 사분면에 있다.**

제4 사분면에서는 **'호환하기 전 원래 삼각함수** $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$**의** tan**'의 부호가 음이다.**

따라서 **'호환 후 삼각함수** $\cot\theta$**' 앞에** $-$**를 붙여주자.** 종합하면 $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$이다.

$\cos(2\pi-\theta)$를 호환할 때를 살펴보자. $\frac{n}{2}\pi-\theta$**에서** n**이 짝수이므로** cos**을** cos**으로 바꿔주자.**
θ를 예각으로 가정하면, $2\pi-\theta$**를 나타내는 동경은 제4 사분면에 있다.**
제4 사분면에서는 **'호환하기 전 원래 삼각함수** $\cos(2\pi-\theta)$**의** cos**'의 부호가 양이다.**
따라서 **'호환 후 삼각함수** $\cos\theta$**' 앞에** $+$**를 붙여주자.** 종합하면 $\cos(2\pi-\theta)=+\cos\theta$이다.

θ에 구체적인 숫자가 있을 때도 살펴보자.

$\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)$를 계산할 때를 살펴보자. $\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$로 바라본다 하자.

$\cos\left(\frac{n}{2}\pi-\theta\right)$꼴에서 n이 짝수이므로 $\cos$을 $\cos$으로 두자.

$\theta=\frac{\pi}{3}$로 두고 θ를 예각으로 가정하면 (θ는 실제로도 예각이다), $2\pi-\theta$를 나타내는 동경은 제4 사분면에 있다.

제4 사분면에서는 '호환하기 전 원래 삼각함수 $\cos(2\pi-\theta)$의 $\cos$'의 부호가 양이다.

따라서 '호환 후 삼각함수 $\cos\theta$' 앞에 $+$를 붙여주자. 종합하면 $\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$이다.

이번에는 $\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)$를 $\cos\left(\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$로 바라본다 하자.

$\cos\left(\frac{n}{2}\pi+\theta\right)$꼴에서 n이 짝수이므로 $\cos$을 $\cos$으로 두자.

$\theta=\frac{2\pi}{3}$로 두고 θ를 예각으로 가정하면 (θ는 실제로는 예각이 아니다), $\pi+\theta$를 나타내는 동경은 제3 사분면에 있다.

제3 사분면에서는 '호환하기 전 원래 삼각함수 $\cos(\pi+\theta)$의 $\cos$'의 부호가 음이다.

따라서 '호환 후 삼각함수 $\cos\theta$' 앞에 $-$를 붙여주자. 종합하면 $\cos\left(\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$이다.

이를 통해 예각 가정법이 잘 통함을 알 수 있다.

$\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)$를 계산할 때를 살펴보자. $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$로 바라본다 하자.

$\sin\left(\frac{n}{2}\pi+\theta\right)$꼴에서 n이 짝수이므로 $\sin$을 $\sin$으로 두자.

$\theta=\frac{\pi}{6}$로 두고 θ를 예각으로 가정하면 (θ는 실제로도 예각이다), $\pi+\theta$를 나타내는 동경은 제3 사분면에 있다.

제3 사분면에서는 '호환하기 전 원래 삼각함수 $\sin(\pi+\theta)$의 $\sin$'의 부호가 음이다.

따라서 '호환 후 삼각함수 $\sin\theta$' 앞에 $-$를 붙여주자. 종합하면 $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$이다.

$\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)$를 계산할 때를 살펴보자. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{3}\right)$로 바라본다 하자.

$\sin\left(\frac{n}{2}\pi-\theta\right)$꼴에서 n이 홀수이므로 $\sin$을 $\cos$으로 바꿔주자.

$\theta=\frac{\pi}{3}$로 두고 θ를 예각으로 가정하면 (θ는 실제로도 예각이다), $\frac{3}{2}\pi-\theta$를 나타내는 동경은 제3 사분면에 있다.

제3 사분면에서는 '호환하기 전 원래 삼각함수 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)$의 $\sin$'의 부호가 음이다.

따라서 '호환 후 삼각함수 $\cos\theta$' 앞에 $-$를 붙여주자. 종합하면 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$이다.

삼각함수 호환 공식은 α가 예각이 아니더라도 성립한다고 배웠다. 정말 가능한지 확인해보자.

예를 들어 α가 예각일 때, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$를 간단하게 바꾼다고 하자. $\frac{3\pi}{2}-\alpha$는 제3 사분면에 있다.

이때 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)<0, \sin\alpha>0$이므로 $-\sin\alpha$로 간단히 바꿀 수 있다.

다만, **α가 꼭 예각이 아니여도 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$를 $-\sin\alpha$로 바꿀 수 있다고 배웠다.** 진짜로 가능할까? 궁금하니 직접 해보자.

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$일 때, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$를 간단하게 바꾼다고 하자. $\frac{3\pi}{2}-\alpha$는 제2 사분면에 있다.

이때 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)<0, \sin\alpha>0$이므로 $-\sin\alpha$로 간단히 바꿀 수 있다.

$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$일 때, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$를 간단하게 바꾼다고 하자. $\frac{3\pi}{2}-\alpha$는 제1 사분면에 있다.

이때 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)>0, \sin\alpha<0$이므로 $-\sin\alpha$로 간단히 바꿀 수 있다.

$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$일 때, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$를 간단하게 바꾼다고 하자. $\frac{3\pi}{2}-\alpha$는 제4 사분면에 있다.

이때 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)>0, \sin\alpha<0$이므로 $-\sin\alpha$로 간단히 바꿀 수 있다.

이처럼 **우리가 그동안 알고 있는 삼각함수 호환 공식은 α가 예각이 아니더라도 성립함을 보였다.** 힘들게 α 범위를 열심히 나누는 수고를 안해도 된다.

가끔 이런 의문점이 들 때도 있다. $\sin(x+\alpha)$를 **$\cos$에 관련된 식으로 바꿔주고 싶을 때 $\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(x+\alpha)\right\}$인가? 아니면 x 대신 $\frac{\pi}{2}-x$을 대입한 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x+\alpha\right)$인가?**

교과서에는 $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 밖에 나와 있지 않아 헷갈릴 수 있다.

하지만 결론적으로는 $\sin(x+\alpha)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(x+\alpha)\right\}$이 맞다. 삼각함수의 덧셈정리를 이용해 증명하는 게 제일 빠르나 수학 1에서 이를 배우지 않기에 x, α에 직접 각을 대입하여 확인하는 절차를 꼭 거치자. **시험장에선 헷갈리지 말고 바로 써먹을 수 있으면 좋겠다.**

오르비 파급효과 https://orbi.kr/profile/835293

19학년도 9월 평가원 14번

실수 k에 대하여 함수

$$f(x) = \cos^2\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

1. $f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$를 관찰하면 $\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 **괄호 안이 $\frac{\pi}{2}$ 차이**가 난다는 것을 알 수 있다. 따라서 **삼각함수 호환**으로 쉽게 바꿀 수 있다.

$\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)=\cos^2\left\{-\frac{\pi}{2}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$와 같이 바꿀 수 있다.

2. $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$이므로 $f(x)=-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k+1$로 바꿀 수 있다. $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$를 t로 치환하면 $f(x)=-t^2-t+k+1\ (-1\le t\le 1)$이다.

$f(x)$의 최댓값, 최솟값을 구해야 하기에 t의 범위 설정을 잊으면 절대 안 된다.

$f(x)$는 $t=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값을 가지며 $t=1$일 때 최솟값을 갖는다.

$f(-\frac{1}{2})=3$이므로 $k+\frac{5}{4}=3,\ k=\frac{7}{4}$이다. 따라서 $f(1)=k-1$이므로 $m=\frac{3}{4}$이다.

$k+m=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$이므로 답은 ③!!

문제 Comment

2019 수능 완성 연계이고 많은 학생들이 무작정 미분을 하려다가 시간을 뺏기고 틀린 문제이다. EBS를 덜 공부했다기보다는 $\cos(x-\alpha)$**꼴에서 $\alpha=\frac{2n+1}{2}\pi\ (n은 정수)$인 것만 자주 봐왔을 것이다. 개념이 탄탄하면 $\alpha\neq\frac{2n+1}{2}\pi\ (n은 정수)$이어도 문제없을 듯하지만** 그렇지 않다면 EBS를 꼭 봐서 시험장에서 후회하는 일이 없도록 하자.

Chapter 4를 성실히 공부했다면 합성함수 그래프를 그리려는 사람이 분명 있었을 것이다. 그려보는 것도 좋지만 이 문제에서는 $f(x)$의 최대, 최소 정도만 확인하는 것이기에 효율이 많이 떨어진다.

$f(x)$의 극점, 미분가능성, 다른 그래프와의 교점 등등을 확인할 때는 $f(x)$를 직접 그려보는 것이 직관적으로 문제 풀기에 편하기에 매우 권장하지만 **$f(x)$의 최대, 최소 정도만 확인할 때는 $f(x)$가 정의되는 x의 범위에서 양 끝값과 극점 정도만 수식으로만 구해도 충분하다.**

오르비 파급효과 https://orbi.kr/profile/835293

2020 칼럼 모음

20년 3월 교육청 가형 손해설지:https://orbi.kr/00029634857/

20년 3월 교육청 나형 손해설지: https://orbi.kr/00029635025/

2021 수능특강 수1 선별좌표: https://orbi.kr/00029295119/

왜 라디안을 쓸까? (노베용): https://orbi.kr/00028479675/

삼각함수 값 실수없이 구하기(노베용): https://orbi.kr/00028924522/

사인법칙, 코사인법칙 활용: https://orbi.kr/00028624520/

기출 파급 미적 chapter 8 라이프니츠 미분법: https://orbi.kr/00029112973/

기출 파급 미적 chapter 3 그래프 그리기: https://orbi.kr/00028230748/

기출 파급 확통 chapter 5 전체: https://orbi.kr/00028507131/

기출 파급 확통 chapter 2 전체: https://orbi.kr/00028063419/

기출 파급 확통 출고!: https://atom.ac/books/7241