27. [Performance 수학Ⅰ + 확률과 통계 27번]

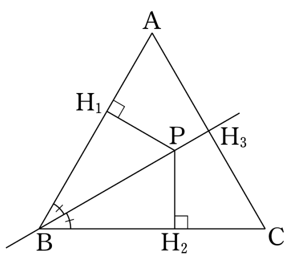
정삼각형 ABC 에 대하여 삼각형 내부의 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 PAB 의 넓이와 삼각형 PBC 의 넓이는 같다. (나) 삼각형 PBC 의 넓이는 삼각형 PCA 의 넓이의 2 배이다.

$\sin(\angle \mathrm{PCB})$ 의 값은?

① $\frac{\sqrt{7}}{14}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ③ $\frac{\sqrt{21}}{14}$ ④ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{21}}{14}$

〈 Solution 〉

1st Step **독해**	**[조건]** ① 정삼각형 ABC : 길이와 각의 크기에 대한 조건을 제시 ② 넓이는 같다 : 넓이의 비 제시 ③ 넓이의 2배 : 넓이의 비 제시 **[구하는 값]** ④ $\sin(\angle \mathrm{PCB})$: 점 P의 위치를 결정하는 것이 핵심
2nd Step **설계**	②, ③ 넓이의 비는 다른 비율로 대체되는 조건이므로 이를 파악하는 것이 핵심이다. 특히, 길이의 비를 알려주는 것이 일반적이다. ② 삼각형의 넓이의 비가 $1:1$이려면 $\frac{1}{2}\times(\text{밑변})\times(\text{높이})$의 비가 $1:1$이어야 한다. 이때, 각 삼각형의 밑변을 결정하면 높이의 비를 구할 수 있다. 즉, 삼각형의 밑변을 결정하는 것이 중요하다. ③도 같은 방식으로 생각하여 높이의 비를 구할 수 있고, 이를 통해 점 P의 위치를 결정할 수 있다. (참고) 높이의 비가 직선을 결정하므로 두 직선의 교점이 점 P임을 파악할 수 있다. ④ 각을 포함하는 직각삼각형을 찾거나, 사인법칙 또는 코사인법칙을 이용하여 구하는 값을 얻을 수 있다. 이때, 구체적인 길이를 구하는 것이 아니라 길이의 비를 구하는 것이므로 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 1이라 가정해도 구하는 값에는 영향을 미치지 않는다.
3rd Step **해결**	① 두 삼각형 PAB, PBC, PCA의 밑변을 각각 AB, BC라 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 세 삼각형의 밑변의 길이는 동일하다. ② 따라서 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$, 선분 BC에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_2}$라 하면 두 삼각형 PAB, PBC의 넓이가 같으므로 $\overline{\mathrm{PH_1}}:\overline{\mathrm{PH_2}}=1:1$이어야 한다. 즉, 점 P는 각 B의 이등분선 위에 있어야 한다. ③ 마찬가지로 점 P에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_3}$이라 하면 두 삼각형 PBC, PCA의 넓이의 비가 $2:1$이므로 $\overline{\mathrm{PH_1}}:\overline{\mathrm{PH_3}}=2:1$이어야 한다. 

2nd Step **설계**	④ 직각삼각형 PH_2C를 이용하면 $\sin(\angle PCB)$의 값을 구할 수 있으므로 직각삼각형 PH_2C의 두 변의 길이를 구해야 한다. 이때, 선분 PH_2에 대한 조건이 있으므로 $\overline{PH_2}$를 구하는 것을 우선시해야 한다. 또한, 부분과 전체에 의해 $\overline{CH_2}$를 구하는 것이 $\overline{PC}$를 구하는 것보다 수월할 것이라 예상할 수 있다.
3rd Step **해결**	④ $\overline{PH_1}:\overline{PH_2}=1:1$, $\overline{PH_1}:\overline{PH_3}=2:1$이므로 $\overline{PH_3}=k$라 하면 $\overline{PH_1}=\overline{PH_2}=2k$이다. 이때, k의 값을 구하기 위해 공유하고 있는 넓이를 이용하여 다음과 같은 등식을 만들 수 있다. (삼각형 ABC의 넓이) = (삼각형 PAB의 넓이) + (삼각형 PBC의 넓이) + (삼각형 PCA의 넓이) $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{4}=k+k+\dfrac{k}{2}$ 따라서 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{10}$이다. 즉, $\overline{PH_2}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$이다. 한편, $\angle PBC=\dfrac{\pi}{6}$이므로 직각삼각형 PBH_2에서 $\overline{BH_2}=\dfrac{3}{5}$이다. 즉, $\overline{CH_2}=\overline{BC}-\overline{BH_2}=\dfrac{2}{5}$이다. 따라서 $\tan(\angle PCB)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\sin(\angle PCB)=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$이다.