소통

수학의 재구성

김우섭 지음

2012-06

2013학년도 대수능
6월 모의평가
수리나형 해설

종평

1. 이견의 여지없이 평이했고, 9월과 11월 또한 큰 변화 없이 흘러갈 겁니다.

원점수 기준 1등급 추정컷이 96점, 2등급 추정컷이 81점입니다. 시험의 난이도로 볼 때 2등급컷이 더 올라갔어도 이상하지 않은데 생각보다 2등급 컷이 낮게 형성되었네요. 수리나형은 같은 시험에 응시하는 학생들 사이에 학력차가 굉장히 큰 편이라서 이런 일이 자주 벌어져요.

최근 몇 년간 그러했듯이 올해도 수리나형은 실력 싸움이라기보다 실수 싸움으로 갈 가능성이 무척 높습니다. 25문제 정도는 아주 평이하게 출제하고, 4문제 정도 약간 생각하는 수준의 문제, 만점방지용으로 30번 문항만 아주 어렵게 출제하리라 생각되는데요. 29문제까지 풀면서 얼마나 빠르고 정확하게 시간을 세이브했는가에 따라서 30번 문항에 투자할 시간이 많아지고, 여기에서 100점과 96점이 갈린다고 보면 돼요.

일단 전범위 개념정리를 2번 정도 마치고 나면, 단원별로 구성된 문제집은 가급적 풀지 말고, 30문항 모의고사 한 세트로 된 구성된 8절 문제집들을 많이 풀어보면서 문제푸는 감을 최대한 끌어올리는 것을 강력히 권합니다. 예를 들어서 설명해보자면 조건부확률 문제가 조건부확률 단원에 들어가 있으면 푸는 거 하나도 안 어렵습니다. 반면 시험지에서 불쑥 튀어나오면 이것이 조건부확률 문제구나하고 파악하는거 자체가 상당한 시행착오가 필요하지요. 앞으로 100일간 동안 당신이 공력을 쏟아야하는 부분은 이런 시행착오를 줄여나가는 것입니다. 문제의 어떤 조건을 봤을 때 어떻게 생각하고 어떻게 풀이를 몰아가야 할지, 수많은 조건반사들을 형성해놓아야만 해요.

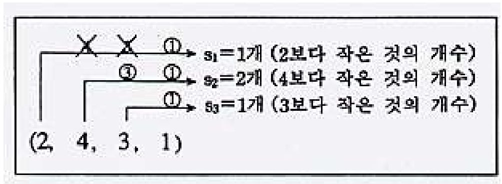
2. 끝판왕 공략법

최근 수능에서는 자연수라는 무대 위에서 하나, 둘, 셋, 넷, … 직접 손꼽아보면서 경우를 쪼개고 규칙을 찾아내는 문제가 상당히 높은 난이도로 다듬어져서 가나형 공통 30번 문항으로 꾸준히 출제되고 있습니다. 문자 그대로 끝판왕이죠. 올해 수능의 30번 문항 역시 이런 스타일로 출제될 것이라 강력히 예상됩니다. 출제자가 심혈을 기울여서 출제한 그 해 시험의 역작(力作)이 되겠지요.

올해 30번 문항에서는 출제자가 여러 단원의 내용을 복합적으로 섞어서 상황을 묘사해놓을 겁니다. 그래서 더더욱 학생들 입장에선 도대체 무슨 말을 하는 건지 이해하지가 쉽지 않을 텐데요. 우선 주어진 상황이 자연수에 대한 유한한 상황이란 것에 주목하세요! 유한하다는 것은 굉장히 강력한 조건입니다. 극단적으로 말해서 가능한 경우를 모조리 다 나열해보면 결국 답을 얻을 수 있으니까요. 예컨대 다음 두 문제를 봅시다.

#00-1. 96년 11월, 정답 72

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 네 원소를 배열하여 만든 순열 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$에 대하여 각 숫자 a_k의 오른쪽에 있는 수 중에서 a_k보다 작은 것들의 개수를 $s_k(k=1,2,3)$이라 하고, 이들의 합 $s_1+s_2+s_3$을 $|(a_1,a_2,a_3,a_4)|$로



나타내자. 예를 들면 $|(2,4,3,1)|=s_1+s_2+s_3=1+2+1=4$이다. 집합 A에 대한 24개의 모든 순열 (i_1,i_2,i_3,i_4)마다 각각 정해지는 $|(i_1,i_2,i_3,i_4)|$의 총합을 구하여라.

#00-2. 09년 09월, 정답 $\frac{15}{32}$[1)]

한 개의 동전을 던지는 시행을 5번 반복한다. 각 시행에서 나온 결과에 대하여 다음 규칙에 따라 표를 작성한다.

(가) 첫 번째 시행에서 앞면이 나오면 △, 뒷면이 나오면 ◯를 표시한다. (나) 두 번째 시행부터 (1)뒷면이 나오면 ◯를 표시하고, (2)앞면이 나왔을 때, 바로 이전 시행의 결과가 앞면이면 ◯, 뒷면이면 △를 표시한다.

예를 들어 동전을 5번 던져 '앞면, 뒷면, 앞면, 앞면, 뒷면'이 나오면 다음과 같은 표가 작성된다. 한 개의 동전을 5번 던질 때, 작성되는 표에 표시된 △의 개수가 2개일 확률을 구하시오.

두 문제 모두 상당한 난이도로 출제되었고, 실제로 정답률 또한 매우 낮았습니다. 하지만 원리를 찾지 못했어도 당황하지 않고 가능한 경우를 차근차근 나열하는 끈기가 있었다면 답은 찾을 수 있어요. 다시 말해 여차하면 이렇게라도 답을 찾고야 말겠다는 근성이 필요하다는 겁니다. 물론 올해 30번 문항을 출제하는 출제자의 의도는 단순한 나열에서 한 걸음 더 나가 다음의 3단계를 밟아나가는 것이겠죠.

Step1.		Step2.		Step3.
나열 $n=1,\ 2\ \cdots$	➜	관찰 시행착오 추측	➜	경우 나누기 규칙발견

귀납적으로 수열의 일반항을 찾아내는 문제들을 풀이하면서 많은 학생들이 나열하고 관찰하여 추측하는 풀이과정에 익숙해졌으리라 생각됩니다. 그럼에도 불구하고 이 유형이 여전히 까다로운 이유는 전체집합에 일관되게 적용되는 규칙이 존재하지 않는다는 점입니다. 문제에 주어진 상황을 2가지 또는 3가지의 부분집합으로 쪼개어서 각각 따로 생각해야지만 규칙을 찾을 수 있는데, 어떻게 부분집합을 쪼개야 규칙이 드러날지는 그 때 그 때 달라요.

작년 수능과 올해 6월 모의평가 #30에서는 지수-로그함수의 그래프를 결합시켜서 상황을 쪼개는

1) 원 문제의 서술 중 불필요하게 지저분하게 서술되어 있는 부분이 있어서, 주어진 상황을 해치지 않은 범위 안에서 발문을 살짝 다듬었습니다. 지면관계상 풀이는 생략합니다. 제 해설이 궁금한 학생은 <<수학의 재구성 2α 미적분과 통계기본>>, 289쪽를 참고해주세요.

기준을 제시하였는데요. 지수-로그함수의 그래프에서 자주 사용되는 성질들을 간단히 정리해보면 다음과 같습니다.

❶ 지수함수 $y=a^x$는 $(0,1)$과 $(1,a)$를 지나는 곡선이고 로그함수 $y=\log_a x$는 $(0,1)$과 $(a,1)$을 지나는 곡선입니다.
❷ 지수함수와 로그함수가 한 문제에서 동시에 나온다면 서로 역함수 관계에 있진 않은지 한 번쯤 의심해보세요.

만약 제가 출제자라면 9월과 11월에는 #30번 문항에서 지수-로그함수 말고 다른 성질을 결합시켜서 출제할 겁니다. 30번 문항은 예측불가능하게 내는 것이 목표인데, 9월까지 또 이렇게 내버리면 수능에서 어떻게 나올지 저같은 사람들이 상당히 구체적으로 예측해서 이런 유형의 문제들을 쏟아낼 거잖아요. 제가 출제자라면 이 꼴 보기 정말 싫을 겁니다.

3. 2014학년도 대수능 5월 예비시행 수학영역 B형 꼭!

약 두 달 전에 올해 고2 학생들을 대상으로 14학년도 수능을 위한 예비평가가 시행되었습니다. 다른 영역은 상당한 변화가 있는 것 같은데요. 다행히도 13학년도 수리영역과 14학년도 수학영역은 큰 차이가 없어 보입니다. 5월에 시행된 수학영역 A형를 검토해보면서 저는 올해 수능 수리나형 시험지를 아주 조금 어렵게 바꿔놓은 것 같다는 느낌을 받았어요. 수험생의 입장에선 양질의 전범위 모의고사가 많이 부족하기 마련인데요. 가뭄의 단비 같은 시험지입니다. 꼭 구해서 풀어보세요. 현재 5월 예비평가 해설 열심히 작성하는 중이고요. 조만간 공개하겠습니다!

#01. 정답률 92%

(준식)$=\log_2\left(3\cdot\dfrac{4}{3}\right)=\log_2 4=2$

#02. 정답률 93%

${}_5C_2=\dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$

#03. 정답률 93%

$\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2x+3)=\lim\limits_{x\to 0}x^2+\lim\limits_{x\to 0}2x+\lim\limits_{x\to 0}3=3$

#04. 정답률 91%

주어진 그래프는 꼭짓점이 6개이므로 그 인접행렬은 6×6행렬이고, 총 36개의 성분을 가집니다. 또한 주어진 그래프는 변이 8개이므로, 인접행렬의 모든 성분의 합은 $16(=2\times 8)$입니다.• 마지막으로 우리는 인접행렬의 성분은 0 또는 1뿐이란 사실을 잘 알고 있습니다.

• 인접행렬의 성질
① 그래프의 모든 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 변의 수의 2배이다.
② 인접행렬의 i행(또는 i열)의 성분의 합은 꼭짓점 x_i에 연결된 변 수의 개수와 같다.

이상의 내용을 종합해보면 주어진 인접행렬은 1인 성분이 16개, 0인 성분이 20개 있네요.•

• 수학은 언어다.

물론 주어진 그래프의 인접행렬(6×6)을 직접 다 써본 다음, 36개의 성분 중 0이 몇 개 있는지 그 개수를 직접 세어볼 수도 있습니다. 많은 학생들이 이런 방법으로 풀이했으리라 생각되는데요. 이것이 출제자의 의도라 보기는 아무래도 힘듭니다.

여러분들은 지금 공부를 하고 있습니다. 시험장에서는 어떻게 해서건 답을 얻어내는 것이 중요하지만, 공부할 때는 자신의 풀이를 반성하고 더 좋은 방법이 없는지 겸손하고 열린 마음으로 배워야 해요. “이런 거 몰라도 이 문제 풀 수 있잖아!”라고 짜증내는 것은 게으른 마음이 만들어 낸 자기합리화일 뿐이고, 이런 닫힌 자세를 계속 고집해선 결코 발전할 수 없습니다.

#05. 정답률 87%

수렴하는 경우는 극한과 사칙연산의 순서를 바꾸어 계산할 수 있지요.

다시 말해 $x^2+ax=\dfrac{x^2+ax}{x-1}\cdot(x-1)$이고, $x\to1$일 때

$$\frac{x^2+ax}{x-1}\to b,\ x-1\to0$$

이므로 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax)=0$입니다. 즉, $a=-1$이고, 이를 다시 처음 식에 대입하여 계산하면 분모-분자에서 $x-1$이 약분되어 $b=1$입니다.

$\therefore\ a+b=0$

#06. 정답률 86%

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=2^-$이고, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1^+$이므로 구하고자 하는 값은 3입니다.

#07. 정답률 87%

포화증기압이란 화학용어가 등장하고 있지만 이 개념을 모른다고 해서 이 문제를 못 푸는 것은 아닙니다. 포화증기압이 무엇을 의미하는지 신경 쓰지 말고 dry하게 함수관계 $\log P=8.11-\dfrac{1750}{t+235}$만 파악하고, 문제의 조건들을 수식화하면 됩니다. (편의상 단위는 생략하겠습니다.)

$t=15$일 때, $\log P_1=8.11-\dfrac{1750}{250}$

$t=45$일 때, $\log P_2=8.11-\dfrac{1750}{280}$

이므로 $\log\dfrac{P_2}{P_1}=\log P_2-\log P_1=\dfrac{1750}{250}-\dfrac{1750}{280}=\dfrac{3}{4}$입니다.

$$\therefore\ \frac{P_2}{P_1}=10^{\frac{3}{4}}$$

#08. 정답률 90%

문제에서 등차수열, 등비수열이란 조건을 놓치면 절대 문제 못 풉니다! 즉, 이 문제에서는 등비수열이라는 조건을 이용하여 $a_{n+1}=ra_n$으로 문자의 수를 줄일 수 있습니다.•

• 변수 줄이기

$$b_n=a_n^2(r^2-1)$$

이므로, $\dfrac{b_6}{b_3}=\dfrac{(a_6)^2}{(a_3)^2}=\left(\dfrac{a_3r^3}{a_3}\right)^2=r^6=2^6=64$입니다.

#09. 정답률 80%

조건 속에서 반복되는 부분이 있다면 그것은 하나의 덩어리로 포착해낼 수 있어야 합니다. 다시 말해 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x-2)}{x(x-2)} = 4$에서 $x-2=t$로 치환하여•

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{(t+2)t} = 4$$

로 보는 것이 주어진 식을 다루기가 쉽습니다. 이제 방향을 바꾸어서 구하고자 하는 것을 잘 관찰해봅시다!•

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)}{x(x+2)}(x+2)$$

이고, 우변의 두 항은 $x \to 0$일 때 각각 4와 2로 수렴하므로 다음이 성립합니다.

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 8$$

• 관점 바꾸기
사실 이 정도의 치환은 숙달되면 굳이 쓰지 않아도 그냥 눈으로 할 수 있습니다. 그래서 제 스승님(종로학원 김태식 선생님)은 이 방법을 眼(안) 치환이라 부르시더라고요.

• 구하는 것 거꾸로 풀기

#10. 정답률 76%

많은 경우 도함수는 부호만 보면 충분합니다.

즉, $f'(t) = 4t-2$, $g'(t) = 2t-8$이므로, $\frac{1}{2} < t < 4$일 때 $f'(t)$는 양수, $g'(t)$는 음수가 되어 서로 부호가 다릅니다. 도함수의 부호가 다르다는 것은 두 물체가 서로 반대방향으로 움직인다는 뜻이죠. •

• 수학은 언어다.

#11. 정답률 73%

a_n과 S_n이 뒤섞여 있을 때는 $S_n - S_{n-1} = a_n$을 이용하여 한 문자를 소거시켜야 합니다.• 즉, 문제의 조건 속에서 $\frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}}$를 보는 순간 반사적으로

$$\frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}} \quad •$$

로 바꾸어 놓고 생각을 했어야만 합니다. 제일 왼쪽의 식은 여러 문자가 곱으로 엮여있는 복잡한 식이지만 제일 오른쪽의 식은 인접한 두 항의 차로 표현된 단순한 식이거든요. 아주 자연스러운 변형입니다!

이 고비만 넘기고 나면 이후 과정들은 간단한 계산에 불과합니다.

$$(\text{준식}) = \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}} \right) = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{11}} = \frac{1}{3}$$

이고, 아직 사용하지 않은 조건에 따르면 $S_1 = a_1 = 2$이므로, 간단한 계산을 통해 $S_{11} = 6$을 얻을 수 있습니다.

• 변수 줄이기

• 망원경법 (telescoping method)
인접한 두 항의 차를 연달아 더하면 제일 앞과 끝만 남고 가운데의 항들은 다 소거됩니다. 마치 망원경을 펼쳤다 접었다 하는 것처럼

#12. 정답률 68%

색칠된 두 활꼴의 닮음비는 활꼴을 포함하는 두 원의 닮음비와 같고, 두 원의 닮음비는 그 지름의 비와 같습니다. 매 단계마다 정삼각형의 한 변의 길이는 이 전 단계의 $\dfrac{2}{3}$로 축소되므로, 결국 두 활꼴의 닮음비는 $3:2$가 됩니다. 즉, $S_n : S_{n+1} = 3^2 : 2^2$이므로

돌아가기

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + \frac{4}{9}S_1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 S_1 + \cdots = \frac{S_1}{1-\dfrac{4}{9}} = \frac{9S_1}{5}$$

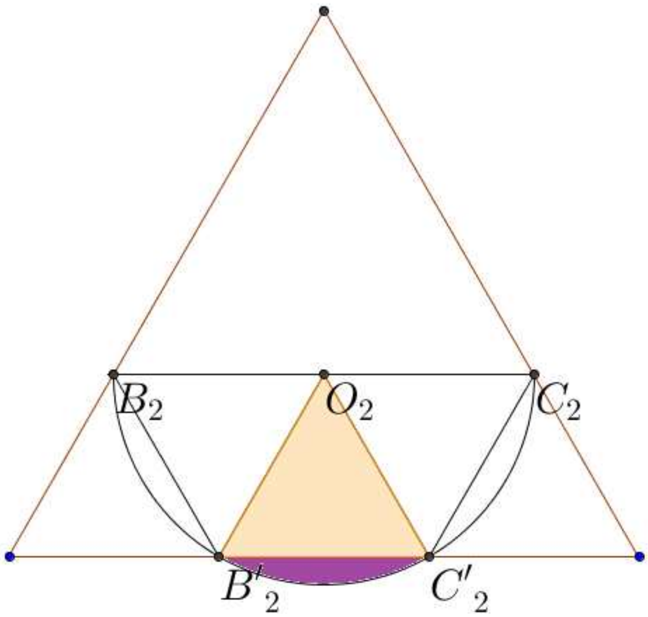
닮음비가 $m:n$이면 넓이비는 $m^2 : n^2$입니다.

임을 알 수 있습니다. 지금까지의 과정은 이러한 유형의 문제를 풀 때 항상 동일하게 적용돼요. 만약 여기까지 매끄럽게 오지 못했다면 반성해야 합니다.

이제 활꼴의 넓이 S_1만 구하면 답을 얻을 수 있는데요.

$$\text{활꼴} = \bigtriangledown OAB - \triangle OAB = \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin\theta = \frac{r^2}{2}(\theta - \sin\theta)$$

이번 기회에 활꼴의 넓이를 아예 하나의 공식으로 외워놓으세요. 부채꼴에서 삼각형을 빼면 활꼴의 넓이입니다. 참 쉽죠잉?



이고, $r=1$이고, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$이므로 $S_1 = \dfrac{1^2}{2}\left(\dfrac{\pi}{3} - \sin\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$입니다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{20}$$

#13. 정답률 77%

미분가능한 함수가 주어졌을 때 닫힌구간에서 최댓값 또는 최솟값은 극값과 양끝값 중 가장 큰 값과 가장 작은 값입니다. 이제 극값을 구해봅시다.

숲과 나무 범위 좁히기

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

이므로, $f(0)=a,\ f(1)=a-2,\ f(2)=a-4,\ f(4)=a+16$ 중 가장 작은 값과 가장 큰 값을 찾으면 충분하네요. 즉,

$$m=a-4,\ M=a+16$$

이므로 $M+m=\ 2a+12=20$이고 $a=4$이어야만 합니다.

#14. 정답률 62%

㉠ 계산해보면 됩니다. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (참)

㉡ $A\in S$

$\Leftrightarrow\ A^2-A=O$

$\Leftrightarrow\ A(A-E)=O$

문제의 조건에 따르면 A의 역행렬이 존재하므로, 양변의 왼쪽에 A^{-1}를 곱하면 $A-E=O$을 얻을 수 있습니다. 즉, $A=E$입니다. (참)

주어진 것

㉢ $A+E\in S$

$\Leftrightarrow\ (A+E)^2-(A+E)=O$

$\Leftrightarrow\ A^2+A=O$

한편 $A^4\in S\Leftrightarrow\ A^8-A^4=O$이고, 조금 전에 얻은 성질($A^2=-A$)에 따르면 $A^8=(A^2)^4=(-A)^4=A^4$가 성립하네요. (참)

거꾸로 풀기

#15. 정답률 78%

문제의 조건 및 서술을 읽어보면 $a_1=2,\ a_2=1,\ a_n=a_{n-2}+1(n\geq 3)$임을 쉽게 파악할 수 있습니다. 마치 odd eye처럼 홀수항과 짝수항의 규칙이 각기 다른 수열이네요. 조금만 나열해보면 일반항이

$$a_n=\begin{cases} k+1 & (n=2k-1) \\ k & (n=2k) \end{cases}$$

임을 파악할 수 있고요. 그렇다면 S_n 또한

$$S_n=a_na_{n+1}=\begin{cases} (k+1)k & (n=2k-1) \\ k(k+2) & (n=2k) \end{cases}$$

으로 홀짝일 때 각기 다른 값을 가진다는 것을 알 수 있습니다.

$$\therefore\ f(6)=6,\ g(7)=7^2+2\cdot 7=63,\ f(6)+g(7)=69$$

#16. 정답률 84%

이차식 ax^2+bx+c을 다루는 방법은 크게 두 가지가 있습니다.

❶ 인수분해 $ax^2+bx+c=\left(x-\dfrac{b}{2}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4}=0$

$\Rightarrow$ 근의 공식 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

❷ 완전제곱식 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$\Rightarrow$ 근과 계수의 관계 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

만약 인수분해를 사용해야 하는데 완전제곱식으로 식을 변형하거나 그 반대의 시행착오를 겪는다면 답에 도달하기는 그만큼 힘들어집니다. 그렇다면 이 문제에서는 두 방법 중 어느 것을 사용해야 할까요? 이 문제에서는 두 근이 $\alpha,\ \beta$라 주어졌으므로• 당연히 인수분해를 사용해야겠지요. 즉,

• 주어진 것

$$(k-\alpha)(k-\beta)=k^2-2x-1$$

가 성립합니다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(k-\alpha)(k-\beta)=\sum_{k=1}^{10}(k^2-2k-1)=\cdots=265$$

#17. 정답률 78%

접점 $(1, f(1))=(1,-4)$에서 그은 $y=x^3-5x$의 접선의 방정식은

$$y=f'(1)(x-1)-4=-2x-2$$

입니다. 이제 $\begin{cases} y=x^3-5x \\ y=-2x-2 \end{cases}$를 연립하여 교점의 x좌표를 구해봅시다.

$$x^3-3x+2=0$$
$$\vdots$$
$$(x-1)^2(x+2)=0$$

제가 쓰는 해설지에서 등장하는 $\vdots$ 나 $\cdots$는 '내가 직접 해봐!'라는 뜻입니다. 수학은 手학이기도 해요. 제가 시험장에서 학생 대신 계산해줄 수는 없잖아요. ㅠㅠ

즉, B의 좌표는 $(2, f(2))=(2,6)$입니다.

$$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(6+4)^2}=3\sqrt{5}$$

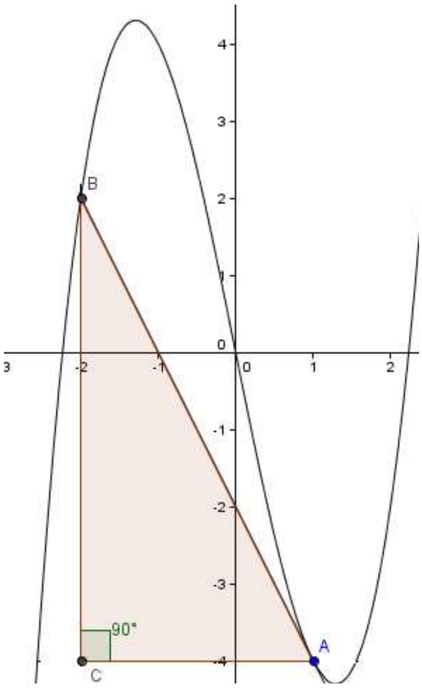
[별해] 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고 연립방정식 $\begin{cases} y=x^3-5x \\ y=mx+n \end{cases}$을 생각해봅시다. 제가 항상 지독히 강조하지만 그래프의 교점은 방정식의 근입니다.• 다시 말해 두 함수의 교점의 x좌표는

방정식 $x^3-5x=mx+n$의 근

과 같지요. 주어진 방정식을 다듬으면 $x^3-(m+5)x-n=0$인데요. 잠시 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 생각해보세요.

$$\boxed{\begin{array}{l} ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\text{일 때} \\ \qquad \alpha+\beta+\gamma=-b,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=c,\ \alpha\beta\gamma=-d \end{array}}$$

• 수학은 언어다.
관점 바꾸기



다시 말해 위 식에서 m이나 n이 아무리 바뀌어봤자, 주어진 방정식의 x^2의 계수는 0이므로 모든 근의 합은 항상 0입니다. 한편 접점은 방정식으로 표현하면 중근•이 되므로, 직선과 곡선의 또 다른 교점의 x좌표를 α라 하면

$$1+1+\alpha=0$$

가 성립합니다. 즉, $\alpha=-2$이군요.

• 다음 두 명제는 동치입니다.
$f(x)=(x-\alpha)^2q(x)$
$\Updownarrow$
$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$
(접한다)

$f'(1)=-2$이므로
$\triangle ABC$에서 $AC:BC=1:2$이고,
피타고라스정리에 의해

$$AC:AB=1:\sqrt{3}$$

이 성립합니다. 즉, $AB=3\sqrt{5}$를 얻을 수 있습니다.

학생들의 피로감을 의식해서 이 풀이를 별해로 다루긴 했습니다만, 사실 저는 지금 이 풀이가 출제자의 의도라 생각하는데요. 설명하느라 말이 길어진 것이지 계산량 자체만 비교해보면 처음 소개한 것보다 훨씬 간단해요. 제 판단을 보충하는 몇 가지 정황증거들을 언급해보면 다음과 같습니다.

❶ 바로 이전 문항인 #16을 살펴보면 2차방정식의 근과 계수의 관계 사용되었습니다. 그렇다면 #17의 풀이과정에서 3차방정식의 근과 계수의 관계가 사용된 것을 온전한 우연으로 취급하기는 아무래도 어렵겠지요.

❷ 수능을 출제할 정도의 내공을 가진 분들께서 이 문제를 출제하면서 이 풀이를 눈치 채지 못했을 가능성은 낮습니다.

#18. 정답률 49%

이번 시험문제에서 유일하게 깜짝출제되었다고 할 수 있는 문항입니다. 꼬지 않고 출제했음에도 불구하고 정답률은 제법 낮은 편이네요. 올해 수험생들은 이번 기회에 거듭제곱근을 꼼꼼하게 공부해 놓을 필요가 있습니다. 그 정의를 정확히 기억해놓으세요. 정의를 정확히 기억하고 이해하고 있으면, 잡다한 성질들은 다 여기로부터 파생되어 나옵니다.

$\boxed{a\text{의 } n\text{제곱근} \Leftrightarrow \text{방정식 } x^n = a\text{의 근}}$

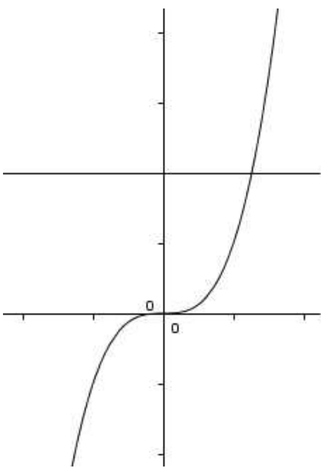
우리가 증명하진 않았지만 어디서 귀동냥하기로 n차 방정식은 복소수범위에서 항상 n개의 근을 가진다고 했었지요? 따라서 a의 n제곱근은 항상 n개입니다. 그리고 a의 n제곱근 중 실수인 것을 $\sqrt[n]{a}$ (또는 $\pm\sqrt[n]{a}$)라 쓰고, n제곱근 a라고 읽지요.

다시 한 번 강조하는데요. a의 n제곱근과 n제곱근 a를 혼동하지 마세요!

당연하게도 거듭제곱근 중 실근의 개수는 $y=x^n$과 $y=a$의 그래프의 교점의 개수와 같습니다. 즉, 이 문제에서는 다음과 같이 규칙을 발견할 수 있습니다.

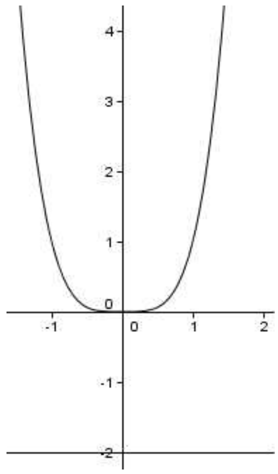
수학은 언어다.
그래프의 교점
= 방정식의 근

❶ n이 홀수일 때



$a_n = 1$

❷ n이 짝수일 때



$a_n = 0$

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2^3} + 0 + \frac{1}{2^5} + 0 + \frac{1}{2^7} + \cdots = \frac{1/2^3}{1-1/2^2} = \frac{1}{6}$$

#19. 정답률 74%

㉠ 당신은 그래프를 그릴 줄 압니까? 하고 묻고 있네요. 자명합니다!

㉡ 표를 그려서 판단하는 것이 제일 확실합니다.

x	1^-	1	1^+
$(x-1)$	0^-	0	0^+
$f(x)$	-1^+	1	1^+
$(x-1)f(x)$	0^-	0	0^+

쉽게 말해 0으로 수렴하는 함수는 곱하면 곱할수록 점점 더 좋은 일이 일어납니다.

㉢ $\{f(x)\}^2 = x^2$이네요. 당연히 연속함수죠.

표를 이용하여 불연속함수의 극한을 단계별로 파악하는 것은 2004년 오르비수학법 곰스쿨 강의를 통해 제가 최초로 제안하였습니다. 이름만 대면 아는 유명 선생님께서 살짝 변형해서 자신이 창안한 것처럼 강의 하신다고 하는데요. 매우 불쾌합니다!

#20. 정답률 66%

낯설죠? 막막할 때는 기본으로 돌아가는 수밖에 없습니다. 절댓값이 주어진 문제를 풀이하는 기본 마음가짐은 경우를 나누어서 풀이하는 것입니다. 내친 김에 최대정수함수가 주어진 문제를 풀이하는 기본마음가짐은 실수 x를 정수부 n과 소수부 α로 분리하는 것이란 점도 잘 기억해놓으세요.

경우 나누기

❶ $|nf(a)-1| \geq 0$일 때

$\dfrac{nf(a)-1-nf(a)}{2n+3} = \dfrac{-1}{2n+3}$이므로 $n \to \infty$일 때 극한값은 0이 되어 조건을 만족하지 않습니다.

❷ $|nf(a)-1| < 0$일 때

$\dfrac{-nf(a)+1-nf(a)}{2n+3} = \dfrac{-2f(a)\cdot n+1}{2n+3}$이므로

$$\lim_{x \to \infty} (\text{준식}) = -f(a)$$

입니다. 조건을 만족하기 위해서는 $f(a) = -1$이어야만 하네요. 항상 강조하지만 그래프의 교점은 방정식의 근입니다. 즉, $y = f(x)$와 $y = -1$의 교점은 2개 존재하므로, 조건을 만족하는 a의 개수는 2개입니다.

답은 구했습니다만 아직 한 가지 미묘한 문제가 남아있습니다.

혹시 $f(a) = -1$와 $|nf(a)-1| < 0$가 상충하는 것은 아닐까요?

$|nf(a)-1| < 0$는 $\dfrac{1}{n} > f(a)$와 동치이고요. 임의의 자연수 n에 대하여 이 부등식이 성립하기 위해서는 $f(a) = 0$ 또는 $f(a) < 0$이 성립해야합니다. 다행히 서로 모순되지 않네요. :)

이 부분을 엄밀하게 설명하려면 Archimedean Property라는 전공지식을 필요로 합니다. 이 때문에 이 문제가 저는 좀 껄끄럽네요.

#21. 정답률 65%

자릿수가 같은 두 수의 대소비교는 두 수의 상용로그의 가수의 대소비교와 같습니다. 작년 수능 나형 20번 문항을 풀이하면서도 이 성질이 중요하다고 한 차례 언급을 했었는데요.[2] 이번 6월 모의평가에서도 이 성질이 반복하여 출제되었네요.

동치변형

두 수의 자릿수가 같다면 결코 $f(2x)<f(x)$일 수 없습니다. 바꿔 말하자면 $f(2x)<f(x)$를 보는 순간 조건반사적으로 '$2x$와 x는 서로 자릿수가 다른 두 자연수'이구나 하고 떠올려야만 해요.

또한 100보다 작은 자연수x라고 범위가 주어져있네요. 앞서 총평에서도 간단히 언급했지만 유한한 상황은 무척 다루기가 좋아요. 절대 놓쳐서는 안 되는 강력한 조건입니다. 이상의 두 가지 단서를 종합해보면 주어진 조건을 만족하는 경우의 수는 다음과 같이 헤아릴 수 있습니다.

주어진 것

❶ x는 한 자리 자연수이지만 $2x$는 두 자리 자연수가 되는 경우

$$x\in\{5,\ 6,\ 7\ ,8,\ 9\}$$

❷ x는 두 자리 자연수이지만 $2x$는 세 자리 자연수가 되는 경우

$$x\in\{50,\ 51,\ 52,\ \cdots\ ,99\}$$

이므로, x의 개수는 $55(=5+50)$개입니다.

이 문제 또한 한 가지 미묘한 문제가 남아있는데요. $f(2x)<f(x)$라면 '$2x$와 x는 서로 자릿수가 다른 두 자연수'인 것은 옳지만, 그 역인 '$2x$와 x는 서로 자릿수가 다른 두 자연수'라고 해서 반드시 $f(2x)<f(x)$일까요? 저는 이 문제를 그냥 이렇게 풀어버렸네요??? 이 부분의 논리를 보충하는 것은 학생들의 숙제로 돌리겠습니다. 어렵지 않아요.

---

2) 수학의 재구성 2α 작년기출모아보기, p.040

#22. 정답률 90%

$f'(x)=2x+7$이므로 $f'(3)=13$

#23. 정답률 85%

$\frac{\infty}{\infty}$꼴 극한을 다룰 때는 가장 센 놈만 살아남는다는 정글의 법칙을 잊지 마세요. $a\neq0$인 경우, 주어진 극한은 ∞로 발산해서 조건을 만족하지 않습니다. 즉, $a=0$이고 $\frac{an^2+bn+7}{3n+1}\cong\frac{b}{3}=4$이어야만 하네요. $b=12$이고 $a+b=12$입니다.

단순화

#24. 정답률 86%

두 식을 더해주고 빼면 $a_{10}=-3$, $a_6=9$을 얻을 수 있습니다. 한편 등차수열은 일차함수에서 정의역이 자연수로 제한된 특수한 경우이고,

관점 바꾸기

두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

이므로, a_n의 일반항은 다음과 같이 손쉽게 구할 수 있습니다.

$$a_n=\frac{-3-9}{10-6}(n-10)-3=-3n+27 \quad \therefore\ a_2=21$$

#25. 정답률 69%

로그의 진수조건에 의해 $-7<x<7$이고, 조건의 부등식을 풀면

$$\log_2(7-x)+\log_2(7+x)=\log_2(7+x)(7-x)>\log_2 2^4$$

$$\Rightarrow\ 49-x^2>16\ \Rightarrow\ 33>x^2$$

이므로, 조건을 만족하는 정수 x들을 모아보면 $\{-5, -4, \cdots, 4, 5\}$입니다. 총 11개이네요.

#26. 정답률 87%

$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$에서 양변의 오른쪽에 A^{-1}를 곱하면 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$이고요. 문제의 또 다른 조건에 따르면 $\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$이네요.

$$\therefore\ p+q=5+4=9$$

#27. 정답률 78%

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-5}{x-1}=9$로부터 $f(1)=5$, $f'(1)=9$를 얻을 수 있습니다.

이제 $g'(x)=\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$에서 $x=1$을 대입하면

$$\therefore\ g'(1)=f(1)+f'(1)=14$$

#28. 정답률 54%

고교수학에서 등장하는 여러 종류의 식들 다시 말해 분수식, 무리식, 사인과 코사인, 지수, 로그 등등을 관통하는 하나의 원리를 꼽자면

다항식으로 만들라!

단순화

입니다. 그래서 저는 문제의 조건 $\frac{1}{n+2} < \frac{a_n}{k} < \frac{1}{n}$를 보는 순간 반사적으로 이렇게 식을 정리했습니다.

❶ 역수 취해서, $n+2 > \frac{k}{a_n} > n$

❷ a_n 곱해서, $(n+2) \cdot a_n > k > n \cdot a_n$

이제 구하는 것을 살펴봅시다. a_n은 위 부등식을 만족하는 자연수 k의 개수이고요. a_{10}의 값을 묻고 있네요. 이 때 자연수라는 조건은 대단히 중요합니다. 극단적으로 말해서 도저히 모르겠다면 하나, 둘, 셋, 넷하고 직접 다 세어보면 되거든요. 한 걸음 더 나가 다행히도 이 문제에서는 a_{100}이나 a_{200}이 아니라 a_{10}을 묻고 있습니다. 충분히 차근차근 나열하면 답에 도달할 수 있는 상황입니다.

나열

다만 저는 조금 일반화시켜서 접근해볼게요. 단순히 이 문제의 답을 얻는 것이 제 목적이 아니라 이 문제의 해설을 통해 또 다른 문제를 풀어낼 수 있는 사고방식을 전달하는 것이 제 목표니까요.

우선 부등식 $(n+2) \cdot a_n > k > n \cdot a_n$를 만족하는 자연수 k의 개수는

$$(n+2)a_n - na_n + 1 = 2a_n + 1$$

입니다. 즉, $a_{n+1} = 2a_n + 1$이고요. 이 수열의 일반항은 $a_n = 1 + 2^{n-1}$임을 어렵지 않게 발견할 수 있습니다.

$$\therefore\ a_{10} = 513$$

두 자연수 a, b사이에는 $b-a+1$개의 자연수가 있습니다. 무작정 외울 필요 없어요. 구체적인 예를 가지고 조금만 생각해보면 당연합니다. 5와 3사이에 몇 개에 자연수가 있는지 생각해보세요.

#29. 정답률 48%

바로 조금 전 문항들을 설명하면서도 언급했지만 고교수학에서 등장하는 여러 종류의 식들 다시 말해 분수식, 무리식, 사인과 코사인, 지수, 로그 등등을 관통하는 하나의 원리를 꼽자면

다항식으로 만들라!

입니다. 그래서 저는 $4^x+4^{-x}+a(2^x-2^{-x})+7=0$라는 조건을 보는 순간 반사적으로 $2^x-2^{-x}=t$라 치환해서

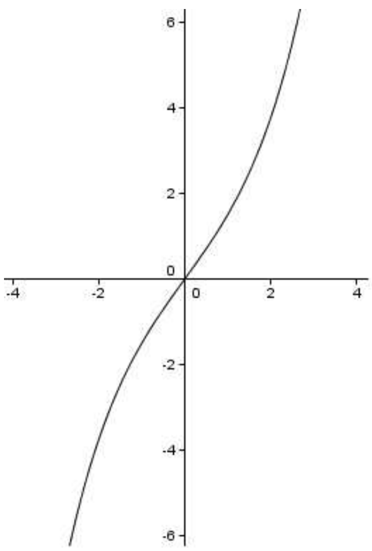
$$t^2-2+at+7=0$$

$$t^2+at+5=0$$

라는 다항식으로 바꾸어버렸습니다. 이 이차방정식이 실근을 가지기 위해서는 그 판별식을 생각해서

$$a^2-20\geq 0$$

라는 부등식을 얻을 수 있습니다. 즉, 조건을 만족하는 가장 작은 양수는 $m=\sqrt{20}$이고, $m^2=20$입니다.



참고. $f(x)=2^x-2^{-x}$의 그래프를 간단히 그려보면 다음과 같습니다.

따라서 이렇게 치환을 했을 때는 제한번역을 고민하지 않아도 됩니다. 반면 2^x+2^{-x}는 항상 양수값을 가지니 주의하세요!

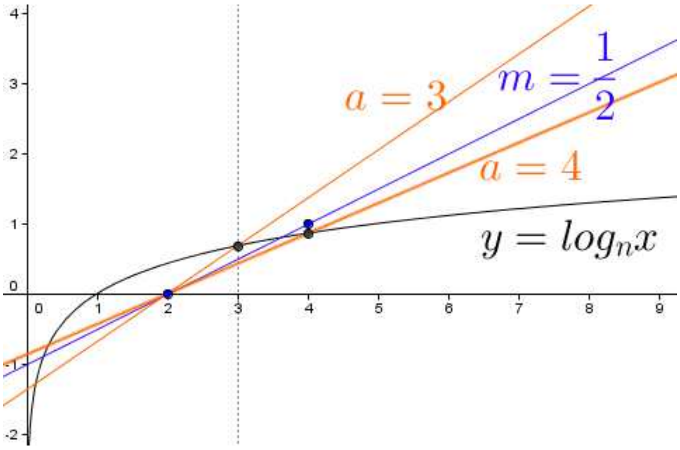
#30. 정답률 36%

최근 수능에서는 자연수라는 무대 위에서 하나, 둘, 셋, 넷, ⋯ 직접 손꼽아보면서 경우를 쪼개고 규칙을 찾아내는 문제가• 상당히 높은 난이도로 다듬어져서 30번 문항으로 꾸준히 출제되고 있습니다. 이번 6월 모의평가 또한 이러했고, 9월 모의평가, 수능 또한 그러할 것이라 강력히 예상됩니다.

• 나열

도무지 감이 잡히지 않을 때는 주어진 문자(n, a)에 숫자를 넣어보면서 상황을 이해하려 시도해보세요.

우선 문제에 제시된 것처럼 과연 $f(5)=4$인지 확인해볼까요?



$(2,0)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선은 항상 $(4,1)$을 지납니다.• (파란색으로 표시할게요.) 이제

$(2,0)$과 $(3,\ \log_5 3)$을 지나는 직선

$(2,0)$과 $(4,\ \log_5 4)$을 지나는 직선

을 순차적으로 그어보면(주황색으로 표시했습니다!) $a=3$일 때는 주황색 직선이 파란색 직선보다 위에 있지만 $a=4$일 때는 주황색 직선이 파란색 직선보다 아래에 위치합니다. $\log_5 4<1$이거든요. 즉, 주황색 직선이 파란색 직선보다 아래에 위치하도록 하는 가장 작은 자연수 a값은 4이고,

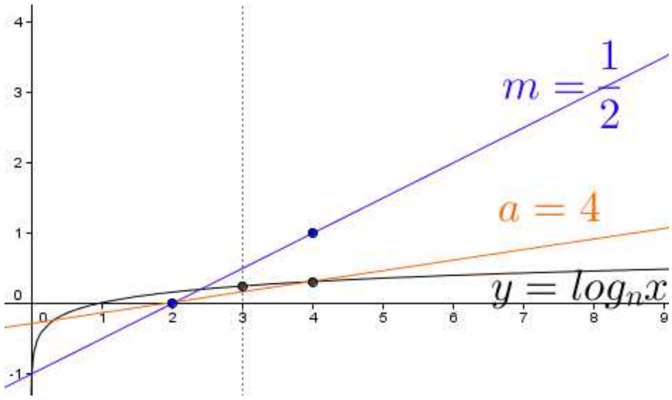
따라서 $f(5)=4$입니다.

• 불변량

지수-로그함수 문제에서는 지금처럼 고정된 점이 자주 등장합니다. 사실 지수함수와 로그함수 사이의 대칭성도 자주 등장하는데, 이 문제에서는 사용되지 않았네요.

아하! 이제 문제에 주어진 상황이 어떠한지 감이 와요? 이제 반대로 아주 극단적인 경우를 생각해봅시다.• $n=100$정도 되었다고 생각해보고 그래프를 그려보면 다음과 같습니다.

• 극단화



$y=\log_n x$가 x축에 가깝게 납작하게 그려지는 바람에 $a=3$인 경우만 생각해보아도 주황색 직선이 파란색 직선보다 아래에 있네요. 즉, $f(100)=3$이고요. 한 걸음 더 나가 우리는 n이 충분히 크면 $f(n)=3$이란 귀중한 아이템을 얻었습니다. 이제 $f(n)=3$인 가장 작은 n의 값만 구하면 충분합니다. 남은 것은 간단한 계산뿐입니다!

$$\frac{\log_n 3}{3-2}\le\frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{(역수 취해서) } \log_3 n\ge 2$$

이므로, $n\ge 9$일 때는 $f(n)=3$이고요.

$$f(4)=f(5)=\cdots=f(8)=4$$

입니다.• 빙고!

• 경우 나누기

$$\therefore \sum_{n=4}^{20} f(n)=4\times5+3\times22=86$$