* 2019학년도 평가원 6월 수학 나형 29번.

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\frac{5}{2}x & (x\geq 1) \end{cases}$$

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다.

→ 실수 전체의 집합에서 증가 또는 감소한다.

방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 서로 다른 실근 3개, 교점의 x좌표가 각각 -1, 1, 2이다.

(i) 증가함수인 경우 ($a>0$, $c>0$, $cx^2+\frac{5}{2}x$의 대칭축이 1보다 작거나 같다)

→ $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$와의 교점은 $y=x$ 위에 존재. ∴ 교점은 $(-1,-1)$, $(1,1)$, $(2,2)$.

연속이므로 $c+\frac{5}{2}$ (함숫값) $=a+b$ (극한값) $=1$. ($\because (1,1)$)

$f(-1)=-a+b=-1$. $\therefore b=0,\ a=1,\ c=-\frac{3}{2}$ ⇒ 모순.

(ii) 감소함수인 경우 ($a<0$, $c<0$, $cx^2+\frac{5}{2}x$의 대칭축이 1보다 작거나 같다)

→ $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$와의 교점은 홀수개로 존재하고, median인 $x=1$인 경우는 $y=x$ 위에 존재한다. 또한 $(-1, f(-1))$과 $(2, f(2))$가 $y=x$ 대칭이므로

교점은 $(-1,2)$, $(1,1)$, $(2,-1)$이다.

연속이므로 $c+\frac{5}{2}=a+b=1$

$f(-1)=-a+b=2$.

$f(2)=4c+5=-1$.

$\therefore c=-\frac{3}{2},\ b=\frac{3}{2},\ a=-\frac{1}{2}$.

$\therefore 2a+4b-10c=-1+6+15=20$

* 증가함수이든 감소함수이든 대칭축은 문제 내용상 1보다 작거나 같아야 한다.