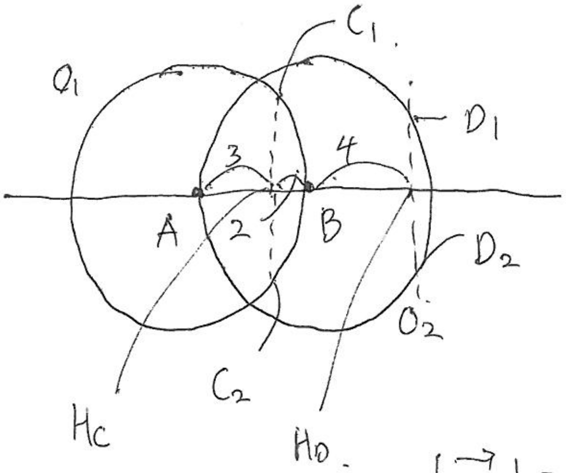
* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 29번.



$\overline{AB}=5$. $\cos(\angle CAB)=\frac{3}{5}$, ∴ $\overline{AH_C}=3$. $\overline{H_CB}=2$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=30$, ∴ $\overline{H_CH_D}=6$. ∴ $\overline{BH_D}=4$.

$A(0,0)$, $B(5,0)$ 이라 하면

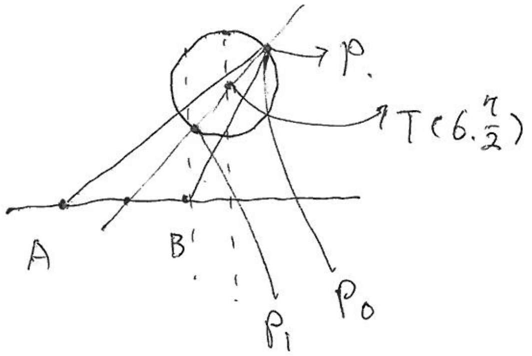
$C_1(3,4)$, $D_1(9,3)$, $C_2(3,-4)$, $D_2(9,-3)$.

$|\overrightarrow{C_1D_1}|=\sqrt{37}<\sqrt{81}$, $|\overrightarrow{C_1D_2}|=\sqrt{36+49}=\sqrt{85}>\sqrt{81}$

∴ $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{C_1D_1}$ or $\overrightarrow{C_2D_2}$. x축 대칭으로 볼 수 있으므로 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{C_1D_1}$ 에서 생각해도 된다.

$\overline{CD}$를 지름으로 하는 원 ($(x-6)^2+(y-\frac{7}{2})^2=\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2$) 위의 점 P에 대하여

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 max $=a+b\sqrt{74}$. $\overline{CD}$를 지름으로 하는 원을 O_3, 중심을 T라 하면



$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{TP})\cdot(\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{TP})$$

$$=\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{TP}\cdot(\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{BT})+|\overrightarrow{TP}|^2$$

$$=(6,\tfrac{7}{2})\cdot(1,\tfrac{7}{2})+|\overrightarrow{TP}|\times(7,7)\cdot\cos+\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2$$

$$=6+\frac{49}{4}+\frac{37}{4}+\frac{\sqrt{37}}{2}\times7\sqrt{2}=\frac{55}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{74}.$$

* 원 위의 점 P에 대한 두 점 A, B의 내적 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$는 원의 중심과 $\overline{AB}$의 중점을 연결하는 직선 상에서 M, m이 나타난다.

$$∴\ a+b=\frac{55}{2}+\frac{7}{2}=\frac{62}{2}=31$$

* $(x-6)^2+(y-\frac{7}{2})^2=\frac{37}{4}$ 과 $y=x-\frac{5}{2}$ 와의 교점이 P_1과 P_0가 되고, 실제 계산해 보면 $P_0(6+\frac{\sqrt{74}}{4}, \frac{7}{2}+\frac{\sqrt{74}}{4})$ 가 나오고 $A(0,0)$, $B(5,0)$과의 내적을 구하면 $\frac{55}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{74}$ 가 나옴.