소통 수학의 재구성

김우섭 지음

2012-06

2013학년도 대수능 6월 모의평가 수리가형 해설

총평

1. 단정적으로 쉽다고 말할 수 없지만 아주 어렵다고도 말할 수 없는 시험

원점수 기준 1등급 추정컷이 96점, 2등급 추정컷이 85점입니다. 시험을 풀어보고 나서 제가 직관적으로 예상했던 1등급 컷은 92점, 2등급 컷은 85점 정도였는데 1등급컷이 생각보다 높게 형성되었네요. 올해 수능에서 상위권 학생들 사이에서 수리가형 1등급 싸움이 무척 치열해질 것이란 뜻입니다.

현재 교육과학기술부에서 발표한 만점자 1% 정책은 정말 멍청하고 무리한 상징적 목표입니다. 객관식이라는 시험의 특성상 한 번의 실수가 기구한 운명의 장난이 되어버릴 위험성이 무척 높은데요. 각 영역별로 만점자를 1% 배출하겠다는 위험한 발언을 정말로 실천하기 위해서 시험을 무리하게 쉽게 출제하려 시도하다 보면, 수리가형 기준 1등급 컷이 98점이나 97점에서 잡히는 끔찍한 일이 벌어질 수도 있습니다. 08학년도 수능이 그러했지요. 하필 이 해가 수능성적표에 오직 등급만 찍어주는 멍청하기 짝이 없는 시도를 했던 해이기도 해요. 매해 정치적인 이해관계에 휘둘려서 고생하는 평가원장을 보면 안쓰럽기도 합니다만. 다시 본론으로 돌아와서 이야기하자면 실제로 시험을 출제하는 교육과정평가원에서는 만점자 1%라는 상징적 목표에 집착하기보다는 내부적으로 원점수 등급컷을 이번 시험정도로 유지하는 것을 실질적 목표로 잡고 있을 거라 예상됩니다.

그런데 이번 시험을 통해서도 드러난 것처럼 가형에 응시하는 학생들 학력이 제법 좋아요. 더군다나 남은 5개월 동안 학생들이 가만히 손가락 빨고 놀고 있을까요? 그렇지 않습니다. 이번에 안정적으로 1등급에 안착한 학생들은 사실상 수학이 완성된 학생들이라서 더 이상 올라갈 곳이 없겠지만, 이번에 2등급을 맞은 학생들 중 절반 정도는 지금 지독하게 절치부심하고 있고, 9월 모의평가와 수능에서 무섭게 치고 올라올 겁니다. 만약 이번 6월 시험 정도의 난이도로 9월이나 11월 시험이 출제되면 장담하는데 난이도 조절 실패합니다. 평가원이 바보도 아니고 이거 빤히 알아요. 그렇다면 어떻게 평가원이 행동할까요? 당연히 수리가형의 시험난이도는 9월, 11월에 걸쳐서 서서히 올릴 겁니다. 이렇게 내야 원점수 등급컷이 지금 정도 수준으로 유지가 돼요. 이게 대세입니다.

그렇다면 이 글을 읽고 있는 학생은 어떻게 행동해야 할까요? 이번 시험 잘봤다고 싱글벙글해서 정신줄 놓고 있으면 9월 시험 때 정말 큰일 납니다! 9월부터가 수능과 범위가 일치하는 진짜 시험이란 것을 잊지 마세요. 많은 학생이 꺼리는 공간도형과 벡터에서 한 문제는 꼭 끝판왕급으로 출제될 겁니다.(이 문항의 번호는 #21 또는 #29정도가 될 테고요.)

모든 단원이 그러하겠지만 『기하와 벡터』를 대비하는 최고의 방법은 특히 기출문제입니다! 개념정리가 끝났다면 해당단원 기출문제들을 모조리 모아놓고 파노라마 형식으로 빠짐없이 다 다시 풀어보세요. 각 문제마다 어떤 아이디어들이 사용되었는지 한 두 문장 정도로 간단히 요약하여 정리하고, 문항을 엮어서 아이디어 사이의 연관성을 찾아보길 강력히 권합니다! 이 과정을 한 번이 아니라 최소한 3번 이상 하세요. 많은 학생들이 기출분석과 단순히 기출문제를 꼼꼼히 푸는 것을 구분하지 못하는데요. 기출분석이란 단순히 한 문제씩 각각 꼼꼼히 푸는 것을 넘어서 여러 문제들을 하나로 관통하는 큰 맥(脈)을 찾아내는 것을 의미합니다. 정말 구슬이 서 말이라도 꿰어야 보배

인 법입니다.

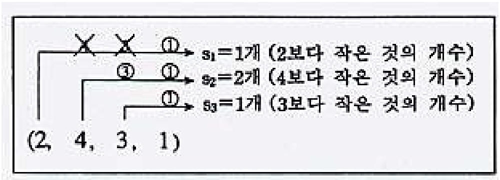
2. 끝판왕 공략법

최근 수능에서는 자연수라는 무대 위에서 하나, 둘, 셋, 넷, ⋯ 직접 손꼽아보면서 경우를 쪼개고 규칙을 찾아내는 문제가 상당히 높은 난이도로 다듬어져서 가나형 공통 30번 문항으로 꾸준히 출제되고 있습니다. 문자 그대로 끝판왕이죠. 올해 수능의 30번 문항 역시 이런 스타일로 출제될 것이라 강력히 예상됩니다. 출제자가 심혈을 기울여서 출제한 그 해 시험의 역작(力作)이 되겠지요.

올해 30번 문항에서는 출제자가 여러 단원의 내용을 복합적으로 섞어서 상황을 묘사해놓을 겁니다. 그래서 더더욱 학생들 입장에선 도대체 무슨 말을 하는 건지 이해하지가 쉽지 않을 텐데요. 우선 주어진 상황이 자연수에 대한 유한한 상황이란 것에 주목하세요! 유한하다는 것은 굉장히 강력한 조건입니다. 극단적으로 말해서 가능한 경우를 모조리 다 나열해보면 결국 답을 얻을 수 있으니까요. 예컨대 다음 두 문제를 봅시다.

#00-1. 96년 11월, 정답 72

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 네 원소를 배열하여 만든 순열 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$에 대하여 각 숫자 a_k의 오른쪽에 있는 수 중에서 a_k보다 작은 것들의 개수를 $s_k(k=1,2,3)$이라 하고, 이들의 합 $s_1+s_2+s_3$을 $|(a_1,a_2,a_3,a_4)|$로



나타내자. 예를 들면 $|(2,4,3,1)|=s_1+s_2+s_3=1+2+1=4$이다. 집합 A에 대한 24개의 모든 순열 (i_1,i_2,i_3,i_4)마다 각각 정해지는 $|(i_1,i_2,i_3,i_4)|$의 총합을 구하여라.

#00-2. 09년 09월, 정답 $\frac{15}{32}$[1)]

한 개의 동전을 던지는 시행을 5번 반복한다. 각 시행에서 나온 결과에 대하여 다음 규칙에 따라 표를 작성한다.

(가) 첫 번째 시행에서 앞면이 나오면 △, 뒷면이 나오면 ◯를 표시한다. (나) 두 번째 시행부터 (1)뒷면이 나오면 ◯를 표시하고, (2)앞면이 나왔을 때, 바로 이전 시행의 결과가 앞면이면 ◯, 뒷면이면 △를 표시한다.

예를 들어 동전을 5번 던져 '앞면, 뒷면, 앞면, 앞면, 뒷면'이 나오면 다음과 같은 표가 작성된다. 한 개의 동전을 5번 던질 때, 작성되는 표에 표시된 △의 개수가 2개일 확률을 구하시오.

두 문제 모두 상당한 난이도로 출제되었고, 실제로 정답률 또한 매우 낮았습니다. 하지만 원리를

1) 원 문제의 서술 중 불필요하게 지저분하게 서술되어 있는 부분이 있어서, 주어진 상황을 해치지 않은 범위 안에서 발문을 살짝 다듬었습니다. 지면관계상 풀이는 생략합니다. 제 해설이 궁금한 학생은 <<수학의 재구성 2α 미적분과 통계기본>>, 289쪽를 참고해주세요.

찾지 못했어도 당황하지 않고 가능한 경우를 차근차근 나열하는 끈기가 있었다면 답은 찾을 수 있어요. 다시 말해 여차하면 이렇게라도 답을 찾고야 말겠다는 근성이 필요하다는 겁니다. 물론 올해 30번 문항을 출제하는 출제자의 의도는 단순한 나열에서 한 걸음 더 나가 다음의 3단계를 밟아나가는 것이겠죠.

Step1.		Step2.		Step3.
나열 $n=1,\ 2\ \cdots$	➜	관찰 시행착오 추측	➜	경우 나누기 규칙발견

귀납적으로 수열의 일반항을 찾아내는 문제들을 풀이하면서 많은 학생들이 나열하고 관찰하여 추측하는 풀이과정에 익숙해졌으리라 생각됩니다. 그럼에도 불구하고 이 유형이 여전히 까다로운 이유는 전체집합에 일관되게 적용되는 규칙이 존재하지 않는다는 점입니다. 문제에 주어진 상황을 2가지 또는 3가지의 부분집합으로 쪼개어서 각각 따로 생각해야지만 규칙을 찾을 수 있는데, 어떻게 부분집합을 쪼개야 규칙이 드러날지는 그 때 그 때 달라요.

작년 수능과 올해 6월 모의평가 #30에서는 지수-로그함수의 그래프를 결합시켜서 상황을 쪼개는 기준을 제시하였는데요. 지수-로그함수의 그래프에서 자주 사용되는 성질들을 간단히 정리해보면 다음과 같습니다.

❶ 지수함수 $y=a^x$는 $(0,1)$과 $(1,a)$를 지나는 곡선이고 로그함수 $y=\log_a x$는 $(0,1)$과 $(a,1)$을 지나는 곡선입니다.

❷ 지수함수와 로그함수가 한 문제에서 동시에 나온다면 서로 역함수 관계에 있진 않은지 한 번쯤 의심해보세요.

만약 제가 출제자라면 9월과 11월에는 #30번 문항에서 지수-로그함수 말고 다른 성질을 결합시켜서 출제할 겁니다. 30번 문항은 예측불가능하게 내는 것이 목표인데, 9월까지 또 이렇게 내버리면 수능에서 어떻게 나올지 저같은 사람들이 상당히 구체적으로 예측해서 이런 유형의 문제들을 쏟아낼 거잖아요. 제가 출제자라면 이 꼴 보기 정말 싫을 겁니다.

3. 2014학년도 대수능 5월 예비시행 수학영역 B형 꼭!

약 두 달 전에 올해 고2 학생들을 대상으로 14학년도 수능을 위한 예비평가가 시행되었습니다. 다른 영역은 상당한 변화가 있는 것 같은데요. 다행히도 13학년도 수리영역과 14학년도 수학영역은 큰 차이가 없어 보입니다. 5월에 시행된 수학영역 B형을 검토해보면서 저는 마치 올해 9월 모의평가 시험지를 미리 풀어보는 듯한 느낌을 받았어요. 매해 가형에 응시하는 학생들은 전범위로 시행되는 양질의 모의고사가 많이 부족한데 가뭄의 단비 같은 시험지입니다. 꼭 구해서 풀어보세요. 제가 인상 깊게 본 문항 번호들을 간단히 언급하자면 다음과 같습니다.

#07, #13, #15, #17, #20, #21, #27, #28, #29, #30

쓰고 보니 좀 많은데요. 그만큼 문제질이 좋아요. 현재 5월 예비평가 해설 열심히 작성하는 중이고, 조만간 공개하겠습니다!

#01. 정답률 96%

$$(\text{준식}) = \log_2\left(3 \cdot \frac{4}{3}\right) = \log_2 4 = 2$$

#02. 정답률 95%

$$_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

#03. 정답률 92%

$f(aX) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ b \end{pmatrix}$이므로 $a=2$, $b=6$입니다. $\therefore\ a+b=8$

#04. 정답률 92%

주어진 그래프는 꼭짓점이 6개이므로 그 인접행렬은 6×6행렬이고, 총 36개의 성분을 가집니다. 또한 주어진 그래프는 변이 8개이므로, 인접행렬의 모든 성분의 합은 $16(=2\times 8)$입니다.• 마지막으로 우리는 인접행렬의 성분은 0 또는 1뿐이란 사실을 잘 알고 있습니다.

이상의 내용을 종합해보면 주어진 인접행렬은 1인 성분이 16개, 0인 성분이 20개 있네요.•

물론 주어진 그래프의 인접행렬(6×6)을 직접 다 써본 다음, 36개의 성분 중 0이 몇 개 있는지 그 개수를 직접 세어볼 수도 있습니다. 많은 학생들이 이런 방법으로 풀이했으리라 생각되는데요. 이것이 출제자의 의도라 보기는 아무래도 힘듭니다.

여러분들은 지금 공부를 하고 있습니다. 시험장에서는 어떻게 해서건 답을 얻어내는 것이 중요하지만, 공부할 때는 자신의 풀이를 반성하고 더 좋은 방법이 없는지 겸손하고 열린 마음으로 배워야 해요. "이런 거 몰라도 이 문제 풀 수 있잖아!"라고 짜증내는 것은 게으른 마음이 만들어 낸 자기합리화일 뿐이고, 이런 닫힌 자세를 계속 고집해선 결코 발전할 수 없습니다.

• 인접행렬의 성질

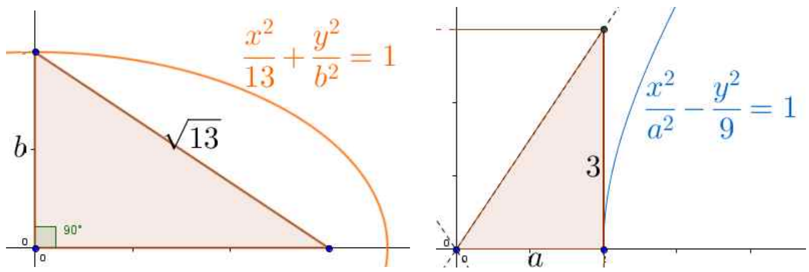
① 그래프의 모든 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 변의 수의 2배이다.

② 인접행렬의 i행(또는 i열)의 성분의 합은 꼭짓점 x_i에 연결된 변 수의 개수와 같다.

• 수학은 언어다.

#05. 정답률 90%

타원 $\dfrac{x^2}{13}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 초점은 $\left(\pm\sqrt{13-b^2},\,0\right)$이고, 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$의 꼭짓점은 $(\pm a,0)$입니다.



타원의 장축-단축-초점의 관계, 쌍곡선의 꼭짓점과 초점의 관계는 그림으로 기억하면 혼동되지 않습니다.

즉, 쌍곡선의 꼭짓점이 타원의 초점과 일치한다면 $13-b^2=a^2$가 성립하고 $a^2+b^2=13$입니다.

#06. 정답률 89%

우선 이차함수 $f(x)$는 실수전체의 집합에서 연속입니다. 또한 $g(x)$는 $x=0$과 $x=1$에서만 불연속이고, 그 외의 구간에선 모두 연속입니다. 마지막으로 우리는

$x=a$에서 $f(x)$와 $g(x)$가 연속이면 $f(x)g(x)$가 연속

임을 알고 있지요. 즉, $x\neq 0$, 2일 때, $f(x)g(x)$는 당연히 연속입니다.•

• 연속함수의 사칙연산은 여전히 연속함수입니다. 반면 $x=a$에서 연속인 두 함수를 합성하면 연속함수가 되지 않습니다. 주의하세요!

이제 '함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다.'라는 조건은 '$x=0$과 $x=2$에서 함수 $f(x)g(x)$가 연속이다.'로 단순화하여 생각할 수 있네요.

$x=0$에서 함수 $f(x)g(x)$가 연속이기 위해서는 두 값

$$\lim_{x\to0^-}f(x)g(x)=f(0)\cdot(-1)$$
$$\lim_{x\to0^+}f(x)g(x)=f(0)\cdot 1$$

가 같아야만 하므로 $f(0)=0$이어야만 하고요. 같은 방식으로 $f(2)=0$임을 알 수 있습니다. $f(x)$는 이차함수이고, x절편은 최대 2개인데, 방금 그 두 점을 모두 다 구했네요? 아직 사용하지 않은 문제의 조건에 따르면 $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이므로, $f(x)=x(x-2)$라 결정지을 수 있습니다.

$\therefore f(5)=15$

#07. 정답률 93%

포화증기압이란 화학용어가 등장하고 있지만 이 개념을 모른다고 해서 이 문제를 못 푸는 것은 아닙니다. 포화증기압이 무엇을 의미하는지 신경 쓰지 말고 dry하게 함수관계 $\log P = 8.11 - \frac{1750}{t+235}$만 파악하고, 문제의 조건들을 수식화하면 됩니다. (편의상 단위는 생략하겠습니다.)

$$t = 15\text{일 때, } \log P_1 = 8.11 - \frac{1750}{250}$$

$$t = 45\text{일 때, } \log P_2 = 8.11 - \frac{1750}{280}$$

이므로 $\log \frac{P_2}{P_1} = \log P_2 - \log P_1 = \frac{1750}{250} - \frac{1750}{280} = \frac{3}{4}$입니다.

$$\therefore \frac{P_2}{P_1} = 10^{\frac{3}{4}}$$

#08. 정답률 92%

주어진 부등식의 양변을 x로 나누면

$$x \geq 0\text{일 때, } \frac{\ln(1+x)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{2}\frac{e^{2x}-1}{x}$$

$$x < 0\text{일 때, } \frac{\ln(1+x)}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{1}{2}\frac{e^{2x}-1}{x}$$

를 얻습니다. 부등호의 방향이 조금 바뀌었지만 대세엔 지장이 없습니다. 어차피 극한 $\lim\limits_{x\to 0}$를 취하면 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{e^{2x}-1}{x}\right) = 1$이므로, 그 사이에 끼어있는 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 또한 1로 수렴하거든요. 이제 남은 것은 간단한 계산뿐입니다.

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(3x)}{3x} \cdot \frac{3x}{x}\right) = 1 \cdot 3 = 3$$

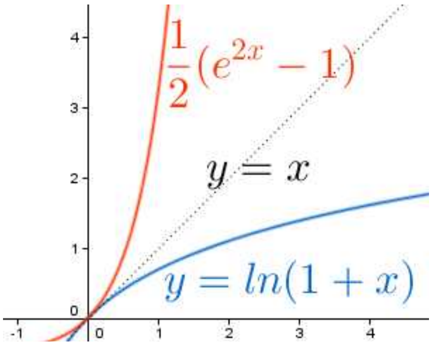
[별해]

많은 경우 곡선 $y=f(x)$는 $x=a$근방에서 접선 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$으로 근사시켜서 생각할 수 있습니다. 즉, $x\to 0$일 때

$$\ln(1+x)\cong x$$

$$\frac{1}{2}(e^{2x}-1)\cong\frac{1}{2}(2x)=x$$

이므로, 그 사이에 끼어있는 $f(x)$ 또한 $f(x)\cong x$로 단순화시킬 수 있겠네요. 즉, $x\to 0$일 때 $\frac{f(3x)}{x}\cong\frac{3x}{x}=3$입니다.



단순화
$\sin x\cong x$
$\tan x\cong x$
$e^x\cong x+1$
$\ln(1+x)\cong x$

무작정 외우지 말고,
곡선과 접선의 관계를
생각해보세요.
자명합니다!

#09. 정답률 92%

두 실수 a, b에 대하여 다음 항등식이 성립합니다.

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

위 식에서 $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$로 치환하면 다음과 같습니다.

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

• 이러한 조작이 생소하게 느껴지는 학생들이 있나요? 만약 그렇다면 삼각함수의 합성 $a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$ 이 어떻게 유도되었는지 반드시 복습하세요!

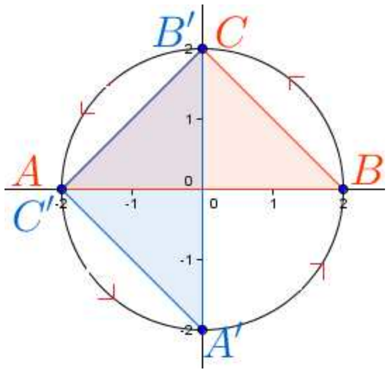
다시 말해 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$꼴 행렬은 반드시 확대변환과 회전변환의 합성으로 이해할 수 있습니다. 이 성질은 자주 사용되니까 반드시 기억해 놓으세요.

이 문제에서도 마찬가지인데요. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix}$이므로

반시계방향으로 90° 회전시킨 회전변환•을 의미합니다.

• 수학은 언어다.

$f(A)=(0,\,-2)$
$f(B)=(0,\,2)$
$f(C)=(-2,\,0)$



이므로, $\triangle ABC$의 내부와 $\triangle A'B'C'$의 내부의 공통부분의 넓이는

$2\left(=\dfrac{1}{2}\times2\times2\right)$입니다.

#10. 정답률 87%

이런 유형의 문제를 풀 때는 반사적으로 일단

❶ $x=0$대입, ❷ x에 대해서 미분

해봐야 합니다. 일단 이 방법을 써보고 먹히지 않으면 그 이후에 다른 방법을 생각해도 결코 늦지 않아요.

우선 $x=0$대입하면, $0=e^0+a$, $a=-1$

그 다음으로 x에 대해서 미분하면, $f(x)=e^x+a$ •

• $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$

즉, $f(x)=e^x-1$로 결정지을 수 있고, $f(\ln 2)=2-1=1$입니다.

#11. 정답률 84%

a_n과 S_n이 뒤섞여 있을 때는 $S_n-S_{n-1}=a_n$을 이용하여 한 문자를 소거시켜야 합니다.• 즉, 문제의 조건 속에서 $\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}$를 보는 순간 반사적으로

• 변수 줄이기

$$\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}=\frac{S_{k+1}-S_k}{S_kS_{k+1}}=\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}$$ •

• 망원경법 (telescoping method)

인접한 두 항의 차를 연달아 더하면 제일 앞과 끝만 남고 가운데의 항들은 다 소거됩니다. 마치 망원경을 펼쳤다 접었다 하는 것처럼

로 바꾸어 놓고 생각을 했어야만 합니다. 제일 왼쪽의 식은 여러 문자가 곱으로 엮여있는 복잡한 식이지만 제일 오른쪽의 식은 인접한 두 항의 차로 표현된 단순한 식이거든요. 아주 자연스러운 변형입니다!

이 고비만 넘기고 나면 이후 과정들은 간단한 계산에 불과합니다.

$$(\text{준식})=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{3}$$

이고, 아직 사용하지 않은 조건에 따르면 $S_1=a_1=2$이므로, 간단한 계산을 통해 $S_{11}=6$을 얻을 수 있습니다.

#12. 정답률 86%

색칠된 두 활꼴의 닮음비는 활꼴을 포함하는 두 원의 닮음비와 같고, 두 원의 닮음비는 그 지름의 비와 같습니다. 매 단계마다 정삼각형의 한 변의 길이는 이 전 단계의 $\frac{2}{3}$로 축소되므로, 결국 두 활꼴의 닮음비는 $3:2$가 됩니다. 즉, $S_n : S_{n+1} = 3^2 : 2^2$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + \frac{4}{9}S_1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 S_1 + \cdots = \frac{S_1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9S_1}{5}$$

임을 알 수 있습니다. 지금까지의 과정은 이러한 유형의 문제를 풀 때 항상 동일하게 적용돼요. 만약 여기까지 매끄럽게 오지 못했다면 반성해야 합니다.

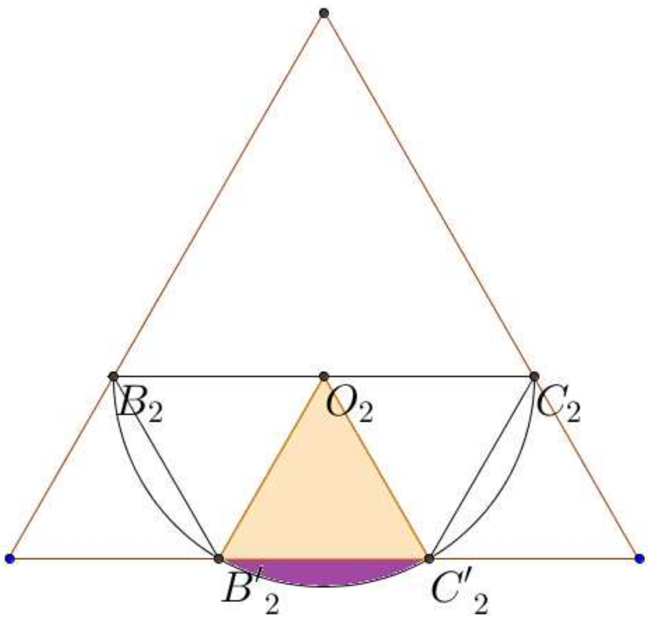
돌아가기

닮음비가 $m:n$이면 넓이비는 $m^2:n^2$입니다.

이제 활꼴의 넓이 S_1만 구하면 답을 얻을 수 있는데요.

$$\text{활꼴} = \triangledown OAB - \triangle OAB = \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin\theta = \frac{r^2}{2}(\theta - \sin\theta)$$

이번 기회에 활꼴의 넓이를 아예 하나의 공식으로 외워놓으세요. 부채꼴에서 삼각형을 빼면 활꼴의 넓이입니다. 참 쉽죠잉?



이고, $r=1$이고, $\theta = \frac{\pi}{3}$이므로 $S_1 = \frac{1^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$입니다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{20}$$

#13. 정답률 89%

(준식)$=2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)+3\sin x$

$=\sqrt{3}\,cosx+4\sin x$

$=\sqrt{19}\,sin(x+\alpha)$ (단, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이고 $\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{19}}$)

• 항수 줄이기

이므로 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{19}$ 입니다.

[사족] 이런 문제를 풀 때는 항상 x의 범위가 어떻게 되는지 확인하세요!

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$이거나 $0\le x\le\pi$처럼 범위가 좁게 주어진 경우에도 실수 없이 정확히 최댓값과 최솟값을 구할 수 있어야 합니다.

#14. 정답률 74%

㉠ 계산해보면 됩니다. $\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$ (참)

㉡ $A\in S$

$\Leftrightarrow A^2-A=O$

$\Leftrightarrow A(A-E)=O$

문제의 조건에 따르면 A의 역행렬이 존재하므로, 양변의 왼쪽에 A^{-1}를 곱하면 $A-E=O$을 얻을 수 있습니다. 즉, $A=E$입니다. (참)

• 주어진 것

㉢ $A+E\in S$

$\Leftrightarrow (A+E)^2-(A+E)=O$

$\Leftrightarrow A^2+A=O$

한편 $A^4\in S\Leftrightarrow A^8-A^4=O$이고, 조금 전에 얻은 성질($A^2=-A$)에 따르면 $A^8=(A^2)^4=(-A)^4=A^4$가 성립하네요. (참)

• 거꾸로 풀기

#15. 정답률 78%

문제의 조건 및 서술을 읽어보면 $a_1=2,\ a_2=1,\ a_n=a_{n-2}+1(n\ge 3)$임을 쉽게 파악할 수 있습니다. 마치 odd eye처럼 홀수항과 짝수항의 규칙이 각기 다른 수열이네요. 조금만 나열해보면 일반항이

$$a_n=\begin{cases}k+1 & (n=2k-1)\\ k & (n=2k)\end{cases}$$

임을 파악할 수 있고요. 그렇다면 S_n 또한

$$S_n=a_na_{n+1}=\begin{cases}(k+1)k & (n=2k-1)\\ k(k+2) & (n=2k)\end{cases}$$

으로 홀짝일 때 각기 다른 값을 가진다는 것을 알 수 있습니다.

$$\therefore\ f(6)=6,\ g(7)=7^2+2\cdot 7=63,\ f(6)+g(7)=69$$

#16. 정답률 68%

문제의 조건에 따르면 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

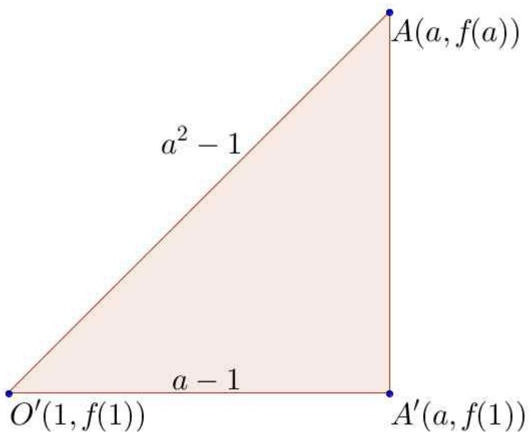
$$\lim_{a\to1}\frac{f(a)-f(1)}{a-1}$$

은 수렴합니다. 이 극한의 수렴값이 우리가 구하고자 하는 것인데요. 이 극한을 계산하기 위해서는 분자의 $f(a)-f(1)$을 $(a-1)$이 포함된 식으로 적절히 변형해주어야 합니다.

- 주어진 것
  구하는 것
  거꾸로 풀기

아직 사용하지 않은 조건이 있지요? 두 점 $(1,f(1))$과 점 $(a,f(a))$사이의 거리가 a^2-1라는 사실과 파타고라스 정리를 결합시켜 생각해보면

- 풀이가 막힐 때는 모든 조건을 다 사용하였는지 검점해보세요.



$f(a)-f(1)=\overline{O'A'}=\sqrt{(a^2-1)^2-(a-1)^2}=(a-1)\sqrt{a(a+2)}$를 얻을 수 있습니다.

$$\therefore \lim_{a\to1}\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\lim_{a\to1}\sqrt{a(a+2)}=\sqrt{3}$$

[별해]

약간 무식하고 dry하지만 이렇게 풀 수도 있어요. 두 점 $(1,f(1))$과 점 $(a,f(a))$사이의 거리가 a^2-1라는 조건을 그대로 식으로 옮겨보면

$$(a-1)^2+\{f(a)-f(1)\}^2=(a^2-1)^2 \text{ (단, } a>1)$$

인데요. 정신 바싹 차리고 위 식을 $f(a)=\cdots$하는 형태로 정리해보면

$$\{f(a)-f(1)\}^2=(a+1)^2(a-1)^2-(a-1)^2=(a-1)^2a(a+2)$$

$$f(a)=f(1)+(a-1)\sqrt{a(a+2)}$$

입니다. 이제 이 식을 a에 대하여 미분하면

$$f'(a)=\sqrt{a(a+2)}+(a-1)\frac{2a+2}{2\sqrt{a(a+2)}}$$

이고, 여기에 $a=1$을 대입해도 같은 답이 나옵니다.

#17. 정답률 76%

분수부등식 문제는 가급적 그래프와 그 교점을 이용해서 해결하는 것이 편리합니다.• 그래프의 교점을 구하는 과정은 분수방정식을 푸는 과정이기 때문에 분모의 최대공약수만 곱하면 되지만, 그래프의 도움을 받지 않고 직접 분수부등식을 풀 때는 분모의 최대공약수의 제곱을 곱해야 하기 때문입니다. 분수방정식을 풀 때보다 계산이 정말 곱절로 복잡해지지요.

• 수학은 언어다.
그래프의 교점
= 방정식의 근
단순화

이 문제에서도 마찬가지입니다. 주어진 분수부등식 $\frac{1}{x}-\frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{xf(x)}$를 다항부등식으로 바꾸기 위해서는 양변에 $x^2\{f(x)\}^2$를 곱해서

$$x\{f(x)\}^2 - x^2 f(x) \geq xf(x)$$

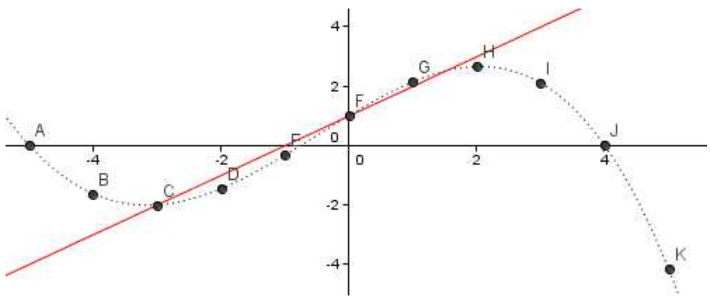
로 만들고 차차 다듬어야 하는데요. 딱 봐도 모양이 참 예쁘지 않습니다. 처음부터 $xf(x)$만 곱해도 괜찮은 방법이 없는지 고민해 볼 법 합니다. 즉,

$xf(x) > 0$일 때, (준식) $\Leftrightarrow$ $f(x)-x \geq 1$ $\Leftrightarrow$ $f(x) \geq x+1$
$xf(x) < 0$일 때, (준식) $\Leftrightarrow$ $f(x)-x \leq 1$ $\Leftrightarrow$ $f(x) \leq x+1$ •

• 경우 나누기
자연수 또는 정수를 다룰 때는 하나 하나 직접 세어보는 귀납적 접근이 대단히 유용합니다.

로 생각하자는 것이죠. $xf(x)=0$인 경우는 무연근이 될 수 있으므로 의도적으로 배제시켰습니다. 이제 가만히 관찰해보세요! (무연근이 될 수 있는 $x=-5,\ 0,\ 5$를 제외하고) -5에서 5사이의 정수 중 $xf(x)<0$인 경우는 $x=5$뿐입니다.• 빙고!

• 여사건



❶ $x \neq 5$일 때, 부등식 $f(x) \geq x+1$를 만족하는 정수 x는 $-4,\ -3,\ 1$
❷ $x=5$일 때, 부등식 $f(x) \leq x+1$를 만족한다.

❶과 ❷를 종합하면 정수 x의 개수는 4개

#18. 정답률 59%

이번 시험문제에서 유일하게 깜짝출제되었다고 할 수 있는 문항입니다. 꼬지 않고 출제했음에도 불구하고 정답률은 제법 낮은 편이네요. 올해 수험생들은 이번 기회에 거듭제곱근을 꼼꼼하게 공부해 놓을 필요가 있습니다. 그 정의를 정확히 기억해놓으세요. 정의를 정확히 기억하고 이해하고 있으면, 잡다한 성질들은 다 여기로부터 파생되어 나옵니다.

a의 n제곱근 $\Leftrightarrow$ 방정식 $x^n = a$의 근

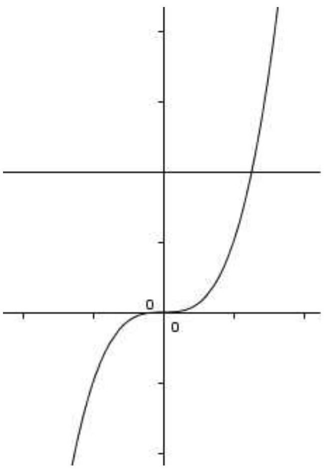
우리가 증명하진 않았지만 어디서 귀동냥하기로 n차 방정식은 복소수범위에서 항상 n개의 근을 가진다고 했었지요? 따라서 a의 n제곱근은 항상 n개입니다. 그리고 a의 n제곱근 중 실수인 것을 $\sqrt[n]{a}$ (또는 $\pm\sqrt[n]{a}$)라 쓰고, n제곱근 a라고 읽지요.

- 다시 한 번 강조하는데요. a의 n제곱근과 n제곱근 a를 혼동하지 마세요!

당연하게도 거듭제곱근 중 실근의 개수는 $y=x^n$과 $y=a$의 그래프의 교점의 개수와 같습니다. 즉, 이 문제에서는 다음과 같이 규칙을 발견할 수 있습니다.

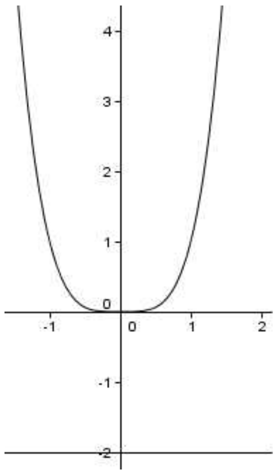
- 수학은 언어다. 그래프의 교점 = 방정식의 근

❶ n이 홀수일 때



$a_n = 1$

❷ n이 짝수일 때



$a_n = 0$

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2^3} + 0 + \frac{1}{2^5} + 0 + \frac{1}{2^7} + \cdots = \frac{1/2^3}{1-1/2^2} = \frac{1}{6}$$

#19. 정답률 78%

우선 무한급수를 정적분으로 바꾸어 봅시다. 이 부분은 처음 익힐 땐 어렵겠지만 일단 숙달되고 나면 결코 어렵지 않아요. 좌변에서

수열 $x_k = m + \dfrac{k}{n}$은 $x_0 = m$이고, $x_n = m+1$인 등차수열

$f\left(m+\dfrac{k}{n}\right)$가 미세한 직사각형의 세로, $\dfrac{1}{n}$이 미세한 직사각형의 가로

이므로•, 당연히

• 수학은 언어다.

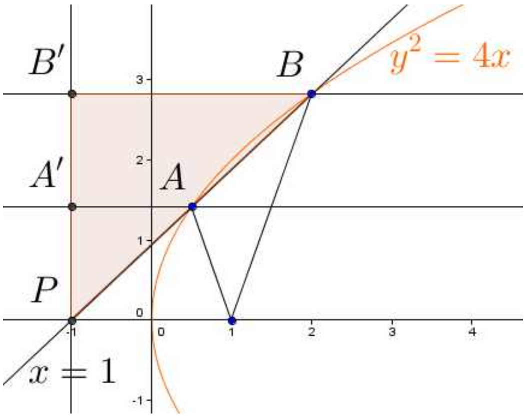
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(m+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \int_{m}^{m+1} f(x)dx$$

가 성립합니다. 즉, m이 정수일 때 주어진 함수 $f(x)$에서 간격을 1로 잡아서 정적분을 구했을 때 그 값이 음수인 경우는 $m=-3,\ -2,\ -1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 모두 7개입니다.

#20. 정답률 73%

이 문제는 조건을 꼼꼼히 확인하는 것만으로도 어떻게 접근해야 할지 풀이의 80%정도를 예상할 수 있어요.• 우선 이차곡선이 문제에 등장하는 이유는 그 정의를 정확히 기억하고 있는지 묻기 위해서입니다. 또한 문제에서 선분의 비가 주어졌다면 많은 경우 닮음 삼각형을 찾아내야 합니다. 즉, 그림을 일단 이렇게 그리고 시작해야 한다는 것 동의하겠어요?

• 주어진 것



오른쪽 그림에서
$\triangle PAA'$과 $\triangle PBB'$은
$1:2$닮음삼각형이므로
$1:2$
$=AF : BF$
$=AA' : BB'$
$=PA' : PB'$
가 성립합니다.

이제 A'과 B'의 y좌표를 α와 2α라 놓을 수 있고요. 한 걸음 더 나가 포물선 $y^2 = 4x$위의 두 점 A, B의 좌표를 $A\left(\dfrac{\alpha^2}{4}, \alpha\right)$, $B(\alpha^2, 2\alpha)$라 놓을 수 있습니다. 빙고! 이제 선분 PA와 선분 PB의 기울기는 같다고 식을 세우고

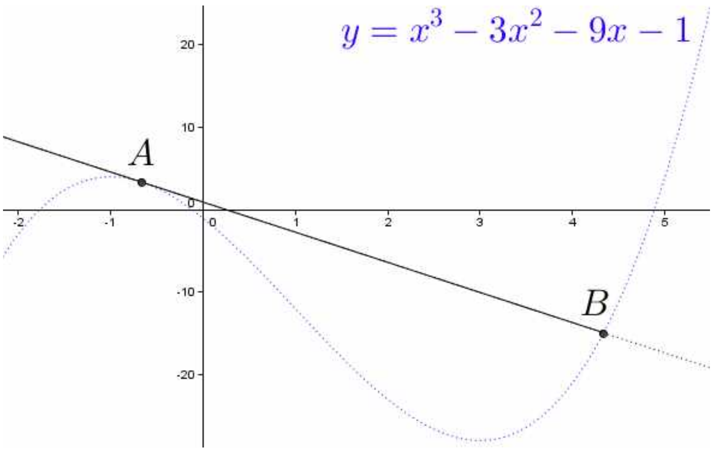
$$\frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha}{\alpha^2/4 - 1}$$

계산하면 $\alpha = \sqrt{2}$, l의 기울기$=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$를 얻을 수 있습니다.

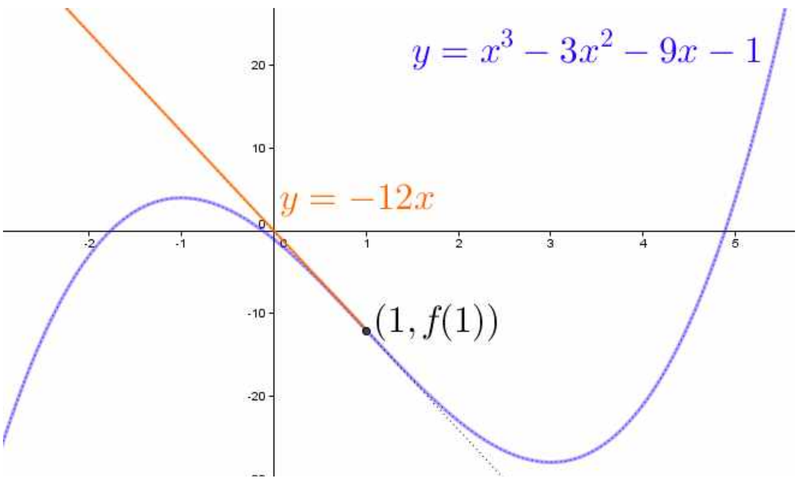
#21. 정답률 70%

이 문제를 풀기 위해서는 평소에 삼차함수를 공부할 때 다양한 그래프를 그려보면서 변곡점에 주목하여 관찰해 본 경험이 축적되어 있어야 해요. 삼차함수가 가진 가장 큰 규칙성은 점대칭성입니다. 자세한 논증은 생략하지만 임의의 삼차함수는 변곡점에 대하여 점대칭을 이룹니다. • 대칭

문제에 제시된 $g(x)$는 두 다항함수 $f(x)$와 $y=mx$를 더 큰 값에 주목해서 이어붙인 함수인데요. 이 함수가 모든 점에서 미분가능하기 위해서는 $f(x_0)=mx_0$를 만족하는 모든 x_0에 대하여 $y=mx_0$가 $y=f(x_0)$의 접선이 되어야 한다는 뜻이죠. 일반적으로 삼차함수의 접선은 접점 외의 또 다른 교점에서 삼차함수를 관통하게 됩니다. 예컨대 아래 그림에서 A에서는 부드럽게 두 함수가 잘 연결되었지만, B에서는 뾰족하게 연결되었으므로 조건을 만족하지 못합니다.



이 문제를 해결하기 위해서는 어떻게 해야 할까요? 바로 주어진 삼차함수의 변곡점에서 접선을 그으면 됩니다. 변곡점에서 그은 삼차함수의 접선은 독특하게도 삼차함수를 관통하는 형태이거든요. 이제 남은 것은 간단한 계산뿐입니다. 즉, $f''(x)=0$를 풀면 $x=1$이고, $f'(1)=-12$를 얻을 수 있습니다.



#22. 정답률 94%

무리방정식 $\sqrt{A}=B$를 풀 때 $A\geq 0$보다 중요한 것은 $B\geq 0$입니다.

$\sqrt{4x+9}=x+1$

$\Leftrightarrow$ $4x+1=x^2+2x+1$ (단, $x>-1$)

$\Leftrightarrow$ $x^2-2x+8=0$ (단, $x>-1$)

$\Leftrightarrow$ $x=4,\ -2$ (단, $x>-1$) $\Leftrightarrow$ $x=4$

명심하세요! 이런 유형의 출제의도는 무연근을 솎아내는 것입니다.

• 왜 그럴까요?
$y=\sqrt{4x+1}$
$y=x+1$
의 그래프를 그려놓고 생각해보세요.

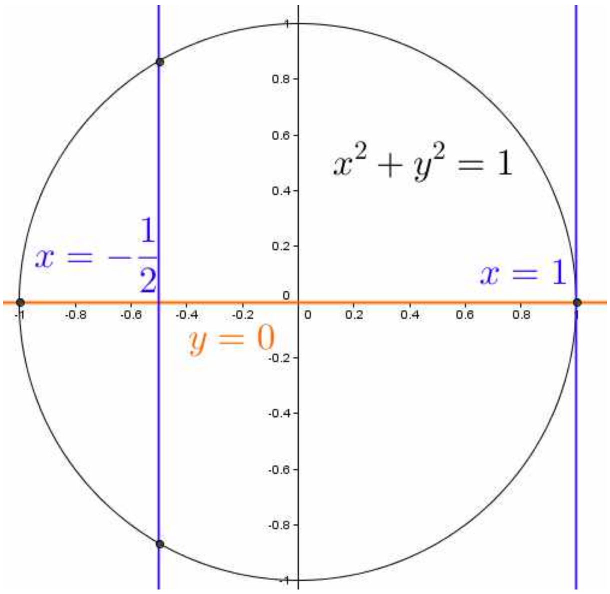
#23. 정답률 79%

$\cos 2\theta=\cos\theta$

$\Leftrightarrow$ $2\cos^2\theta-1=\cos\theta$ $\Leftrightarrow$ $(2\cos\theta+1)(\cos\theta-1)=0$

$\Leftrightarrow$ $\cos\theta=-\dfrac{1}{2},\ 1$

이므로, $\sin\theta=0$, $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$, $\cos\theta=1$일 때의 각을 찾아주면 되는데요.



이 때 $x=-\dfrac{1}{2}$일 때의 두 각은 $\theta=\pi$에 대칭이므로 그 합은 2π입니다.

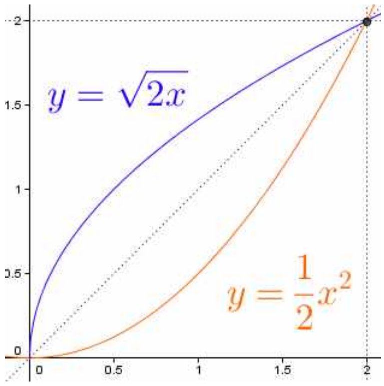
• 대칭

즉, 조건을 만족하는 θ의 합은 $0+\pi+2\pi=3\pi$입니다. $\therefore\ 10k=25$

많은 학생들이 $y=\sin x$의 그래프와 $y=\cos x$의 그래프를 포개어 그려놓고 이 문제를 풀었으리라 생각되는데요. 제가 지금 시범 보인 것처럼 대부분의 삼각함수문제는 단위원 위에서 해결하는 것이 빠르고 정확합니다.

#24. 정답률 60%

함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 역함수는 $y=\sqrt{2x}$ 이고, 두 함수의 교점은 $(2,2)$입니다.



즉, 우리가 구하고자 하는 회전체의 부피는

$$\pi\int_0^2 (y_1^2-y_2^2)dx=\pi\int_0^2 \left(2x-\frac{1}{4}x^4\right)dx=\frac{12}{5}\pi\text{입니다.}$$

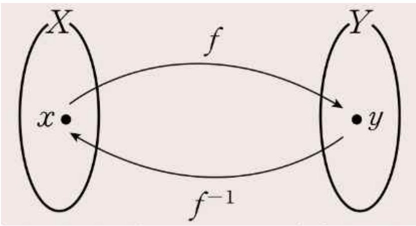
#25. 정답률 81%

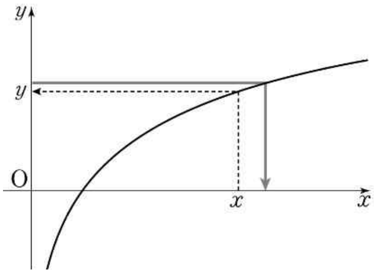
음이 아닌 정수해의 개수는 중복조합과 같습니다. ${}_4H_4={}_7C_4=35$

#26. 정답률 48%

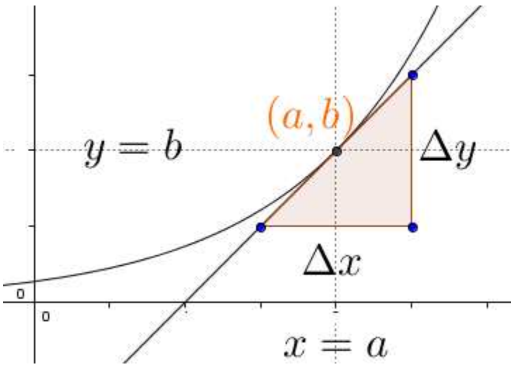
원함수와 역함수는 똑같은 대응에서 화살표의 종점과 시점만 바뀐 것입니다. 다시 말해 ↰ 방향으로 읽던 원함수의 그래프를 방향을 바꾸어서 ↴ 로 읽으면 역함수의 그래프가 됩니다. •

• 관점 바꾸기





이러한 관점은 역함수의 미분법 $f'(a)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{dx/dy}=\dfrac{1}{f^{-1\prime}(b)}$를 이해할 때도 대단히 유용한데요.



위 그림을 ↰ 방향으로 읽으면 $x=a$에서 $f(x)$의 순간변화율이 되지만,

↴ 방향으로 읽으면 $y=b$에서 $f^{-1}(y)$의 순간변화율이 됩니다.

이제 문제에 제시된 조건들을 바탕으로 $y=f(2x)$의 그래프를 대략적으로 그려봅시다. • 우선 $y=f(x)$가 $(2,1)$을 지나므로 $y=f(2x)$는

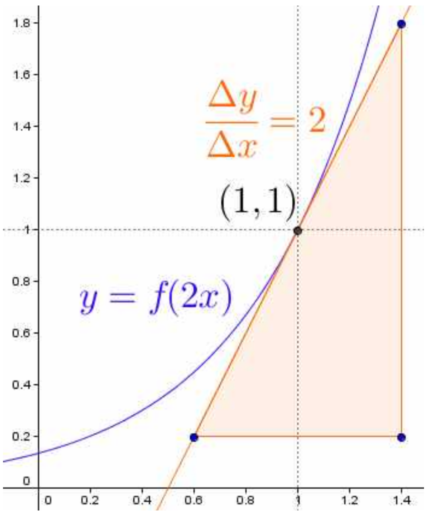
• 주어진 것

$$\boxed{\begin{array}{l} f(2)=1 \\ f'(2)=1 \end{array}}$$

⇩

구하는 것

$$\boxed{\begin{array}{l} f(2\cdot 1)=1 \\ f'(2\cdot 1)\cdot 2=2 \end{array}}$$



$(1,1)$을 지나고요. $f'(2)=1$이므로, 합성함수의 미분법에 의해

$$\{f(2x)\}'|_{x=1}=f'(2)\cdot 2=2$$

입니다. 마지막으로 $y=f(2x)$의 그래프를 ↴ 방향으로 읽으면 $y=g(x)$의 그래프가 되므로

$$g'(1)=\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{2}$$

임을 알 수 있습니다.

$$\therefore\ 10(a+b)=10\left(1+\frac{1}{2}\right)=15$$

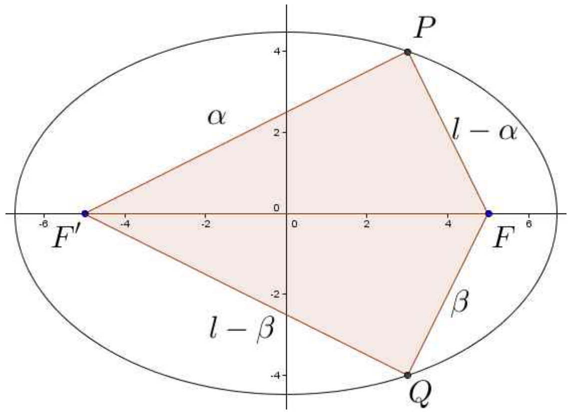
#27. 정답률 38%

앞서 #20을 해설하면서도 한 차례 언급하였지만 문제에서 이차곡선이 등장하는 이유는 이차곡선의 정의를 묻기 위해서입니다. 다시 말해 이 문제를 읽는 순간

$$F'P+FP=F'Q+FQ=l$$

라는 조건이 반드시 풀이과정에 사용될 것이라 머리 한편에 각인하고 있어야만 해요. 이제 설명의 편의를 위해 $F'P=\alpha$, $F'Q=\beta$라 표기하겠습니다.•

• 첫 단추



또한 많은 도형문제를 풀 때 수직이나 평행은 대단히 중요한 조건입니다. 다시 말해 그림에서 수직과 평행은 많이 등장할수록 좋아요. 이 문제를 풀면서도 이렇게 조건반사가 이루어졌어야만 합니다.

$$FO:FF'=FH:FP=1:2$$
$$\Rightarrow \triangle FOH\text{와 } \triangle FF'P\text{는 } 1:2\text{닮음}$$
$$\Rightarrow \angle F'PF=\angle OHF=90^\circ$$

즉, $\triangle FF'P$와 $\triangle FF'P$는 직각삼각형이므로 피타고라스정리를 적용해서

$$(l-\alpha)^2+\alpha^2=10^2$$
$$(l-\beta)^2+\beta^2=10^2$$

라 쓸 수 있습니다. 그러고 보니 두 식의 모양이 똑같네요!! 즉, 이차방정식 $(l-x)^2+x^2=100$의 두 근을 α, β라 할 수 있습니다.• 주어진 이차방정식을 x에 대해 내림차순으로 정리하면 다음과 같습니다.

• 관점 바꾸기

$$x^2-lx+\frac{l^2-100}{2}=0 \text{ - } ❶$$

자! 이제 아직까지 사용하지 않은 유일한 조건 $OH\times OI=10$를 사용해봅시다. 우리는 지금까지 문제에 주어진 상황을 모두 α, β에 대한 식으로 바꾸어 이해해왔는데요. 그렇다면 $OH\times OI=10$ 또한 α, β에 대한 식으로 바꾸어 표현할 수 없을까요? 두 삼각형 사이의 $1:2$ 닮음관계에 주목하면, 어렵지 않게 $OH\times OI=10$란 $\alpha\beta=40$ - ❷와 동치임을 알아차릴 수 있습니다. 빙고! 이제 다 풀었네요! ❶과 ❷를 연립하여 생각해보면 근과 계수의 관계에 의해 $l^2=180$입니다.

덧글1. 사실 이 문제에 주어진 그림은 x축대칭입니다. 이 점을 포착했다면 제가 방금 한 해설보다 조금 더 간결하게 상황을 정리해서 쓸 수 있어요.

대칭성

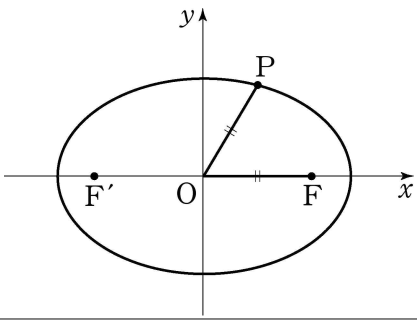
$$\alpha+\beta=l$$
$$\alpha\beta=40$$
$$\alpha^2+\beta^2=10^2$$

덧글2. #27은 다음 소개하는 두 기출문제를 적절히 짜깁기한 것에 불과합니다. 이 문제를 틀린 학생들은 다음 두 문제를 풀어보는 것에서 한 걸음 더 나가 『기하와 벡터』 기출문제들을 모조리 모아놓고 파노라마 형식으로 빠짐없이 다 다시 풀어보면서 어떤 아이디어들이 사용되었는지 각 문제마다 한 두 문장 정도로 간단히 요약하여 정리하고, 아이디어 사이의 연관성을 찾아보길 강력히 권합니다! 지금 이 말은 optional한 말이 아니라 mandatory한 말로 받아들여줬으면 해요.

숲을 보자!

27-1. 2006년 09월 #22, 정답률 55%, 정답 32

타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$의 두 초점을 F, F'이라 하자. 이 타원 위의 점 P가 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OF}}$를 만족시킬 때, $\overline{\mathrm{PF}}\cdot\overline{\mathrm{PF'}}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



27-2. 2006년 11월 #20, 정답률 24%, 정답 15

타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$의 두 초점을 $F,\ F'$이라 하자. 이 타원 위의 점 P가 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}|=1$을 만족시킬 때, 선분 PF의 길이는 k이다. $5k$의 값을 구하시오. (O는 원점이다.)

많은 학생들이 기출분석과 단순히 기출문제를 꼼꼼히 푸는 것을 구분하지 못하는데요. 기출분석이란 단순히 한 문제씩 각각 꼼꼼히 푸는 것을 넘어서 여러 문제들을 하나로 관통하는 큰 맥(脈)을 찾아내는 것을 의미합니다. 정말 구슬이 서 말이라도 꿰어야 보배인 법입니다.

#28. 정답률 59%

고교수학에서 등장하는 여러 종류의 식들 다시 말해 분수식, 무리식, 사인과 코사인, 지수, 로그 등등을 관통하는 하나의 원리를 꼽자면

다항식으로 만들라!•

• 단순화

입니다. 그래서 저는 문제의 조건 $\frac{1}{n+2} < \frac{a_n}{k} < \frac{1}{n}$를 보는 순간 반사적으로 이렇게 식을 정리했습니다.

❶ 역수 취해서, $n+2 > \frac{k}{a_n} > n$

❷ a_n 곱해서, $(n+2) \cdot a_n > k > n \cdot a_n$

이제 구하는 것을 살펴봅시다. a_n은 위 부등식을 만족하는 자연수 k의 개수이고요.• a_{10}의 값을 묻고 있네요. 이 때 자연수라는 조건은 대단히 중요합니다. 자연수를 대상으로 뭔가 수학적인 이야기를 할 때는 극단적으로 말해서 도저히 모르겠다면 하나, 둘, 셋, 넷하고 직접 다 세어보면 되거든요. 한 걸음 더 나가 다행히도 이 문제에서는 a_{100}이나 a_{200}이 아니라 a_{10}을 묻고 있습니다. 충분히 차근차근 나열하면 답에 도달할 수 있는 상황입니다.

• 나열

저는 조금 일반화시켜서 접근해볼게요. 단순히 이 문제를 해설하는 것이 제 목적이 아니라 이 문제를 해설을 통해 다른 문제를 풀 때 도움이 되도록 하는 것이 제 목표니까요. 우선 부등식 $(n+2) \cdot a_n > k > n \cdot a_n$를 만족하는 자연수 k의 개수•는

$$(n+2)a_n - na_n + 1 = 2a_n + 1$$

입니다. 즉, $a_{n+1} = 2a_n + 1$이고요. 이 수열의 일반항은 $a_n = 1 + 2^{n-1}$임을 어렵지 않게 발견할 수 있습니다.

$$\therefore\ a_{10} = 513$$

• 두 자연수 a, b사이에는 $b-a+1$개의 자연수가 있습니다. 무작정 외울 필요 없어요. 구체적인 예를 가지고 조금만 생각해보면 당연합니다. 5와 3사이에 몇 개에 자연수가 있는지 생각해보세요.

#29. 정답률 28%

꾸준히 출제되어왔던 유형의 문제인데 이번에 특히 까다롭게 출제되었네요. 저에겐 이번 6월 모의평가 수리영역 모든 문제를 통틀어서 가장 까다롭게 느껴졌던 문항인데요. 정답률을 살펴보아도 학생들의 체감 난이도 또한 비슷한 것 같습니다.

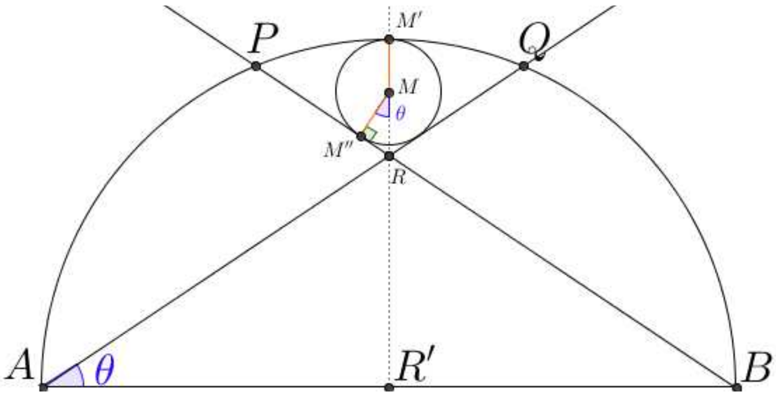
이런 유형의 문제를 풀이할 때는 크게 두 단계를 거칩니다.

1. 주어진 그림을 식으로 바꾸어 표현하고
2. 얻은 식에 극한을 취해 계산

이 문제 또한 그러해요. 첫 단계에서는 극한을 아예 생각하지 말고 오직 그림을 식으로 바꾸어 표현하는 것에만 집중하고, 두 번째 단계에서는 그림을 생각하지 말고 드라이(dry)하게 극한만 계산하면 됩니다. 일종의 분업이죠.

자. 그럼 해봅시다! 우선 문제에 주어진 그림을 보는 순간, 지름 AB의 수직이등분선을 긋고 주어진 그림이 선대칭임을 포착해야만 합니다.• 또한 원과 그 접선을 보면 항상 수직관계를 떠올려야겠죠. 그럼 아래에 제가 그린 것처럼 그림이 그려져 있을 겁니다. 여기까지가 이 문제를 풀기 위한 기본 세팅이라 할 수 있지요.

• 대칭



제가 생각하기에 이 문제에서 가장 포착하기 어려웠던 부분은

두 직각삼각형 $\triangle ARR'$과 $\triangle MM''R$이 닮음삼각형

입니다. (왜??) 이 점만 잘 포착하고 나면 그 다음 풀이과정부터는 크게 어렵지 않아요. 지금 우리는 주어진 그림을 θ에 대한 식으로 바꾸어 표현하고자 노력하는 중입니다.• 이 목표를 정확히 기억하세요!

• 구하는 것

$$M'R' = M'M + MR + RR'$$

$$= r(\theta) + \frac{r(\theta)}{\cos\theta} + \tan\theta \quad \bullet$$

• $\triangle MRM''$에서 MM''은 내접원의 반지름 $r(\theta)$와 같습니다.

이제 $M'R' = 1$임을 이용하여 위 관계식을 $r(\theta) = \cdots$의 꼴로 정리해보면

$$r(\theta) = \frac{\cos\theta - \sin\theta}{1 + \cos\theta}$$

를 얻을 수 있고요. 이제 남은 것은 dry한 계산뿐입니다!

우선 준식은 다음과 같이 두 부분으로 나누어 생각할 수 있습니다.

$$\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}$$

$\lim_{\theta\to(\pi/4)^-}\frac{1}{1+\cos\theta}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$임은 간단한 계산을 통해 확인할 수 있고요.

이제 $\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\pi/4-\theta}$에서 $f(\theta)=\cos\theta-\sin\theta,\ g(\theta)=\frac{\pi}{4}-\theta$라 놓으면 •

• 관점 바꾸기

$$\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\pi/4-\theta}=\frac{f(\theta)-0}{g(\theta)-0}=\frac{f(\theta)-f(\pi/4)}{g(\theta)-g(\pi/4)}=\frac{\frac{f(\theta)-f(\pi/4)}{\theta-(\pi/4)}}{\frac{g(\theta)-g(\pi/4)}{\theta-(\pi/4)}}$$

가 됩니다. 이제 미분계수의 정의를 이용하면[2],

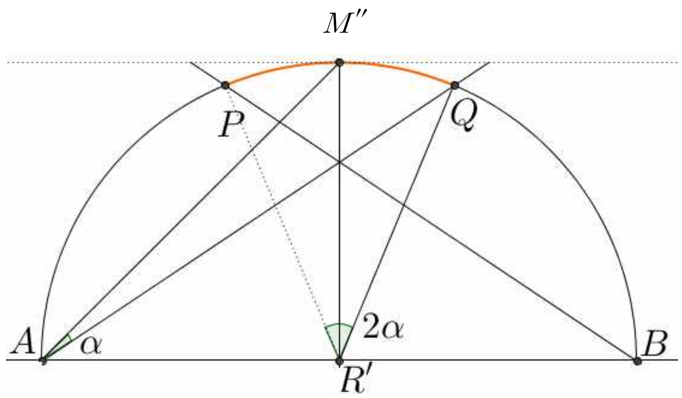
$$\lim_{\theta\to(\pi/4)^-}\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\pi/4-\theta}=\frac{f'(\pi/4)}{g'(\pi/4)}=\sqrt{2}$$

임을 알 수 있습니다. 이제 두 값을 곱하고 정리하면 $2\sqrt{2}-2$네요.

$$\therefore p^2+q^2=2^2+2^2=8$$

[별해][3] $\angle M''AQ=\frac{\pi}{4}-\theta=\alpha$를 주인공으로 생각하고• 주어진 그림을 해석해봅시다! 중심각의 크기는 원주각의 크기의 두 배이므로 $\angle M''R'Q=2\alpha$이고 대칭성에 의해 $\angle PR'Q=4\alpha$가 성립합니다. 즉, $\overset{\frown}{PQ}=1\cdot 4\alpha=4\alpha$네요.

• 주인공 바꾸기



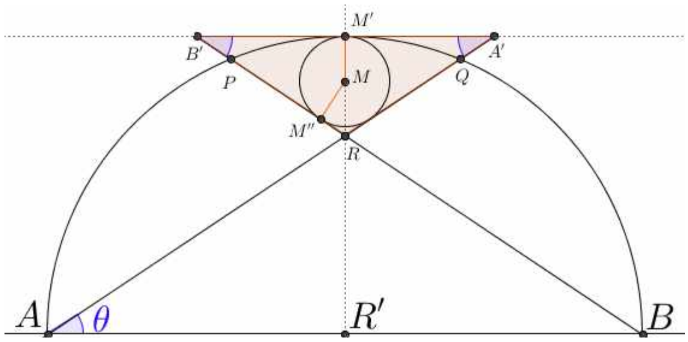
한편 M''을 지나는 반원의 접선을 생각해보면 주어진 내접원은 $\triangle A'B'R$에 내접한다고 생각해도 무방한데요.

2) 이 사고방식을 일반화한 것이 "로피탈의 (약)정리"입니다. 종종 로피탈 정리를 사용하면 큰일 날 것처럼 엄포 놓는 분들이 있는데, 제 입장에서는 참 이해하기가 어렵더라고요. 극한계산이 숙달되어서 나도 모르게 매번 하는 세팅을 빨리 해버린 것이 로피탈의 정리이거든요.

3) 이 별해는 2012년 07월 17일, 김우섭이 최초로 발표하였습니다. 출처만 <<김우섭, 2012년 07월 17일>>이라 명확히 밝힌다면 이 풀이는 어느 책, 강의에서나 자유롭게 소개해도 무방합니다. 하지만 만약 이 해설집 이후 출간된 출판물에서 이 풀이를 무단표절한 것이 적발될 경우 저작권 침해에 따른 책임을 분명히 묻겠습니다!

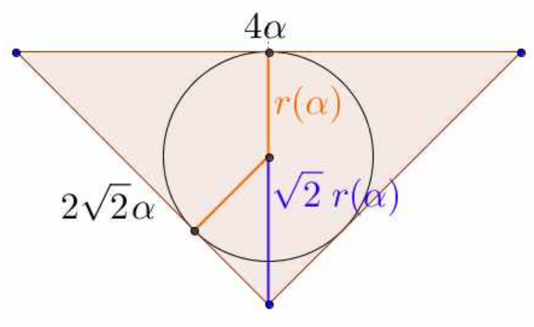
❶ $\angle RA'B' = \angle RB'A' = \theta$이고,

❷ $\alpha \to 0$일 때(다시 말해 점R $\to$ 점M'일 때) $\angle ARB = 90^\circ$로 수렴하므로, 그 맞꼭지각인 $\angle A'RB'$ 또한 90°로 수렴합니다.



즉, $\alpha \to 0$일 때, $\triangle A'B'R$은 직각이등변삼각형이 되어버립니다!• 빙고!!

미분가능한 곡선은 충분히 확대하면 언제나 접선으로 단순화시켜서• 생각할 수 있습니다. 즉, $\alpha \to 0$일 때, $\overline{A'B'} \cong \overset{\frown}{PQ} = 4\alpha$이므로 세 변의 길이가 4α, $2\sqrt{2}\alpha$, $2\sqrt{2}\alpha$인 직각이등변삼각형에 내접원을 그려보면



$r(\alpha) + \sqrt{2}\,r(\alpha) = 2\alpha$가 성립하고,

이 식을 정리하면 그 내접원의 반지름의 길이 $r(\alpha)$는 $2(\sqrt{2}-1)\alpha = r(\alpha)$입니다.

$$\therefore \lim_{\alpha \to 0} \frac{r(\alpha)}{\alpha} = 2(\sqrt{2}-1)$$

• 많은 도형 문제는 직각삼각형이나 이등변삼각형에 주목하면 풀립니다. 만약 직각이등변삼각형을 찾아냈다면 사실 상 게임 끝이라 할 수 있어요.

• 단순화

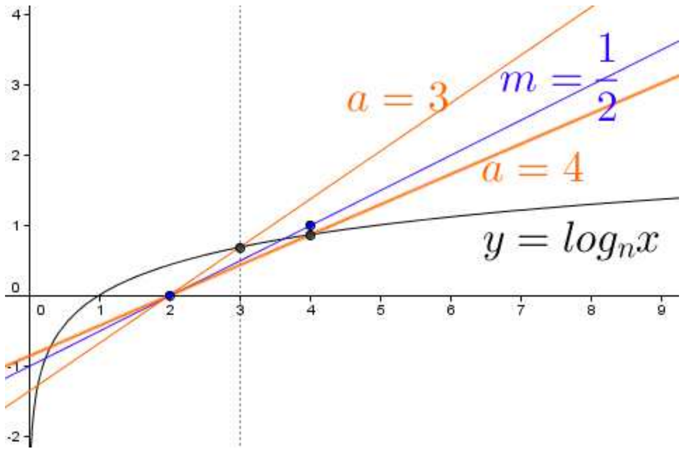
#30. 정답률 37%

최근 수능에서는 자연수라는 무대 위에서 하나, 둘, 셋, 넷, ⋯ 직접 손꼽아보면서 경우를 쪼개고 규칙을 찾아내는 문제가• 상당히 높은 난이도로 다듬어져서 30번 문항으로 꾸준히 출제되고 있습니다. 이번 6월 모의평가 또한 이러했고, 9월 모의평가, 수능 또한 그러할 것이라 강력히 예상됩니다.

• 나열

도무지 감이 잡히지 않을 때는 주어진 문자(n, a)에 숫자를 넣어보면서 상황을 이해하려 시도해보는 것이 좋습니다.

우선 문제에 제시된 것처럼 과연 $f(5)=4$인지 확인해볼까요?



$(2,0)$을 지나고 기울기가 $\dfrac{1}{2}$인 직선은 항상 $(4,1)$을 지납니다.• 파란색으로 표시할게요. 이제

• 불변량

지수-로그함수 문제에서는 지금처럼 고정된 점이 자주 등장합니다. 사실 지수함수와 로그함수 사이의 대칭성도 자주 등장하는데, 이 문제에서는 사용되지 않았네요.

$(2,0)$과 $(3,\ \log_5 3)$을 지나는 직선

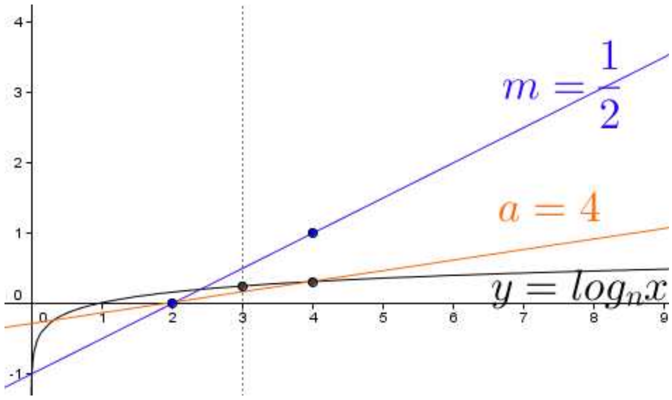
$(2,0)$과 $(4,\ \log_5 4)$을 지나는 직선

을 순차적으로 그어보면(주황색으로 표시했습니다!) $a=3$일 때는 주황색 직선이 파란색 직선보다 위에 있지만 $a=4$일 때는 주황색 직선이 파란색 직선보다 아래에 위치합니다. $\log_5 4<1$이거든요. 즉, 주황색 직선이 파란색 직선보다 아래에 위치하도록 하는 가장 작은 자연수 a값은 4이고,

따라서 $f(5)=4$입니다.

아하! 이제 문제에 주어진 상황이 어떠한지 감이 와요? 이제 반대로 아주 극단적인 경우를 생각해봅시다.• $n=100$정도 되었다고 생각해보고 그래프를 그려보면 다음과 같습니다.

• 극단화



$y=\log_n x$가 x축에 가깝게 납작하게 그려지는 바람에 $a=3$인 경우만 생각해보아도 주황색 직선이 파란색 직선보다 아래에 있네요. 즉, $f(100)=3$이고요. 다시 말해 다시 말해 우리는 n이 충분히 크면 $f(n)=3$이란 단서를 얻었습니다. 이제 $f(n)=3$인 가장 작은 n의 값만 구해봅시다. 남은 것은 간단한 계산뿐입니다!

$$\frac{\log_n 3}{3-2} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{(역수 취해서) } \log_3 n \ge 2$$

이므로, $n \ge 9$일 때는 $f(n)=3$이고요.

$$f(4)=f(5)=\cdots=f(8)=4$$

입니다.• 빙고!

• 경우 나누기

$$\therefore \sum_{n=4}^{20} f(n)=4\times5+3\times22=86$$